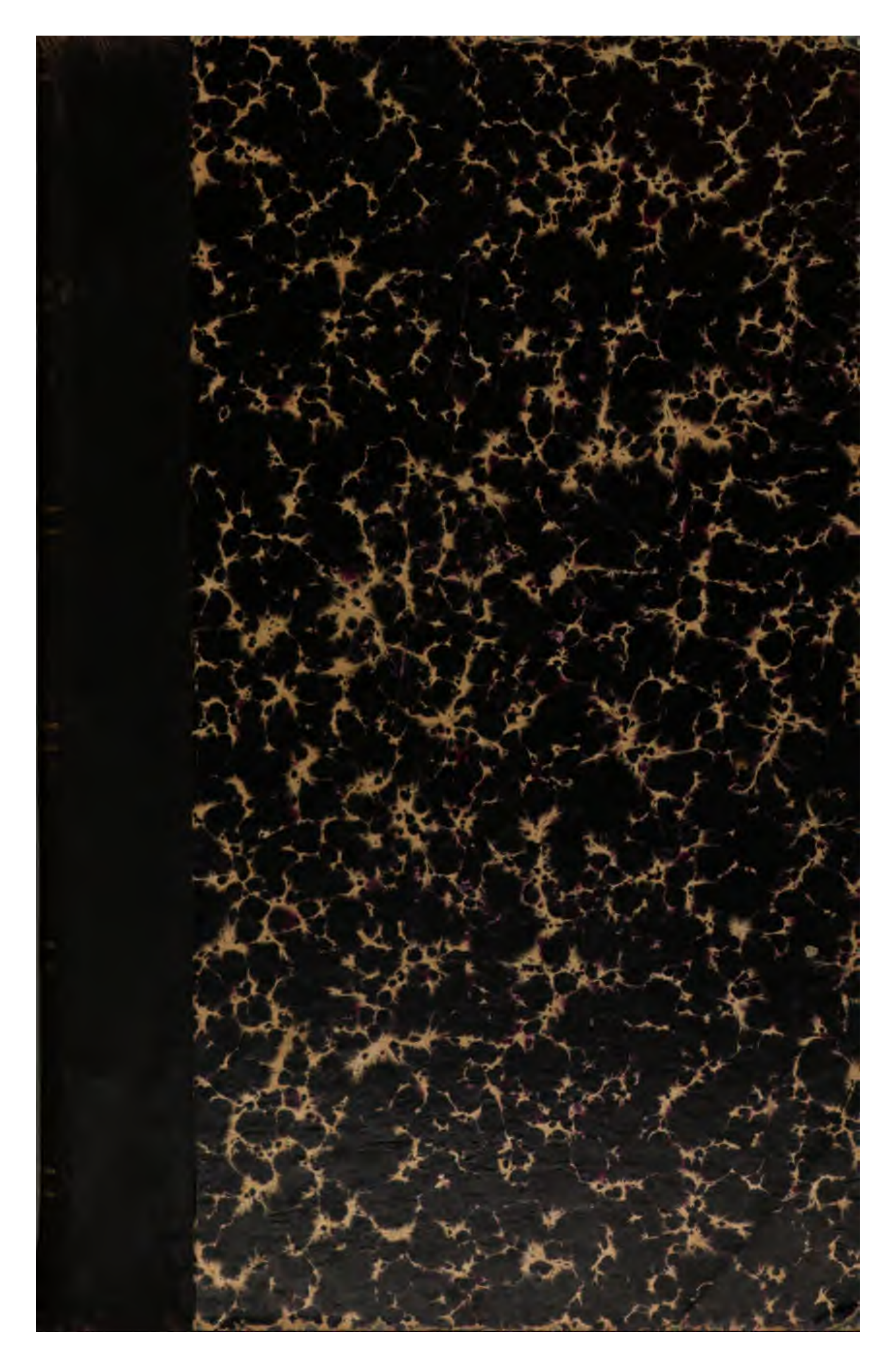
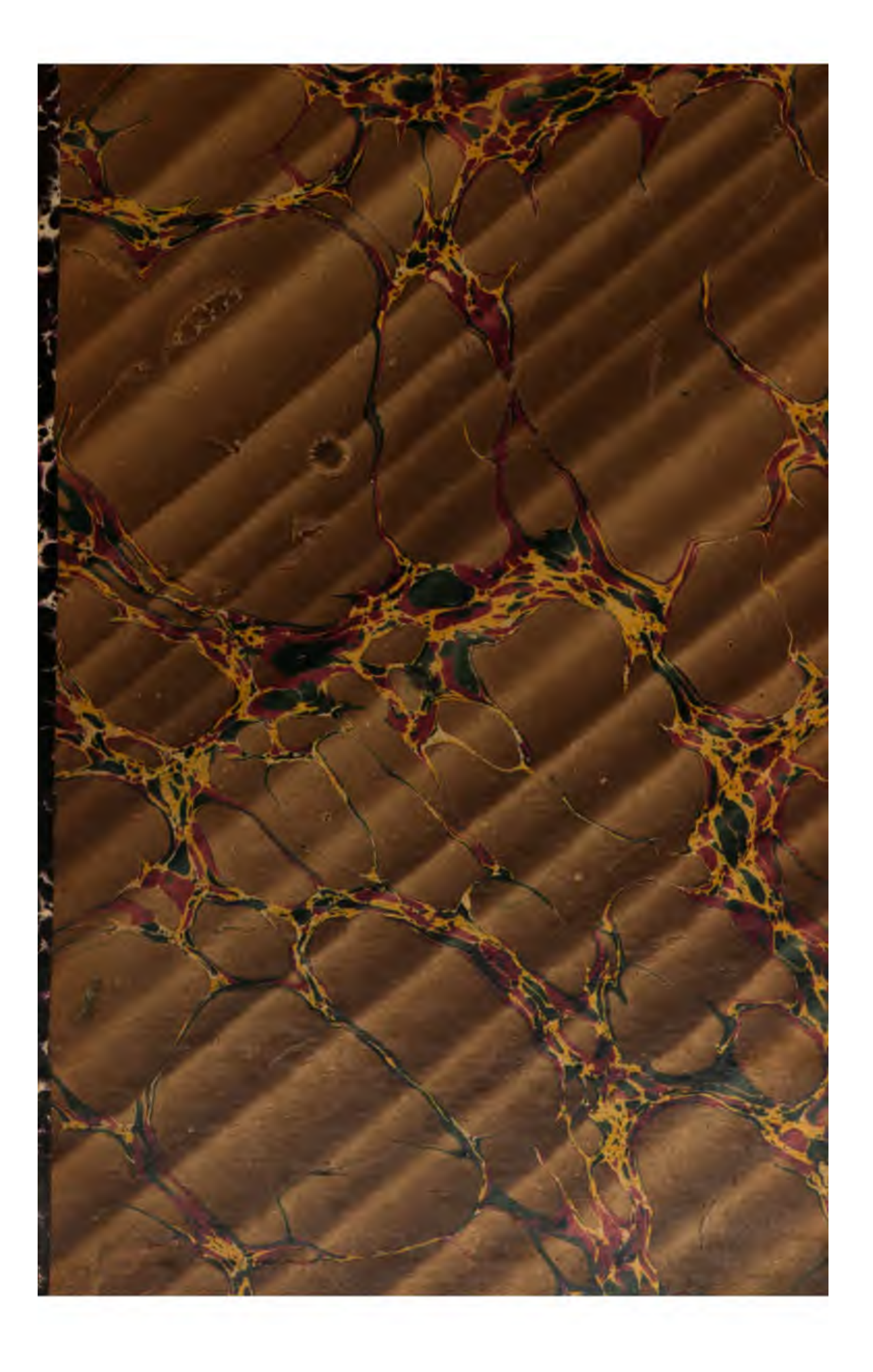
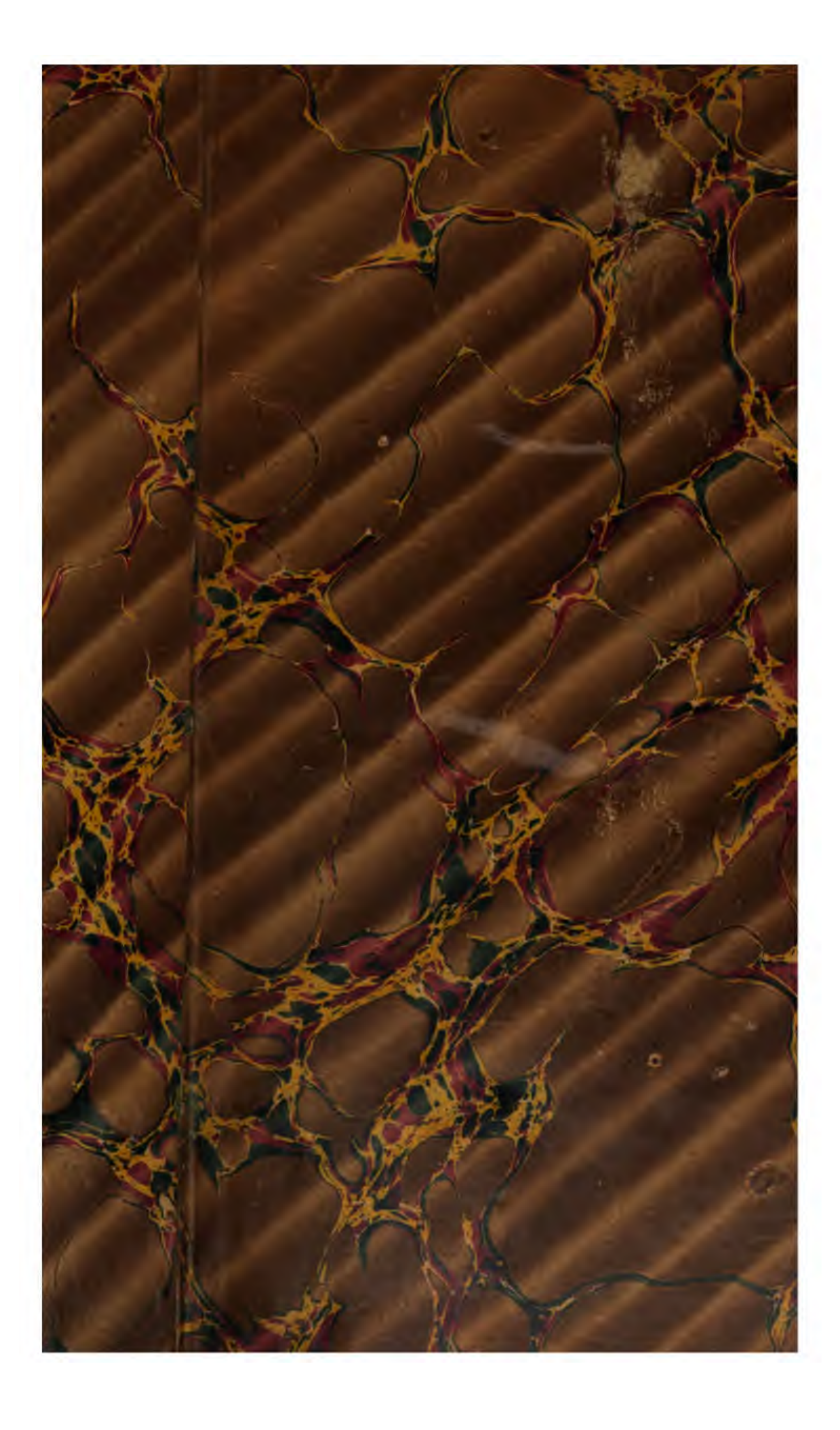






COURS

DE

MÉCANIQUE

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
8340 Quai des Grands-Augustins, 55.

COURS
DE
MÉCANIQUE
DE
L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

PAR CH. STURM,
Membre de l'Institut.

REVU ET CORRIGÉ
PAR E. PROUHET,
Répétiteur d'Analyse à l'École Polytechnique.

5e ÉDITION, SUIVIE DE
NOTES ET ÉNONCÉS DE PROBLÈMES,

PAR M. DE SAINT-GERMAIN,
Professeur à la Faculté des Sciences de Caen.

TOME PREMIER.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1883

TABLE DES MATIÈRES.

STATIQUE.

PREMIÈRE PARTIE.

PREMIÈRE LEÇON.

DEUXIÈME LEÇON.

TROISIÈME LEÇON.

QUATRIÈME LEÇON.

CINQUIÈME LEÇON.

SIXIÈME LEÇON.

SEPTIÈME LEÇON.

HUITIÈME LEÇON.

NEUVIÈME LEÇON.

DIXIÈME LEÇON.

ONZIÈME LEÇON.

DYNAMIQUE.

PREMIÈRE PARTIE.

DOUZIÈME LEÇON.

TREIZIÈME LEÇON.

QUATORZIÈME LEÇON.

QUINZIÈME LEÇON.

SEIZIÈME LEÇON.

DIX-SEPTIÈME LEÇON.

DIX-HUITIÈME LEÇON.

DIX-NEUVIÈME LEÇON.

VINGTIÈME LEÇON.

VINGT ET UNIÈME LEÇON.

VINGT-DEUXIÈME LEÇON.

VINGT-TROISIÈME LEÇON.

VINGT-QUATRIÈME LEÇON.

VINGT-CINQUIÈME LEÇON.

VINGT-SIXIÈME LEÇON.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME PREMIER.

PRÉFACE.

Le Cours de Mécanique, professé par Sturm à la Sorbonne et à l'École Polytechnique, a été publié par E. Prouhet d'après les Notes trouvées dans les papiers de Sturm et les feuilles lithographiées distribuées aux élèves de l'École. La clarté et la simplicité de ce Cours lui ont valu un constant et légitime succès auprès des personnes qui abordent l'étude de la Mécanique rationnelle, et l'on n'y peut regretter que l'absence de certaines questions qui sont maintenant entrées dans l'enseignement et viennent d'être introduites dans le programme de la Licence ès Sciences mathématiques. Aussi M. Gauthier-Villars a-t-il voulu que cette nouvelle édition fût conforme aux précédentes; mais en même temps il m'a confié le soin de la compléter. La rédaction d'une seule Leçon, la cinquantième, a été changée, parce qu'il était facile, sans nuire à sa liaison avec le reste du texte, d'y donner les propriétés générales du mouvement des solides invariables considéré au point de vue de la Cinématique, avec des applications à quelques mécanismes.

Les éditions précédentes contenaient trois Notes : les deux premières, rédigées l'une par E. Prouhet, l'autre par M. Puiseux, ont été conservées; la troisième, rendue inutile par les modifications apportées à la cinquantième Leçon, a été remplacée par l'exposé de la théorie générale des mouvements relatifs. Une quatrième Note renferme les additions les plus importantes : j'y donne une méthode très-simple pour obtenir les équations de Lagrange, et je montre par plusieurs exemples avec quelle facilité ces équations permettent de résoudre la plupart des problèmes de Dynamique; puis j'établis les équations canoniques et le théorème de Jacobi qui permet souvent d'en obtenir les intégrales générales. Cette nouvelle édition contient ainsi toutes les matières de la Licence, sauf quelques questions de Mécanique appliquée qui ne se seraient rattachées que de loin aux Leçons de Sturm. Enfin, comme on ne saurait bien posséder les théories de la Mécanique rationnelle sans en avoir fait des applications, nous avons donné les énoncés de près de trois cents problèmes empruntés au Recueil du P. Jullien et à celui que j'ai publié moi-même : les lecteurs studieux y trouveront un nombre suffisant d'exercices sur les différentes parties du Cours.

A. de Saint-Germain.

AVERTISSEMENT

DE LA PREMIÈRE ÉDITION.

Le *Cours de Mécanique* que nous publions est la reproduction des Leçons faites par M. Sturm à l'École Polytechnique et à la Sorbonne. Il est composé d'après les feuilles autographiées de l'École, améliorées à l'aide des notes et des cahiers de M. Sturm. L'ordre suivi dans l'exposition des matières est celui de l'ancien Programme. Peu de temps avant sa mort, M. Sturm s'est expliqué fort nettement sur les raisons qui le portaient à séparer la théorie de l'équilibre de celle du mouvement.

« Jusqu'à nos jours, disait-il, on a divisé la Mécanique en deux parties distinctes, la Statique et la Dynamique. La première emprunte à l'expérience la notion du point matériel et celle de la force, et avec ces deux seuls principes elle s'achève comme une science purement géométrique.

» La Dynamique se distingue de la Statique par l'introduction de plusieurs notions nouvelles, tout à fait

étrangères à la Statique, telles que le mouvement, la masse, le temps. Dans l'ordre naturel, où l'on passe du simple au composé, on doit donc commencer par la Statique. Mais nous avons changé tout cela, ou plutôt on a changé tout cela.

» Les conditions d'équilibre sont indépendantes des idées de temps et de mouvement.

» Il ne faut pas dire que le théorème des vitesses virtuelles est le principe de la Statique : il n'en est que le résumé. Le véritable principe est le théorème de la composition des forces. »

E. Prouhet.

COURS

DE

MÉCANIQUE.

STATIQUE.

PREMIÈRE PARTIE

PREMIÈRE LEÇON.

DES FORCES APPLIQUÉES A UN MÊME POINT.

Définitions. — Comparaison des forces. — Résultante de plusieurs forces. — Composition des forces dirigées suivant la même droite. — Règle du parallélogramme des forces. — Composition de plusieurs forces concourantes. — Relations entre une force et ses composantes suivant trois axes rectangulaires.

DÉFINITIONS. — FORCE. — ÉQUILIBRE.

1. On appelle *corps* ou *matière* tout ce qui affecte nos sens d'une manière quelconque.

Les corps sont composés de *points matériels* ou d'*atomes* de dimensions insensibles.

Un corps peut être en *repos* ou en *mouvement*. Nous ne pouvons observer que des mouvements relatifs : toutefois on conçoit le repos et le mouvement absolus.

2. On appelle *force* toute cause qui met un corps en mouvement ou qui tend à le mouvoir.

3. Quand un point ou un système de points liés entre eux, sollicité par un système de forces, se trouve dans le

même état de repos ou de mouvement que si ces forces n'existaient pas, on dit que ce point ou le système de ces points est en *équilibre*. On voit qu'il n'est pas nécessaire pour cela que le système soit en repos : toutefois c'est à ce dernier cas que cette définition s'attache le plus ordinairement.

COMPARAISON DES FORCES.

4. Trois choses sont à considérer dans une force : son *point d'application*, sa *direction* et son *intensité*.

5. On dit que deux forces sont *égales* quand, appliquées à un même point, suivant la même direction et en sens contraires, elles se font équilibre.

Si une force P' peut remplacer deux, trois, quatre, etc., forces égales à P, appliquées à un même point et dans le même sens, on dira que la force P' est égale à $2P$, à $3P$,.... De la notion d'une force multiple d'une autre, on s'élèvera à la notion de deux forces dans un rapport quelconque.

6. On démontre aisément, d'après les considérations précédentes, que *le point d'application d'une force peut être transporté en un point quelconque de sa direction, pourvu que ce dernier point soit lié au premier d'une manière invariable.*

RÉSULTANTE DE PLUSIEURS FORCES.

7. Quand une force unique peut faire équilibre à un nombre quelconque de forces appliquées à un système de points liés entre eux d'une manière invariable, on peut remplacer toutes ces forces par une seule force R égale et opposée à la première. La force R est dite la *résultante* des forces qu'elle remplace, qui en sont nommées les *composantes*.

8. Un système de forces ne peut pas toujours être remplacé par une seule force; mais quand cela a lieu, il

n'existe qu'une *résultante*. En effet, si le même système admettait deux résultantes R et R′, une force égale à R, appliquée suivant la même direction et en sens contraire, devrait faire équilibre à la force R′, ce qui est impossible si R′ n'a pas la même grandeur que R, la même direction et le même sens.

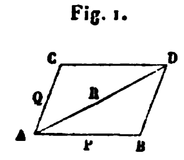
COMPOSITION DES FORCES DIRIGÉES SUIVANT LA MÊME DROITE.

9. *Si un certain nombre de forces sont appliquées suivant la même ligne droite, elles se composent en une seule, égale à l'excès de la somme de celles qui tirent dans un sens, sur la somme de celles qui tirent dans l'autre sens, et cette résultante agit dans le sens des forces qui composent la plus grande somme.* En d'autres termes, la *grandeur* et le *sens* de la résultante sont donnés par la somme *algébrique* des forces, en regardant comme *positives* celles qui tirent dans un sens, et comme *négatives* celles qui tirent dans le sens opposé.

RÈGLE DU PARALLÉLOGRAMME DES FORCES.

10. *Si deux forces* P *et* Q *sont représentées en grandeur et en direction par les deux côtés contigus* AB *et* AC *du parallélogramme* ABCD, *la résultante* R *de ces deux forces sera représentée en grandeur et en direction par la diagonale* AD *de ce parallélogramme,* en sorte que les composantes et la résultante peuvent être représentées par les trois côtés du triangle ABD.

Fig. 1.



Pour démontrer ce théorème, nous commencerons par faire voir que la résultante est dirigée suivant la diagonale AD, en nous appuyant sur le lemme suivant :

Soit un losange ABCD, de forme invariable : appliquons

aux points A et C quatre forces égales dirigées suivant les côtés AB, AD, CB, CD. On peut regarder comme évident que les forces égales appliquées en A donnent une résultante dirigée suivant la bissectrice AC de l'angle BAD, et que les forces appliquées en C donnent une résultante égale et directement opposée à la première. Le système reste donc en équilibre sous l'action des quatre forces.

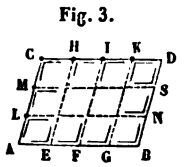
Fig. 2.

11. Cela posé, soit f une commune mesure aux forces P et Q, et admettons, pour fixer les idées, que l'on ait

$$P = 4f, \quad Q = 3f;$$

partageons AB en quatre parties égales et AC en trois parties égales entre elles et par conséquent égales aux premières. Menons EH, FI, GK parallèles à AC, et MS, LN parallèles à AB.

Fig. 3.



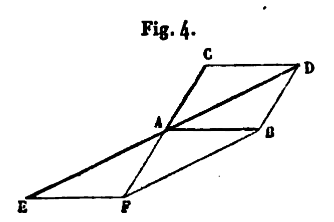
Nous ne troublerons pas l'état du système en appliquant aux sommets L et E, M et F, C et G, H et B, I et N, K et S des losanges LE, MF, CG, HB, IN, KS, et suivant les côtés de ces losanges, des forces égales à f. Mais les forces égales et contraires appliquées aux extrémités des droites HE, IF, KG, MS, LN se détruisent. Donc il ne reste que quatre forces égales à f dirigées suivant CD, et trois forces égales à f dirigées suivant BD. Les quatre premières se composent en une seule égale à P, que l'on peut supposer appliquée au point D, et de même les trois autres donnent une résultante égale à Q et appliquée au même point D.

Il résulte de là que le système des deux forces P et Q appliquées en A peut être remplacé par deux forces P et Q appliquées au point D. Donc la résultante passe par le point D; mais elle passe déjà par le point A : donc elle est dirigée suivant AD. C. Q. F. D.

Nous avons supposé que les forces P et Q étaient commensurables entre elles; si elles étaient incommensurables, en employant un mode de raisonnement bien connu, on ferait voir que dans ce cas la résultante est encore dirigée suivant la diagonale AD.

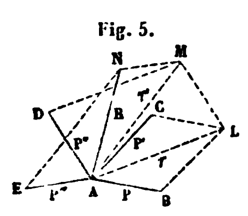
12. Après avoir trouvé la direction de la résultante, il reste à montrer que sa grandeur est représentée par la longueur de la diagonale AD.

Imaginons une force AE égale à la résultante inconnue et dirigée suivant le prolongement de la diagonale AD. Cette force fera équilibre aux forces P et Q. Par conséquent la résultante des forces P et AE sera dirigée dans le prolongement AF de la droite AC. Or, d'après le numéro précédent, cette direction doit être celle de la diagonale du parallélogramme AEFB. Donc les deux triangles AEF, DAC seront égaux comme ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux, savoir : EF = CD, puisque EF = AB = CD; les angles AFE et ACD égaux comme alternes-internes; les angles AEF et ADC égaux par la même raison. Donc AE = AD. Donc la diagonale représente bien l'intensité de la résultante.



COMPOSITION DE PLUSIEURS FORCES CONCOURANTES.

13. En partant du théorème (10), il est facile d'obtenir la résultante d'un nombre quelconque de forces appliquées en un même point. En effet, supposons qu'un certain nombre de forces P, P′, P″, P‴, appliquées au point A, soient représentées en grandeur et en direction par



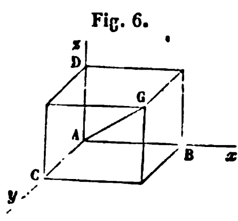
les droites AB, AC, AD, AE. Les deux forces P et P′ auront une résultante r représentée par la diagonale AL du parallélogramme ABLC. De même la diagonale AM du parallélogramme ALMD représentera la résultante r' des forces r et P″, ou la résultante des forces P, P′ et P″. Enfin, la diagonale AN représentera la résultante R de r' et de P‴, c'est-à-dire la résultante des forces P, P′, P″ et P⁗.

En réduisant la construction à sa partie essentielle, on voit que, *si l'on décrit un contour polygonal dont les côtés successifs soient parallèles à la direction des forces* P, P′, P″,..., *et proportionnels à leur intensité, la droite qui fermera le contour représentera en grandeur et en direction la résultante cherchée.*

14. Si le contour se ferme de lui-même, les forces P, P′, P″,..., se feront équilibre, et réciproquement.

15. Considérons en particulier le cas de trois forces X, Y, Z, représentées par les trois côtés contigus AB, AC, AD du parallélipipède ABCDG. Il résulte de la construction précédente que la résultante R de ces trois forces est représentée par la diagonale AG de ce parallélipipède.

Fig. 6.



16. *Réciproquement,* on peut toujours décomposer une force R, dirigée suivant AG, et appliquée au point A, en trois autres dirigées suivant trois droites quelconques Ax, Ay, Az partant du point A et non situées dans un même plan; car, si l'on mène par le point G trois plans parallèles aux plans xy, xz, yz, on formera un parallélipipède, et AG = R sera la résultante des trois forces X, Y, Z, représentées par les arêtes AB, AC, AD.

RELATIONS ENTRE UNE FORCE ET SES COMPOSANTES SUIVANT TROIS AXES RECTANGULAIRES.

17. Dans le cas où les composantes sont perpendiculaires entre elles, les lignes AB, AC, AD sont les projections orthogonales de AG sur les trois axes Ax, Ay, Az; donc si l'on désigne par a, b, c les angles que la résultante fait avec les axes, on aura

$$(1)\qquad X = R\cos a,\quad Y = R\cos b,\quad Z = R\cos c.$$

Ces relations font connaître immédiatement les composantes X, Y, Z, quand R, a, b, c sont connus. Si, au contraire, les forces X, Y, Z sont données, on pourra en déduire R, a, b, c. En effet, en élevant au carré les équations (1) et les ajoutant, on aura

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,$$

à cause de

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1.$$

Il en résulte

$$(2)\qquad R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

et, par suite,

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \cos a &= \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},\\ \cos b &= \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},\\ \cos c &= \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}. \end{aligned}\right.$$

18. Les formules (1) sont générales, pourvu que, regardant comme *positives* les forces qui tirent le point A dans le sens des coordonnées positives, et par suite comme *négatives* celles qui tirent dans le sens contraire, on prenne pour a, b, c les angles que fait la direction de la résultante avec les parties positives des axes Ax, Ay, Az.

Pour s'en convaincre, il suffit d'examiner, par exemple, le cas où X et Y étant positives, Z serait négative. On voit, en construisant le parallélipipède ABCD, que la résultante R fait avec Ax et Ay des angles aigus et avec Az un angle obtus; on a donc

Fig. 7.

$$\cos a > 0, \quad \cos b > 0, \quad \cos c < 0,$$

et il vient

$$X = R\cos a, \quad Y = R\cos b,$$

et

$$-Z = R\cos(\pi - c).$$

Mais cette dernière égalité revient à

$$Z = R\cos c.$$

Ainsi les formules (1) sont encore applicables dans ce cas.

DEUXIÈME LEÇON.

SUITE DE LA COMPOSITION DES FORCES CONCOURANTES.

Calcul de la résultante d'un nombre quelconque de forces appliquées en un même point. — Conditions d'équilibre de plusieurs forces concourantes. — Équilibre d'un point assujetti à demeurer sur une surface, — sur une courbe.

CALCUL DE LA RÉSULTANTE D'UN NOMBRE QUELCONQUE DE FORCES APPLIQUÉES EN UN MÊME POINT.

19. On ramène au cas de trois forces rectangulaires la composition d'un nombre quelconque de forces appliquées en un même point A.

En effet, menons par ce point trois axes rectangulaires quelconques Ax, Ay, Az. Soient $\alpha, \beta, \gamma; \alpha', \beta', \gamma', \ldots,$ les angles que les directions des forces $P, P', P'', \ldots$ font avec les axes Ax, Ay, Az.

Si l'on décompose la force P en trois autres dirigées suivant les axes, ces composantes seront représentées, quant à la grandeur et au signe, par

$$P\cos\alpha, \quad P\cos\beta, \quad P\cos\gamma.$$

Des expressions analogues représenteront les composantes des forces $P', P'', \ldots$. En désignant par X, Y, Z les résultantes des forces dirigées suivant les axes, on aura

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} X &= P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + \ldots, \\ Y &= P\cos\beta + P'\cos\beta' + P''\cos\beta'' + \ldots, \\ Z &= P\cos\gamma + P'\cos\gamma' + P''\cos\gamma'' + \ldots. \end{aligned}\right.$$

La question est donc ramenée à la composition de trois forces appliquées à angle droit en un même point. En appelant R la grandeur de la résultante, et a, b, c les

angles qu'elle fait avec les axes, on aura (17)

$$(2)\quad \begin{cases} R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \\ \cos a = \frac{X}{R}, \quad \cos b = \frac{Y}{R}, \quad \cos c = \frac{Z}{R}. \end{cases}$$

20. L'intensité de la résultante ne dépend pas du choix des axes ou des angles $\alpha, \beta, \gamma; \alpha', \beta', \gamma', \ldots$: il doit donc être possible de l'exprimer indépendamment de ces quantités.

En effet, élevons au carré les équations (1) et ajoutons-les. En observant que l'on a

$$\begin{gathered} X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2, \\ \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \\ \cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' = 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{gathered}$$

il viendra

$$\begin{aligned} R^2 = & P^2 + P'^2 + P''^2 + \ldots \\ & + 2PP'(\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma') + \ldots. \end{aligned}$$

Mais si l'on désigne par (P, P') l'angle que font entre elles les directions des forces P et P', on a

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = \cos(P, P').$$

Par conséquent, on a

$$(3)\quad \begin{cases} R^2 = P^2 + P'^2 + P''^2 + \ldots \\ \qquad + 2PP'\cos(P, P') + 2PP''\cos(P, P'') + \ldots, \end{cases}$$

formule où la grandeur de la résultante est exprimée en fonction des intensités des forces et des angles qu'elles font entre elles.

Si l'on considère R, P, P',... comme les côtés d'un polygone, cette équation donnera la valeur d'un côté en fonction des autres côtés et des angles que ces côtés font entre eux. Il en résulte ce théorème : *Le carré d'un côté d'un polygone est égal à la somme des carrés des autres côtés, plus deux fois la somme des produits de ces der-*

niers côtés pris deux à deux et multipliés par le cosinus de l'angle qu'ils forment.

21. Au lieu de décomposer, comme nous venons de le faire, la force P en trois forces dirigées suivant les trois axes Ax, Ay, Az, on peut la décomposer en deux forces agissant, l'une suivant Ax, et l'autre dans un plan zAy perpendiculaire à Ax. La composante suivant Ax est représentée en grandeur et en signe par $P\cos\alpha$. On dit alors que $P\cos\alpha$ représente la force P *estimée suivant la direction* Ax. Sous ce point de vue, les équations (1) donnent lieu au théorème suivant :

La résultante de plusieurs forces, estimée suivant un axe quelconque, est égale à la somme de ces forces estimées suivant le même axe.

CONDITIONS D'ÉQUILIBRE DE PLUSIEURS FORCES CONCOURANTES.

22. Pour que plusieurs forces appliquées à un même point se fassent équilibre, il faut que leur résultante soit nulle. Or, en conservant les mêmes notations que dans la question précédente, on a

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

On devra donc avoir

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0,$$

c'est-à-dire

$$(1) \quad \begin{cases} P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + \ldots = 0, \\ P\cos\beta + P'\cos\beta' + P''\cos\beta'' + \ldots = 0, \\ P\cos\gamma + P'\cos\gamma' + P''\cos\gamma'' + \ldots = 0, \end{cases}$$

et réciproquement, *si ces conditions sont remplies, il y aura équilibre,* puisque la résultante sera nulle.

23. Il est aisé de vérifier que, si ces conditions sont remplies, l'une quelconque des forces sera égale et opposée à la résultante de toutes les autres.

En effet, désignons par R′ la résultante des forces P′, P″, P‴,..., et par a', b', c' les angles que cette résultante fait avec les axes; nous aurons

$$(2)\qquad \begin{cases} R'\cos a' = P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + \ldots, \\ R'\cos b' = P'\cos\beta' + P''\cos\beta'' + \ldots, \\ R'\cos c' = P'\cos\gamma' + P''\cos\gamma'' + \ldots. \end{cases}$$

La comparaison de ces équations et des équations (1) donne

$$(3)\qquad \begin{cases} P\cos\alpha = -R'\cos a', \\ P\cos\beta = -R'\cos b', \\ P\cos\gamma = -R'\cos c'; \end{cases}$$

d'où l'on tire, en élevant au carré et ajoutant membre à membre,

$$P^2 = R'^2 \quad \text{ou} \quad P = R',$$

et, par suite,

$$\cos\alpha = -\cos a', \quad \cos\beta = -\cos b', \quad \cos\gamma = -\cos c',$$

ou bien

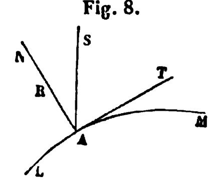
$$\alpha = \pi - a', \quad \beta = \pi - b', \quad \gamma = \pi - c':$$

d'où l'on conclut que la force P est bien égale et directement opposée à la résultante R′ des forces P′, P″, P‴,....

ÉQUILIBRE D'UN POINT ASSUJETTI A SE MOUVOIR SUR UNE SURFACE.

24. Nous avons supposé jusqu'à présent que le point A, à part l'action des forces P, P′, P″,..., était parfaitement libre dans l'espace. Les conditions d'équilibre ne seraient plus les mêmes si le point était assujetti à demeurer sur une surface ou sur une courbe donnée.

Fig. 8.



Dans le premier cas, si le point A est sollicité par une force R normale à la surface considérée, il devra être en repos. Car il ne pourrait commencer à s'éloigner de sa position que sui-

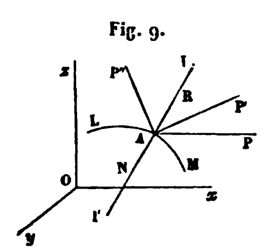
vant la direction d'une des tangentes à la surface au point A, et comme toutes les tangentes font un angle droit avec la direction AN de la force, il n'y a pas de raison pour que le mouvement naisse dans un sens plutôt que dans un autre; donc le point A restera en repos.

Au contraire, si le point A est sollicité par une force S, dont la direction ne soit pas normale à la surface, il ne restera pas en équilibre. En effet, on peut décomposer la force S en deux autres, l'une dirigée suivant la normale AN à la surface, l'autre suivant l'une des tangentes AT à cette surface, savoir celle qui est à l'intersection du plan tangent et du plan SAN. La première force ne fera que presser le point sur la surface; mais la seconde aura tout son effet, et dès lors le point A glissera sur la surface.

Ainsi, *la condition nécessaire et suffisante pour qu'un point* A, *placé sur une surface et sollicité par des forces quelconques* P, P′, P″,..., *reste en équilibre, est que ces forces aient une résultante* R *normale à la surface.*

25. Pour exprimer cette condition par l'analyse, prenons trois axes rectangulaires quelconques Ox, Oy, Oz. Appelons α, β, γ; α', β', γ';..., les angles que font les forces P, P′, P″,... avec les axes. Il y aura équilibre si nous introduisons une force N égale et directement opposée à R. Donc si λ, μ, ν désignent les angles que la force N (dirigée suivant AI ou AI′) fait avec les axes, nous aurons

Fig. 9.



$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &N\cos\lambda + P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + \ldots = 0,\\ &N\cos\mu + P\cos\beta + P'\cos\beta' + \ldots = 0,\\ &N\cos\nu + P\cos\gamma + P'\cos\gamma' + \ldots = 0. \end{aligned}\right.$$

Ces trois équations peuvent être mises sous une forme

plus simple. En effet, soit

$$(2) \qquad f(x, y, z) = 0$$

l'équation de la surface; on aura

$$(3) \qquad \cos\lambda = \pm \frac{\frac{df}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2}}.$$

Il faut laisser le double signe, parce que la force inconnue N peut tirer de A vers I ou de A vers I'. Si l'on pose, pour abréger,

$$V = \pm \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2}},$$

on a

$$(4) \qquad \cos\lambda = V\frac{df}{dx}, \quad \cos\mu = V\frac{df}{dy}, \quad \cos\nu = V\frac{df}{dz}.$$

De plus, si X, Y, Z désignent les sommes algébriques des forces P, P', P'',..., estimées suivant les axes Ox, Oy, Oz, on a

$$X = P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + \ldots,$$
$$Y = P\cos\beta + P'\cos\beta' + \ldots,$$
$$Z = P\cos\gamma + P'\cos\gamma' + \ldots.$$

Les équations (1) deviennent donc

$$(5) \qquad \begin{cases} NV\frac{df}{dx} + X = 0, \\ NV\frac{df}{dy} + Y = 0, \\ NV\frac{df}{dz} + Z = 0. \end{cases}$$

Comme N est une inconnue auxiliaire, on trouvera les conditions d'équilibre cherchées en éliminant N ou NV entre ces équations, ce qui donne

$$(6) \qquad \frac{X}{\frac{df}{dx}} = \frac{Y}{\frac{df}{dy}} = \frac{Z}{\frac{df}{dz}}.$$

On énonce ce résultat en disant que *les sommes des forces estimées suivant trois axes doivent être proportionnelles respectivement aux dérivées partielles du premier membre de l'équation de la surface, rapportées au point d'application.*

26. Si les équations (6) sont vérifiées, il y aura équilibre, et il sera facile de connaître le sens suivant lequel agit la résultante des forces P, P', P'',..., car on a

$$-\mathrm{NV} = \frac{\mathrm{X}}{\frac{df}{dx}} = \frac{\mathrm{Y}}{\frac{df}{dy}} = \frac{\mathrm{Z}}{\frac{df}{dz}};$$

ce qui montre que V est de signe contraire à l'un quelconque de ces quotients. Quant à N, qui est la pression exercée sur la surface par les forces données, elle sera représentée par l'un des trois quotients

$$-\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{V}\frac{df}{dx}},\quad -\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{V}\frac{df}{dy}},\quad -\frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{V}\frac{df}{dz}}.$$

27. Les deux équations de condition, trouvées plus haut, auraient pu être établies plus rapidement, en observant que les cosinus des angles que fait la résultante des forces P, P', P'',... avec les axes sont proportionnels à

$$\mathrm{X},\quad \mathrm{Y},\quad \mathrm{Z},$$

et que les cosinus des angles que fait la normale AN avec les mêmes axes sont proportionnels à

$$\frac{df}{dx},\quad \frac{df}{dy},\quad \frac{df}{dz}.$$

On exprimera que ces deux directions coïncident, en écrivant que leurs cosinus sont proportionnels, c'est-à-dire que

$$\frac{\mathrm{X}}{\frac{df}{dx}} = \frac{\mathrm{Y}}{\frac{df}{dy}} = \frac{\mathrm{Z}}{\frac{df}{dz}}.$$

28. Si, donnant seulement les directions et les intensités des forces P, P′, P″,..., on ne fixait pas la position du point A sur la surface, il faudrait joindre, aux deux équations d'équilibre, l'équation de la surface

$$f(x, y, z) = 0,$$

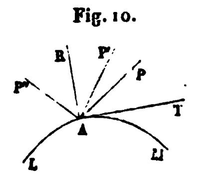
ce qui déterminerait complétement les coordonnées du point A.

ÉQUILIBRE D'UN POINT ASSUJETTI A DEMEURER SUR UNE COURBE

29. Supposons maintenant que le point d'application des forces P, P′, P″,... soit assujetti à demeurer sur une courbe fixe LM.

On fera voir, comme dans le cas précédent, que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équilibre ait lieu, est que la résultante R de toutes ces forces soit perpendiculaire à la tangente AT à la courbe, c'est-à-dire située dans le plan normal mené par le point A. Or, en appelant a, b, c les angles que la résultante fait avec les axes, on a

Fig. 10.



$$(1) \qquad \cos a = \frac{X}{R}, \quad \cos b = \frac{Y}{R}, \quad \cos c = \frac{Z}{R}$$

D'ailleurs, x, y, z étant les coordonnées du point A, et ds la différentielle de l'arc de courbe, la tangente AT fait avec les axes des angles dont les cosinus sont

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds};$$

donc

$$\cos \mathrm{RAT} = \frac{X}{R}\frac{dx}{ds} + \frac{Y}{R}\frac{dy}{ds} + \frac{Z}{R}\frac{dz}{ds};$$

donc, comme l'angle RAT est droit, on aura

$$\cos \mathrm{RAT} = 0$$

ou

$$\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz = 0; \tag{2}$$

c'est la seule condition d'équilibre dans le cas actuel.

Si le point A n'était pas donné d'avance, on aurait pour le déterminer l'équation (2) et les équations de la courbe.

30. Quand le point A est donné, on peut choisir la tangente AT pour l'un des axes, l'axe des x par exemple, et alors, en décomposant chaque force en deux autres, l'une dirigée suivant la tangente AT, et l'autre située dans le plan normal, on voit que la seule condition d'équilibre sera

$$\mathrm{X} = 0, \tag{3}$$

puisque les forces normales à la courbe ne peuvent produire aucun effet. C'est ce que donne encore l'équation générale, car dans ce cas on a

$$\frac{dy}{ds} = 0, \quad \frac{dz}{ds} = 0,$$

et l'équation (2) se réduit à

$$\mathrm{X} = 0.$$

TROISIÈME LEÇON.

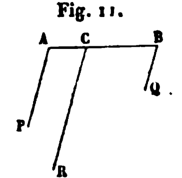
COMPOSITION ET ÉQUILIBRE DES FORCES PARALLÈLES.

Composition de deux forces parallèles. — Couple. — Composition d'un nombre quelconque de forces parallèles. — Centre des forces parallèles. — Théorème des moments. — Calcul des coordonnées du centre des forces parallèles. — Équilibre des forces parallèles.

COMPOSITION DE DEUX FORCES PARALLÈLES. — COUPLE.

31. On sait que, si deux forces P et Q, parallèles et dirigées dans le même sens, sont appliquées respectivement à deux points A et B liés invariablement entre eux, elles ont une résultante R égale à leur *somme* P + Q, dirigée dans le même sens et appliquée en un point C de AB tel, que l'on ait

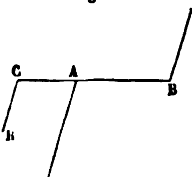
Fig. 11.



$$\frac{P}{BC} = \frac{Q}{CA} = \frac{R}{AB}.$$

Quand les deux forces agissent en sens contraires, la résultante R est égale à *leur différence* P — Q si l'on a $P > Q$, tire dans le même sens que la force P, et sa direction rencontre le prolongement de AB en un point C, situé du côté du point A et tel, que l'on ait encore

Fig. 12.



$$\frac{P}{BC} = \frac{Q}{CA} = \frac{R}{AB}.$$

Ainsi, dans tous les cas, *deux forces parallèles et leur résultante,* ou, ce qui revient au même, *trois forces*

parallèles qui se font équilibre sont proportionnelles chacune à la distance des points d'application des deux autres.

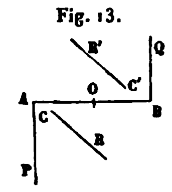
32. Dans le cas de deux forces de sens contraires, on aura

$$R = P - Q, \quad BC = \frac{P.AB}{P - Q}.$$

Si $Q = P$, on a $R = 0$ et $BC = \infty$. Ainsi, *le système de deux forces parallèles, égales et de sens contraires, qui n'agissent pas suivant la même droite, n'a pas de résultante.* Un pareil système se nomme un *couple.*

33. On peut démontrer directement qu'un couple n'a pas de résultante. En effet, supposons que le couple (P, Q) ait une résultante R. En faisant pivoter le couple en même temps que la force R autour du milieu O du bras du levier AB, on amène la force P à prendre la place de Q et *vice versâ*; R aura pris la position R'. Mais dans cette nouvelle position on aura le même couple qu'auparavant. Il en résulte que ce couple aurait deux résultantes différentes R et R', ce qui est impossible (8). Donc un couple ne peut pas être remplacé par une force unique.

Fig. 13.



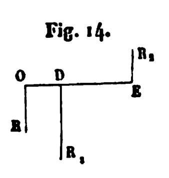
COMPOSITION D'UN NOMBRE QUELCONQUE DE FORCES PARALLÈLES.

34. Soient P, P', P'',... plusieurs forces parallèles appliquées à des points A, A', A'',... liés entre eux d'une manière fixe et invariable, et supposons d'abord que toutes ces forces tirent dans le même sens. Le point d'application G de leur résultante s'obtiendra en composant les deux premières forces, puis la résultante des deux premières avec la troisième, et ainsi de suite. La résultante

des forces P, P′, P″,... sera évidemment parallèle à ces forces et égale à leur somme.

Admettons, en second lieu, qu'un certain nombre de forces P, P′, P″, par exemple, agissent dans un sens, et les autres P‴, P^{iv} dans le sens contraire. On composera d'abord les forces P, P′, P″ en une seule $R_1 = P + P' + P''$, appliquée au point D; puis les forces P‴ et P^{iv} en une seule $R_2 = P''' + P^{iv}$, appliquée au point E et parallèle à R_1. Alors, si la force R_1, par exemple, est plus grande que R_2, la résultante totale sera une force

Fig. 14.



$$R = R_1 - R_2 = P + P' + P'' - P''' - P^{iv},$$

appliquée en un point O déterminé par la proportion

$$\frac{OD}{OE} = \frac{R_2}{R_1}.$$

35. Si l'on avait $R_2 = R_1$ et si le point E n'était pas sur la direction de R_1, le système des forces proposées se réduirait à un couple.

CENTRE DES FORCES PARALLÈLES.

36. Le point d'application de la résultante d'un système de forces parallèles ne dépend que des rapports de grandeur qu'ont ces forces entre elles et de la figure formée par leurs points d'application, d'où résulte ce théorème : *Si l'on change simultanément les directions et les intensités de toutes les forces, de manière que, passant toujours par les mêmes points d'application, elles conservent les mêmes rapports de grandeur et leur parallélisme, la résultante de toutes ces forces passera toujours par le même point.*

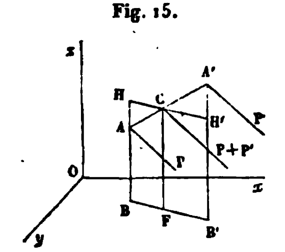
Ce point est appelé le *centre des forces parallèles.*

THÉORÈME DES MOMENTS.

37. Occupons-nous maintenant de déterminer par le calcul la position du centre des forces parallèles.

Considérons en premier lieu deux forces P et P′ tirant dans le même sens. Soient A et A′ leurs points d'application, et C celui de leur résultante P + P′. Prenons trois axes rectangulaires, et soient

Fig. 15.



$$AB = z,\quad A'B' = z',\quad CF = z_1.$$

Menons HCH′ parallèle à BB′. Les deux triangles CAH, CA′H′ donnent

$$(1)\qquad \frac{AH}{A'H'} = \frac{CA}{CA'}$$

ou

$$\frac{z_1 - z}{z' - z_1} = \frac{P'}{P};$$

d'où l'on tire

$$(2)\qquad (P + P')z_1 = Pz + P'z'.$$

L'expression Pz, ou le produit de la force P multipliée par la distance de son point d'application au plan xOy, comptée sur une direction parallèle à Oz, est ce qu'on appelle le *moment* de la force P *par rapport à ce plan et à cette direction*. Le plus ordinairement cette direction est perpendiculaire au plan xOy : dans tous les cas, l'équation (2) montre que *le moment de la résultante de deux forces parallèles par rapport à un plan est égal à la somme des moments de ces forces par rapport à ce plan.*

38. De là on conclut aisément que si l'on a un nombre quelconque de forces P, P′, P″,... parallèles et de même sens, appliquées en des points A, A′, A″,... situés d'un

même côté du plan xOy, on aura

(3) $$Rz_1 = Pz + P'z' + P''z'' + \ldots,$$

R étant la résultante et z_1, z, z', z'',... les distances au plan xOy, comptées parallèlement à l'axe des z, des points d'application des forces.

39. Considérons maintenant le cas de deux forces P et P' parallèles et de sens contraires. Soient A, A' et C les points d'application des deux forces et de leur résultante. Posons

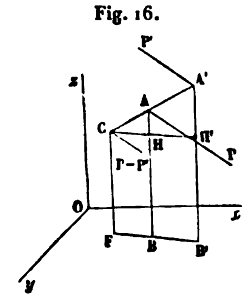


Fig. 16.

$$AB = z, \quad A'B' = z', \quad CF = z_1.$$

Menons CHH' parallèle à BB', nous aurons

(1) $$\frac{AH}{A'H'} = \frac{CA}{CA'}$$

ou

$$\frac{z - z_1}{z' - z_1} = \frac{P'}{P}.$$

On déduit de là

(2) $$z_1(P - P') = Pz - P'z'.$$

Par conséquent, *le moment de la résultante de deux forces qui agissent en sens contraires est égal à la différence des moments de ces forces.*

40. Enfin, considérons plusieurs forces, dont les unes, P, P', P'', tirent dans un sens, et les autres, P''', P^{iv}, tirent dans le sens opposé.

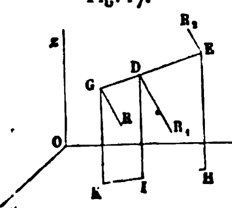


Fig. 17.

La composition des forces P, P', P'' donnera une résultante

$$R_1 = P + P' + P''$$

appliquée au point D, et l'on

aura

(1) $$R_1 . DI = Pz + P'z' + P''z''.$$

La composition des forces P''' et P^{IV} donnera une résultante

$$R_2 = P''' + P^{IV}$$

appliquée en E, et l'on aura

(2) $$R_2 . EH = P'''z''' + P^{IV}z^{IV}.$$

Donc, si R est la résultante de toutes les forces, G son point d'application, et si l'on pose $GK = z_1$, on aura, en supposant $R_1 > R_2$,

$$R = R_1 - R_2,$$
$$Rz_1 = R_1 . DI = R_2 . EH,$$

ou bien

(3) $$\left\{ \begin{array}{l} R = P + P' + P'' - P''' - P^{IV}, \\ Rz_1 = Pz + P'z' + P''z'' - P'''z''' - P^{IV}z^{IV}. \end{array} \right.$$

41. On voit que ces deux équations rentrent dans les suivantes :

(4) $$\left\{ \begin{array}{l} R = P + P' + P'' + P''' + P^{IV}, \\ Rz_1 = Pz + P'z' + P''z'' + P'''z''' + P^{IV}z^{IV}, \end{array} \right.$$

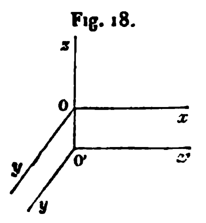
pourvu que, regardant comme *positives* les forces qui agissent dans un sens, on regarde comme *négatives* celles qui agissent dans le sens contraire. A l'aide de cette convention, on peut dire, en général, que *le moment de la résultante de plusieurs forces parallèles par rapport à un plan est égal à la somme algébrique des moments de ces forces.*

42. Nous avons supposé jusqu'à présent que les points d'application des forces étaient situés du même côté du plan xOy; mais cette restriction n'est pas nécessaire, et le théorème des moments a toujours lieu en regardant les

quantités désignées par z, z', z'',..., z_1 comme positives pour des points situés d'un certain côté du plan, et comme négatives pour des points situés du côté opposé.

En effet, les points A, A', A'',..., auxquels sont appliquées les forces considérées, étant situés d'une manière quelconque, menons le plan $x'O'y'$ parallèle à xOy et à une distance $OO' = h$ assez grande pour que tous les points A, A', A'',... soient au-dessus du plan $x'O'y'$. Alors si $Z, Z', Z'', \ldots, Z_1$ désignent les distances, comptées parallèlement à Oz, des points d'application, au plan $x'Oy'$, on aura

Fig. 18.



$$RZ_1 = PZ + P'Z' + P''Z'' + \ldots;$$

mais, à cause de $R = P + P' + P'' + \ldots$, on a

$$Rh = Ph + P'h + P''h + \ldots;$$

donc, en retranchant membre à membre,

$$R(Z_1 - h) = P(Z - h) + P'(Z' - h) + P''(Z'' - h) + \ldots.$$

Mais on sait qu'en ayant égard aux signes des coordonnées, on a toujours

$$Z - h = z, \quad Z' - h = z', \ldots, \quad Z_1 - h = z_1;$$

donc on aura, dans tous les cas,

$$Rz_1 = Pz + P'z' + P''z'' + \ldots.$$

CALCUL DES COORDONNÉES DU CENTRE DE PLUSIEURS FORCES PARALLÈLES.

43. Si l'on applique le théorème des moments à trois plans coordonnés, on aura, pour déterminer la grandeur de la résultante R d'un système de forces parallèles, et

les coordonnées x_1, y_1, z_1 de son point d'application, les quatre équations

$$(1) \qquad R = P + P' + P'' + \ldots,$$

$$(2) \qquad \begin{cases} R x_1 = P x + P' x' + P'' x'' + \ldots, \\ R y_1 = P y + P' y' + P'' y'' + \ldots, \\ R z_1 = P z + P' z' + P'' z'' + \ldots. \end{cases}$$

Quand les coordonnées sont obliques, on peut remplacer les x, y, z par les perpendiculaires abaissées des divers points sur les plans yOz, xOz, xOy ; car cela revient à multiplier chacune des équations (2) par le sinus de l'angle que fait l'axe correspondant avec le plan des deux autres axes.

44. Si le plan xOy était mené par le centre des forces parallèles, on aurait $z_1 = 0$, et par suite $R z_1$, ou

$$(3) \qquad P z + P' z' + P'' z'' + \ldots = 0.$$

Donc *la somme algébrique des moments d'un système de forces parallèles, par rapport à tout plan qui passe par le centre de ces forces, est nulle*. Et réciproquement, *si la somme algébrique des moments d'un système de forces parallèles, par rapport à un plan, est nulle, ce plan contient le centre de ces forces,* car de

$$P z + P' z' + P'' z'' + \ldots = 0$$

on déduit $R z_1 = 0$, et, par suite, $z_1 = 0$.

45. Si le système des forces proposées se réduisait à un couple, on aurait $R = 0$ et

$$x_1 = \infty, \quad y_1 = \infty, \quad z_1 = \infty.$$

Ainsi, dans ce cas, il n'y a pas de résultante, comme on le sait déjà.

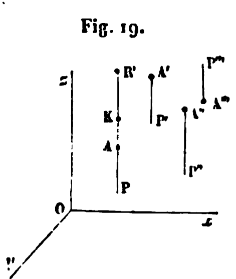
46. On peut encore déduire des formules ce fait, d'ailleurs évident par la construction géométrique, que si tous les points d'application sont dans un même plan, le cen-

tre des forces sera dans ce plan. En effet, si l'on prend ce plan pour plan des xy, on aura $z = 0$, $z' = 0, \ldots$, et la troisième des formules (2) donnera $z_1 = 0$. On verra de même que si tous les points A, A', A'',... sont sur une ligne droite, le centre des forces parallèles sera sur cette ligne.

ÉQUILIBRE DES FORCES PARALLÈLES.

47. La condition nécessaire et suffisante pour que plusieurs forces parallèles P, P', P'',... se fassent équilibre, est que l'une d'elles, P par exemple, soit égale et directement opposée à la résultante R' de toutes les autres. Pour exprimer cette condition par l'analyse, prenons trois axes, dont l'un OZ soit parallèle à la direction des forces.

Fig. 19.



La force P et la force R' se faisant équilibre, on doit avoir

$$R' = -P \quad \text{ou} \quad P + R' = 0;$$

mais

$$R' = P' + P'' + \ldots.$$

Donc une première condition d'équilibre est que l'on ait

$$(1) \qquad P + P' + P'' + \ldots = 0.$$

Il faut, en outre, que les directions des forces P et R' coïncident, par conséquent que l'x et l'y de leurs points d'application soient les mêmes. Or, si α et β sont les coordonnées du point K, où est appliquée la force R', on doit avoir (43)

$$R'\alpha = P'x' + P''x'' + \ldots,$$
$$R'\beta = P'y' + P''y'' + \ldots.$$

Mais puisque $\alpha = x$, $\beta = y$, $R' = -P$, il en résulte

ces deux nouvelles équations d'équilibre

$$(2) \qquad Px + P'x' + P''x'' + \ldots = 0,$$
$$(3) \qquad Py + P'y' + P''y'' + \ldots = 0.$$

48. Réciproquement, si les conditions (1), (2) et (3) sont remplies, la force P sera égale et directement opposée à la résultante R' des autres forces, et il y aura équilibre.

49. Ainsi les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il y ait équilibre sont données par les trois équations

$$(4) \qquad \begin{cases} P + P' + P'' + \ldots = 0, \\ Px + P'x' + P''x'' + \ldots = 0, \\ Py + P'y' + P''y'' + \ldots = 0. \end{cases}$$

On les énonce ordinairement en disant que *la somme algébrique des forces doit être nulle,* et que *la somme algébrique des moments des forces, par rapport à deux plans parallèles à leur direction, doit être nulle pour chacun de ces deux plans.*

50. Quand le système renferme un point fixe O, les forces proposées ne peuvent pas, dans le cas de l'équilibre, se réduire à un couple. En effet, si l'équilibre existe, le point O éprouve une certaine pression, déterminée de grandeur, de direction et de sens. Par conséquent, si l'on remplaçait la fixité du point O par une force L égale et directement opposée à cette pression, il devrait y avoir encore équilibre; donc un couple et une force unique se détruiraient, ce qui est absurde.

Il résulte de là que, dans le cas d'un point fixe, les forces doivent avoir une résultante unique, dont la direction passe par le point fixe, sans quoi cette force et la force L ne pourraient se faire équilibre. Cette condition est d'ailleurs suffisante.

Or, si l'on prend le point fixe pour origine et l'axe

des z parallèle à la direction des forces, la résultante des forces devant être dirigée suivant cet axe, ses moments, par rapport aux plans zOx et zOy, devront être nuls, et par conséquent on aura

$$(5)\quad \begin{cases} Px + P'x' + P''x'' + \ldots = 0, \\ Py + P'y' + P''y'' + \ldots = 0. \end{cases}$$

Dans ce cas les conditions d'équilibre se réduisent à deux.

Si le point fixe était le centre des forces parallèles, ces conditions seraient remplies d'elles-mêmes. Par conséquent *l'équilibre existe dans un système de forces parallèles quand on fixe le centre de ces forces*, ce qui est d'ailleurs évident

QUATRIÈME LEÇON.

DU CENTRE DE GRAVITÉ.

Notions sur la pesanteur. — Poids. — Centre de gravité. — Poids spécifique. — Densité. — Centre de gravité d'un assemblage de poids. — Propriétés du centre de gravité. — Centre de gravité des lignes.

NOTIONS SUR LA PESANTEUR.

51. On appelle *pesanteur* ou *gravité* la force qui sollicite tous les corps vers la surface de la terre. Elle s'exerce sur chaque particule matérielle, suivant une direction perpendiculaire à la surface de la terre, ou plutôt à la surface des eaux tranquilles. Cette direction est appelée *verticale*.

Comme les corps que nous considérons ont toujours des dimensions très-petites relativement au rayon terrestre, il est permis de regarder les verticales menées des différents points d'un même corps comme parallèles entre elles.

L'intensité de la pesanteur varie avec la latitude et avec la hauteur du corps ; mais on peut, sans erreur appréciable, supposer cette intensité constante aux divers points d'un même corps.

POIDS. — CENTRE DE GRAVITÉ.

52. La force de la gravité ne s'exerce pas seulement sur les molécules situées à la surface d'un corps ; elle sollicite également toutes ses particules, puisqu'il faut le même effort pour soutenir un corps que pour soutenir les différentes parties dans lesquelles on le décompose.

Un corps pesant peut donc être considéré comme un assemblage de points matériels liés entre eux d'une ma-

nière invariable et sollicités par de petites forces parallèles, puisqu'elles agissent toutes dans la verticale, et de même sens. La résultante de toutes ces forces est appelée le *poids* du corps, et leur centre est dit le *centre de gravité* du corps.

53. La direction du poids du corps passera toujours par le centre de gravité, quelle que soit la position du corps, et le corps demeurera en équilibre, si l'on fixe le centre de gravité.

De là résulte un moyen de déterminer par l'expérience le centre de gravité d'un corps. Car si l'on suspend le corps à un point fixe, par un fil flexible, la direction de ce fil, quand l'équilibre est établi, doit passer par le centre de gravité. Donc, si l'on suspend le corps dans deux positions différentes, son centre de gravité sera déterminé par l'intersection des deux directions du fil.

POIDS SPÉCIFIQUE. — DENSITÉ.

54. Quand la matière d'un corps est *homogène*, des volumes égaux de ce corps ont des poids égaux; en d'autres termes, le poids est proportionnel au volume.

Si l'on compare entre eux deux corps homogènes, formés de substances différentes, les poids de chacun d'eux, sous le même volume, sont différents.

On appelle *pesanteur spécifique* d'un corps le poids de l'unité de volume de ce corps. Si ϖ désigne ce poids, P le poids du corps et v le volume, on aura donc

$$P = \varpi v.$$

On prend pour unité de poids le poids de 1 centimètre cube d'eau distillée, à son maximum de densité, c'est-à-dire à la température de $4^{\circ},1$. Le poids d'un corps varie avec le lieu où il est placé; mais, comme les poids de tous les corps varient dans le même rapport, le poids d'un corps quelconque exprimé en grammes est le même partout.

55. Quand un corps n'est pas homogène, on nomme *densité moyenne* le rapport du poids de ce corps à son volume. On appelle *densité, en un point* M *de ce corps*, la limite vers laquelle tend la densité moyenne d'un volume de matière tout autour du point M, quand ce volume tend vers zéro. La densité d'un corps non homogène est ordinairement une fonction continue des coordonnées de ses différents points.

CENTRE DE GRAVITÉ D'UN ASSEMBLAGE DE CORPS.

56. Quand on connaît les poids et les centres de gravité de plusieurs corps liés entre eux d'une manière invariable, on peut trouver le centre de gravité de leur ensemble, soit par la composition successive des poids de ces corps, soit par le théorème des moments.

Soient A (x, y, z), A' (x', y', z'), A'' (x'', y'', z''),... les centres de gravité de différents corps, dont les poids sont p, p', p'',.... Nommons P le poids total et x_1, y_1, z_1 les coordonnées du centre de gravité du système; on a (43)

$$(1) \qquad P = p + p' + p'' + \ldots,$$

$$(2) \qquad \begin{cases} Px_1 = px + p'x' + p''x'' + \ldots, \\ Py_1 = py + p'y' + p''y'' + \ldots, \\ Pz_1 = pz + p'z' + p''z'' + \ldots, \end{cases}$$

équations qui font connaître P, x_1, y_1 et z_1.

Quand les corps sont homogènes, on peut, dans les égalités précédentes, substituer les volumes aux poids correspondants.

57. Si l'un des plans coordonnés, par exemple le plan des xy, contient le centre de gravité, alors $z_1 = 0$, et l'on a

$$(3) \qquad pz + p'z' + p''z'' + \ldots = 0,$$

c'est-à-dire que *la somme des moments des poids, par rapport à tout plan passant par le centre de gravité du système, est égale à zéro.*

PROPRIÉTÉS DU CENTRE DE GRAVITÉ.

58. *Soient* A (x, y, z), A' (x', y', z'), A'' (x'', y'', z''),... *les centres de gravité de plusieurs corps dont les poids sont respectivement* p, p', p'',..., *et* O *le centre de gravité du système de ces poids; posons* OA $= r$, OA' $= r'$, OA'' $= r''$,...: *si l'on applique suivant* OA, OA', OA'',... *des forces* pr, $p'r'$, $p''r''$,..., *ces forces se feront équilibre.*

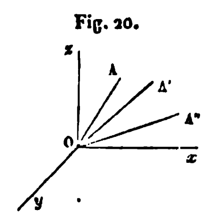


Fig. 20.

En effet, menons par le point O trois axes rectangulaires. Puisque le plan zOy passe par le centre de gravité, on aura (57)

$$(1) \qquad px + p'x' + p''x'' + \ldots = 0.$$

Or on a

$$x = r\cos\alpha, \quad x' = r'\cos\alpha', \quad x'' = r''\cos\alpha'', \ldots,$$

α, α', α'',... étant les angles que OA, OA', OA'',... font avec l'axe des x; donc

$$(2) \qquad pr\cos\alpha + p'r'\cos\alpha' + p''r''\cos\alpha'' + \ldots = 0.$$

Mais $pr\cos\alpha$, $p'r'\cos\alpha'$, $p''r''\cos\alpha''$,... sont les composantes des forces pr, $p'r'$,... estimées suivant l'axe Ox. Donc, comme la somme algébrique de ces composantes est nulle, quelle que soit la direction de cet axe, les forces pr, $p'r'$,..., appliquées suivant OA, OA',..., se font équilibre (22).

59. On conclut de là que, *si les poids appliqués en* A, A', A'',... *sont égaux, des forces appliquées au point* O *et représentées par les droites* OA, OA', OA'',... *se font équilibre.*

60. Réciproquement, *si des forces appliquées en un même point* O, *et représentées, en grandeur et en direc-*

tion, par OA $= r$, OA$' = r'$, OA$'' = r''$,..., *se font équilibre, des corps ayant tous des poids égaux à p, et leurs centres de gravité aux points* A, A$'$, A$''$,..., *formeront un système dont le centre de gravité sera au point* O.

En effet, puisque les forces se font équilibre, on a

(1) $$r\cos\alpha + r'\cos\alpha' + r''\cos\alpha'' + \ldots = 0;$$

par suite

(2) $$pr\cos\alpha + pr'\cos\alpha' + pr''\cos\alpha'' + \ldots = 0,$$

ou bien

$$px + px' + px'' + \ldots = 0.$$

Mais si P désigne le poids du système, et x_1, y_1, z_1 les coordonnées du centre de gravité, le premier membre de la dernière équation est égal à Px_1. Donc

(3) $$x_1 = 0.$$

On démontrerait de même que l'on a

(4) $$y_1 = 0, \quad z_1 = 0;$$

donc le point O est le centre de gravité du système.

61. Soient A (x, y, z), A$'$ (x', y', z'), A$''$ (x'', y'', z''),... les centres de gravité de divers poids $p, p', p'', \ldots$, et G (x_1, y_1, z_1) le centre de gravité du système, les axes étant menés par un point quelconque. Posons

Fig. 21.

$$OA = r, \quad OA' = r',$$
$$OA'' = r'', \ldots, \quad OG = r_1.$$

On a, comme nous l'avons vu (56),

(1) $$\begin{cases} Px_1 = px + p'x' + p''x'' + \ldots, \\ Py_1 = py + p'y' + p''y'' + \ldots, \\ Pz_1 = pz + p'z' + p''z'' + \ldots. \end{cases}$$

Élevant ces trois équations au carré et ajoutant, on a

$$P^2 r_1^2 = p^2 r^2 + p'^2 r'^2 + p''^2 r''^2 + \ldots$$
$$+ 2pp'(xx' + yy' + zz') + 2pp''(xx'' + yy'' + zz'')$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Or on a

$$\overline{AA'}^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$$
$$= r^2 + r'^2 - 2(xx' + yy' + zz');$$

donc

$$2(xx' + yy' + zz') = r^2 + r'^2 - \overline{AA'}^2,$$

et de même

$$2(xx'' + yy'' + zz'' = r^2 + r''^2 - \overline{AA''}^2,$$

et ainsi de suite.

Donc

$$P^2 r_1^2 = p^2 r^2 + p'^2 r'^2 + p''^2 r''^2 + \ldots$$
$$+ pp'\left(r^2 + r'^2 - \overline{AA'}^2\right) + pp''\left(r^2 + r''^2 - \overline{AA''}^2\right)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ou bien

$$P^2 r_1^2 = (pr^2 + p'r'^2 + p''r''^2 + \ldots)(p + p' + p'' + \ldots)$$
$$- pp'\overline{AA'}^2 - pp''\overline{AA''}^2 - \ldots - p'p''\overline{A'A''}^2 - \ldots,$$

ou, à cause de $P = p + p' + p'' + \ldots$,

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} P^2 r_1^2 = P(pr^2 + p'r'^2 + p''r''^2 + \ldots \\ \qquad\qquad - pp'\overline{AA'}^2 - pp''\overline{AA''}^2 - \ldots. \end{array}\right.$$

Cette formule donne la distance r_1 du centre de gravité à un point quelconque O, en fonction des distances des points A, A', A'',... au point O, et des distances mutuelles de ces points. On pourra donc déterminer la position du centre de gravité G, en calculant par cette formule sa distance à trois points donnés.

62. De la dernière formule on tire

$$pr^2 + p'r'^2 + p''r''^2 + \ldots = Pr_1^2 + \frac{1}{P}\left(pp'\overline{AA'}^2 + pp''\overline{AA''}^2 + \ldots\right).$$

Quand le point O se déplace, le terme Pr_1^2 varie seul dans le second membre; on en conclut que l'expression

$$pr^2 + p'r'^2 + p''r''^2 + \ldots$$

atteint sa plus petite valeur quand $r_1 = 0$, c'est-à-dire quand le point O coïncide avec le centre de gravité du système, et que cette expression a la même valeur pour tous les points de la surface d'une sphère, ayant le point G pour centre.

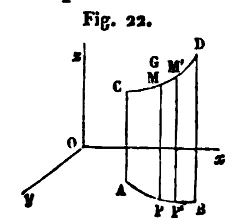
CENTRE DE GRAVITÉ DES LIGNES.

63. Les lignes et les surfaces que l'on considère en géométrie n'ont aucun poids; mais on peut supposer que ces figures soient chargées d'une multitude de points matériels pesants, ou, ce qui revient au même, que tous leurs points géométriques soient sollicités par de petites forces parallèles. Le centre de ces forces sera, par définition, le centre de gravité de la ligne ou de la surface considérée.

Une ligne est *homogène* quand des parties de cette ligne égales en longueur sont sollicitées par des résultantes égales ou des poids égaux. De même, une surface sera homogène lorsque des portions égales de cette surface auront des poids égaux.

64. Pour trouver le centre de gravité d'une ligne homogène CD, il suffit d'exprimer que le moment du poids de cette ligne, par rapport à trois plans quelconques, est égal à la somme des moments des poids des éléments linéaires qui composent cette ligne, par rapport aux mêmes plans.

Fig. 22.



Soient $CMD = l$ la longueur de l'arc entier, M (x, y, z) un point quelconque de cette ligne, et posons

$$CM = s, \quad MM' = \Delta s.$$

On a d'abord, entre des limites

convenables,

$$l = \int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Le moment de l'élément $MM' = \Delta s$, par rapport au plan xy, est $\Delta s(z + \alpha)$, α devenant nul en même temps que Δs. En effet, on peut supposer que le point $M'(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ soit assez rapproché du point M pour que l'arc MM' soit entièrement compris entre deux plans parallèles à xOy, menés par les points M et M'; par suite, le z du centre de gravité de ce petit arc sera compris entre z et $z + \Delta z$. On pourra donc le représenter par $z + \alpha$, α étant moindre que Δz.

Donc, si l'on désigne par x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point G, centre de gravité de CD, on aura

$$(1) \qquad lz_1 = \Sigma z \Delta s + \Sigma \alpha \Delta s,$$

de quelque manière que la courbe soit partagée. Cette équation a donc encore lieu quand les éléments analogues à MM' sont infiniment petits et leur nombre infini. Mais on sait que

$$\lim \Sigma \alpha \Delta s = 0, \quad \lim \Sigma z \Delta s = \int z\, ds;$$

donc

$$(2) \qquad lz_1 = \int z\, ds.$$

On opérera de la même manière par rapport aux plans xOz et yOz, de telle sorte que les coordonnées du point G seront déterminées par les trois formules

$$(3) \qquad lx_1 = \int x\, ds, \quad ly_1 = \int y\, ds, \quad lz_1 = \int z\, ds,$$

ces trois intégrales étant prises entre des limites qui correspondent aux extrémités C et D de l'arc proposé.

65. Si la courbe est plane, on peut prendre son plan pour celui des xy, et alors $z_1 = 0$. On n'a donc plus

besoin que des formules

(4) $$lx_1 = \int x\,ds, \quad ly_1 = \int y\,ds.$$

66. On peut encore parvenir aux formules (3) en considérant la ligne CD comme la limite d'une ligne polygonale et homogène qui lui serait inscrite.

En effet, on peut admettre comme évident que le centre de gravité d'une droite homogène est au milieu de sa longueur. Le moment de la droite MM′, par rapport au plan xOy, sera donc

$$MM' \times \left(z + \frac{\Delta z}{2}\right)$$

ou

$$\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}\left(z + \frac{\Delta z}{2}\right);$$

z_1 étant le z du centre de gravité de la ligne polygonale inscrite, on aura donc

$$z_1 . \Sigma MM' = \Sigma MM'.z + \Sigma \frac{MM'.\Delta z}{2}.$$

Si l'on passe à la limite, on aura

$$\lim \Sigma MM' = l, \quad \lim \Sigma MM'.z = \int z\,ds, \quad \lim \Sigma \frac{MM'.\Delta z}{2} = 0;$$

donc

$$lz_1 = \int z\,ds,$$

CINQUIÈME LEÇON.

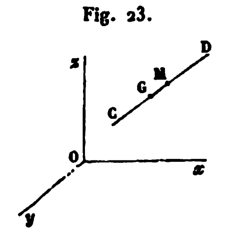
CENTRE DE GRAVITÉ DES LIGNES ET DES SURFACES.

Application des formules précédentes : ligne droite, — arc de cercle, — cycloïde, — parabole. — Centre de gravité des surfaces. — Cas des figures planes. — Application au triangle, à la parabole, — au segment circulaire, — à la cycloïde.

LIGNE DROITE.

67. Comme exemple de ce qui précède, cherchons le centre de gravité d'un segment de droite.

Fig. 23.



Appelant a, b, c les coordonnées du point C ; α, β, γ les angles que la droite fait avec les axes, et $CM = s$ la longueur comprise sur la droite entre le point C et un point quelconque M (x, y, z) de cette droite : il est facile de voir que celle-ci est déterminée par les trois équations

$$(1) \qquad \begin{cases} x = a + s\cos\alpha, \\ y = b + s\cos\beta, \\ z = c + s\cos\gamma. \end{cases}$$

Or, en appelant l la longueur CD du segment, on a d'abord

$$lx_1 = \int x\,ds = \int a\,ds + \int s\,ds\cos\alpha.$$

Cette intégrale indéfinie est

$$lx_1 = as + \frac{s^2}{2}\cos\alpha.$$

Nous ne mettons pas de constante, parce que le moment lx_1 doit être nul pour $s = 0$. Cette intégrale devant

être prise de $s = 0$ à $s = l$, on a

$$lx_1 = al + \frac{l^2}{2}\cos\alpha,$$

ou

$$x_1 = a + \frac{1}{2}l\cos\alpha;$$

on a de même

$$y_1 = b + \frac{1}{2}l\cos\beta,$$

$$z_1 = c + \frac{1}{2}l\cos\gamma.$$

Le centre de gravité G, ainsi déterminé, est le milieu de CD : car les équations (1), en y faisant $s = \frac{1}{2}l$ donnent, pour les coordonnées du point milieu de CD,

$$x = a + \frac{1}{2}l\cos\alpha,$$

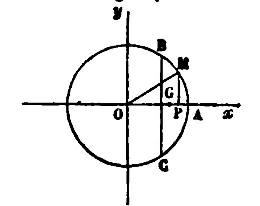
$$y = b + \frac{1}{2}l\cos\beta,$$

$$z = c + \frac{1}{2}l\cos\gamma.$$

ARC DE CERCLE.

68. Le centre de gravité de l'arc de cercle BAC est évidemment situé sur la droite OA, qui passe par le centre du cercle et par le milieu de l'arc. Prenons donc OA pour axe des x, et une perpendiculaire Oy pour axe des y.

Fig. 24.



Posons

$$OA = a,\quad BAC = l,\quad AM = s,\quad x_1 = OG.$$

On a

$$x = OP = a \cos MOP = a \cos \frac{s}{a};$$

donc

(1) $$lx_1 = \int x\,ds = \int a \cos \frac{s}{a}\,ds.$$

Or

$$\int a \cos \frac{s}{a}\,ds = a^2 \sin \frac{s}{a} + C,;$$

donc

$$\int_{-\frac{1}{2}l}^{\frac{1}{2}l} a \cos \frac{s}{a}\,ds = 2a^2 \sin \frac{l}{2a} = a \times 2a \sin \frac{l}{2a} = a \times BC.$$

Donc si l'on désigne par c la corde BC, on aura

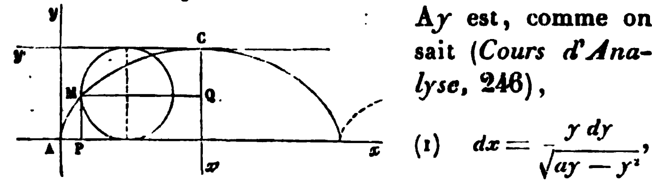
(2) $$x_1 = \frac{ac}{l}.$$

Ainsi, *la distance* OG *du centre de gravité de l'arc au centre du cercle est une quatrième proportionnelle à l'arc, à sa corde et au rayon.*

CYCLOÏDE.

69. L'équation différentielle de la cycloïde rapportée aux axes Ax et Ay est, comme on sait (*Cours d'Analyse*, 246),

Fig. 25.



(1) $$dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{ay - y^2}},$$

a étant le diamètre du cercle générateur. Pour déterminer le centre de gravité de l'arc CM, compté à partir du sommet, prenons pour axe des y' la tangente au sommet, et pour axe des x' la perpendiculaire Cx'. Posons

$$AP = x, \quad MP = y, \quad CQ = x', \quad MQ = y'.$$

On a

$$x = \frac{1}{2}\pi a - y', \quad y = a - x',$$

d'où

$$dx = -dy', \quad dy = -dx'.$$

L'équation différentielle (1) devient donc

$$dy' = \frac{(a - x')\,dx'}{\sqrt{ax' - x'^2}} = \sqrt{\frac{a - x'}{x'}}\,dx',$$

et, en supprimant les accents,

(2) $$dy = \sqrt{\frac{a - x}{x}}\,dx.$$

Soit $CM = l$. On aura

$$l = \int_0^x dx \sqrt{1 + \frac{a - x}{x}} = \int_0^x \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{x}},$$

c'est-à-dire

(3) $$l = 2\sqrt{ax}.$$

L'abscisse x_1 se calculera par la formule

$$lx_1 = \int_0^x x\,ds = \int_0^x \sqrt{a}\,\sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x\sqrt{ax};$$

donc

$$x_1 = \frac{2x\sqrt{ax}}{3l}$$

ou

(4) $$x_1 = \frac{1}{3}x.$$

On a ensuite

$$ly_1 = \int y\,ds = \sqrt{a}\int y\frac{dx}{\sqrt{x}},$$

et, en intégrant par parties,

$$ly_1 = \sqrt{a}\int y\,d(2\sqrt{x}) = \sqrt{a}\left(2y\sqrt{x} - 2\int\sqrt{a - x}\,dx\right)$$

$$= \sqrt{a}\left[2y\sqrt{x} + \frac{4}{3}(a - x)\sqrt{a - x} + C\right].$$

Or, pour $x = 0$, on a $y_1 = 0$, donc

$$C = -\frac{4}{3} a \sqrt{a};$$

d'où, en divisant par $l = 2\sqrt{ax}$,

$$(5) \qquad y_1 = y + \frac{2}{3\sqrt{x}}\left[(a-x)^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}\right].$$

70. Si l'on veut avoir le centre de gravité de l'arc CA, on fera, dans les formules précédentes,

$$x = a, \quad y = \frac{1}{2}\pi a,$$

et l'on aura

$$(6) \qquad x_1 = \frac{1}{3}a, \quad y_1 = a\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right).$$

PARABOLE.

71. Soit

$$(1) \qquad y^2 = 2px$$

Fig. 26.

l'équation d'une parabole rapportée à son axe et à la tangente au sommet; soit l la longueur de l'arc AM, et nommons encore x_1, y_1 les coordonnées du centre de gravité de cet arc. On a (*Cours d'Analyse*, 408)

$$(2) \qquad l = \frac{1}{2p}\left(y\sqrt{y^2+p^2} + p^2 \,\mathrm{l}\,\frac{y+\sqrt{y^2+p^2}}{p}\right),$$

et les coordonnées du centre de gravité de l'arc AM se détermineront par les formules

$$(3) \qquad lx_1 = \int x\,ds, \quad ly_1 = \int y\,ds.$$

Cherchons d'abord ly_1. Puisque

$$ds = \frac{1}{p}\sqrt{y^2+p^2}\,dy,$$

on a

$$ly_1 = \frac{1}{p}\int y\,dy\sqrt{y^2+p^2}$$
$$= \frac{1}{2p}\int (y^2+p^2)^{\frac{1}{2}} d(y^2+p^2)$$
$$= \frac{1}{3p}(y^2+p^2)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Or, pour $y=0$, on a

$$l=0 \quad \text{et} \quad ly_1 = 0;$$

donc

$$C = -\frac{p^2}{3},$$

et enfin

$$(4) \qquad ly_1 = \frac{1}{3p}(y^2+p^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{p^2}{3},$$

d'où l'on déduira y_1 en divisant les deux membres par l, dont la valeur est connue.

Pour obtenir x_1, on partira de l'équation

$$lx_1 = \int x\,ds;$$

or

$$\int x\,ds = \int dx\sqrt{x^2+\frac{px}{2}} = \int dx\sqrt{\left(x+\frac{p}{4}\right)^2 - \frac{p^2}{16}}.$$

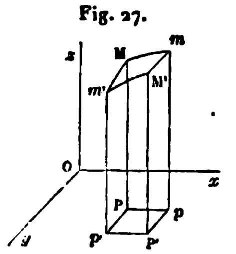
En achevant l'intégration indiquée, on arrivera à la formule

$$(5)\ lx_1 = \frac{1}{2}\left(x+\frac{p}{4}\right)\sqrt{x^2+\frac{px}{2}} - \frac{p^2}{32}\,\mathrm{l}\,\frac{4x+p+4\sqrt{x^2+\frac{px}{2}}}{p}$$

CENTRE DE GRAVITÉ DES SURFACES.

72. Soient $M(x, y, z)$, $M'(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ deux points voisins pris sur une surface rapportée à trois axes rectangulaires; soit ω l'élément de surface $MmM'm'$ intercepté entre quatre plans, parallèles deux à deux aux plans zOx et zOy.

Fig. 27.



Quand les accroissements Δx et Δy sont infiniment petits, ω devient $dx dy \sqrt{1+p^2+q^2}$, p et q désignant les dérivées partielles $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$; on aura donc

$$(1) \qquad \omega = \Delta x \Delta y \left(\sqrt{1+p^2+q^2}+\alpha\right),$$

où α représente une quantité qui devient nulle à la limite. Le z du centre de gravité de $MmM'm'$ peut être représenté par $z+\beta$, β devenant nul en même temps que Δx et Δy, car ce point est compris entre deux plans parallèles au plan des xy menés par le point le plus haut et par le point le plus bas de l'élément $MmM'm'$. Dès lors le moment de l'élément par rapport au plan xOy est

$$(z+\beta)\Delta x \Delta y \left(\sqrt{1+p^2+q^2}+\alpha\right)$$

ou

$$z\sqrt{1+p^2+q^2}\,\Delta x \Delta y + \gamma \Delta x \Delta y,$$

γ étant une quantité qui s'évanouit avec Δx et Δy. Si l'on décompose de la même manière toute la surface considérée, en appelant λ l'aire de cette surface et x_1, y_1, z_1 les coordonnées de son centre de gravité, on aura

$$(2) \qquad \lambda z_1 = \Sigma\Sigma z\sqrt{1+p^2+q^2}\,\Delta x \Delta y + \Sigma\Sigma\gamma \Delta x \Delta y.$$

Or, puisque cette équation subsiste, quels que soient Δx et Δy, elle sera encore vraie quand ces accroisse-

ments seront infiniment petits. Mais alors

$$\lim \Sigma\Sigma \gamma \Delta x \Delta y = 0,$$

$$\lim \Sigma\Sigma z \sqrt{1+p^2+q^2}\, \Delta x \Delta y = \int\int z \sqrt{1+p^2+q^2}\, dx\, dy\,;$$

donc enfin

$$(3) \qquad \lambda z_1 = \int\int z \sqrt{1+p^2+q^2}\, dx\, dy$$

En opérant de cette manière par rapport aux trois plans coordonnés, on aura, pour déterminer les inconnues x_1, y_1, z_1, les équations

$$(4) \qquad \begin{cases} \lambda x_1 = \int\int x\omega, \\ \lambda y_1 = \int\int y\omega, \\ \lambda z_1 = \int\int z\omega, \end{cases}$$

ω tenant la place de $\sqrt{1+p^2+q^2}\, dx\, dy$. On a d'ailleurs

$$(5) \qquad \lambda = \int\int \sqrt{1+p^2+q^2}\, dx\, dy.$$

73. Quant aux limites de ces diverses intégrales, elles sont faciles à assigner. Si

$$y = \varphi(x), \quad y = \psi(x)$$

sont les valeurs de y correspondant à deux points qui, sur la projection du contour de la surface sur le plan xy, ont le même x, il faudra intégrer d'abord par rapport à y, en considérant x comme une constante, depuis $y = \varphi(x)$ jusqu'à $y = \psi(x)$. On intégrera ensuite par rapport à x, depuis $x = a$ jusqu'à $x = b$, en supposant que

$$x = a, \quad x = b$$

soient les équations des plans menés parallèlement au plan des zy, par les points extrêmes du contour, a étant moindre que b.

CENTRE DE GRAVITÉ DES FIGURES PLANES.

74. Les formules (4) se simplifient lorsque la surface est plane. Si l'on prend le plan de cette figure pour plan des xy, on aura

$$z_1 = 0, \quad \frac{dz}{dx} = 0, \quad \frac{dz}{dy} = 0,$$

et les formules (4) et (5) se réduisent aux suivantes :

$$(6) \qquad \begin{cases} \lambda = \int\int dx\,dy, \\ \lambda x_1 = \int\int x\,dx\,dy, \\ \lambda y_1 = \int\int y\,dx\,dy. \end{cases}$$

75. C'est ce que l'on peut d'ailleurs trouver directement. En effet, soient y et y' les ordonnées des courbes CD et C'D', correspondant à une même abscisse, et posons

Fig. 28.

$$\text{OA} = a, \quad \text{OB} = b.$$

On a d'abord

$$(7) \qquad \lambda = \int_a^b (y - y')dx = \int_a^b \int_y^{y'} dx\,ay.$$

Maintenant si, par les points infiniment voisins M(x, y) et M'$(x + dx, y + dy)$ pris sur la surface, on mène HH' et KK' parallèles à l'axe Oy, on formera une tranche HKH'K' qui différera infiniment peu du rectangle HH'I'I obtenu en menant HI et H'I' parallèles à Ox.

Le centre de gravité g de cette tranche est infiniment voisin du centre de gravité du rectangle, et par suite du milieu de HH'. On peut donc, en négligeant des quantités infiniment petites, prendre x et $\frac{y + y'}{2}$ pour les coor-

données du centre de gravité de la tranche HKK′H′; or cette tranche a pour mesure $(y - y')\,dx$. Donc son moment par rapport à Oy est $(y - y')\,x\,dx$, et son moment par rapport à Ox est $\frac{1}{2}(y^2 - y'^2)\,dx$, ce qui donne

$$(8)\qquad \begin{cases} \lambda x_1 = \displaystyle\int_a^b (y - y')\,x\,dx, \\ \lambda y_1 = \displaystyle\frac{1}{2}\int_a^b (y^2 - y'^2)\,dx, \end{cases}$$

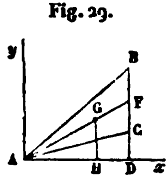
formules qui reviennent à celles qu'on a trouvées plus haut (74).

Cette démonstration pourrait être rendue tout à fait rigoureuse par la méthode des limites.

APPLICATIONS. — TRIANGLE.

76. Prenons deux axes rectangulaires Ax, Ay, passant par le sommet A, et dont l'un Ax soit perpendiculaire au côté BC. Soit $AD = h$. Nommons x_1 et y_1 les coordonnées du centre de gravité G, et λ la surface ABC. Soient

Fig. 29.



$$(1)\qquad y = mx, \quad y' = m'x$$

les équations des droites AB et AC. On aura

$$\lambda = \int_0^h (y - y')\,dx = \int_0^h (m - m')\,x\,dx = \frac{(m - m')\,h^2}{2},$$

$$\lambda x_1 = \int_0^h (y - y')\,x\,dx = \int_0^h (m - m')\,x^2 dx = \frac{(m - m')\,h^3}{3},$$

$$\lambda y_1 = \frac{1}{2}\int_0^h (y^2 - y'^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^h (m^2 - m'^2)\,x^2 dx = \frac{(m^2 - m'^2)\,h^3}{6},$$

d'où l'on conclut

$$(2)\qquad x_1 = \frac{2}{3}h, \quad y_1 = \frac{(m + m')\,h}{3}.$$

Or le point F, milieu de BC, a pour coordonnées

$$AD = h, \quad FD = \frac{(m + m')h}{2};$$

donc *le centre de gravité du triangle* ABC *est sur la ligne médiane* AF *et aux* $\frac{2}{3}$ *de cette ligne à partir du sommet.*

PARABOLE.

77. Soit

$$(1) \qquad y^2 = 2px$$

l'équation de la parabole rapportée à son axe et à la tangente au sommet. Proposons-nous de trouver le centre de gravité du segment OAD. Comme la courbe dont l'ordonnée était désignée par y' dans le cas général se confond avec l'axe des x, on a $y' = 0$, et les formules générales (7) et (8) du n° 75 se réduisent à

Fig. 30.

$$(2) \qquad \lambda = \int_0^x y\,dx, \quad \lambda x_1 = \int_0^x yx\,dx, \quad \lambda z_1 = \frac{1}{2}\int_0^x y^2\,dx.$$

On aura donc

$$\lambda = \int_0^x \sqrt{2p}\,.\,x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2}{3}x\sqrt{2px},$$

$$\lambda x_1 = \int_0^x \sqrt{2p}\,.\,x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{2}{5}x^2\sqrt{2px},$$

$$\lambda y_1 = \int_0^x px\,dx = \frac{px^2}{2}.$$

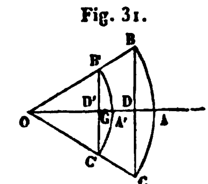
Par conséquent

$$(3) \qquad x_1 = \frac{3}{5}x, \quad y_1 = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{px}{2}} = \frac{3}{8}y.$$

SECTEUR CIRCULAIRE.

78. Le point cherché est sur la droite AO, qui passe par le milieu de l'arc BC et qui partage le secteur en deux parties symétriques. Il ne reste donc plus qu'à trouver la distance OG.

Fig. 31.



Imaginons que l'on ait inscrit dans l'arc BC une ligne polygonale régulière, et que l'on ait joint les sommets au centre. On aura un secteur polygonal composé de triangles égaux, et dont le centre de gravité coïncidera avec le centre de gravité d'une ligne polygonale régulière inscrite dans l'arc B′C′ décrit d'un rayon OA′ égal à $\frac{2}{3}$ OA. Ce résultat, indépendant du nombre des divisions de l'arc BC, conviendra encore lorsqu'on passera à la limite; d'où résulte que le point cherché G sera le centre de gravité de l'arc B′A′C′. Soient

$$OA = a, \quad BC = c, \quad BAC = l,$$

on aura (68)

$$OG = \frac{OA'.B'C'}{B'A'C'} = \frac{\frac{2}{3}a\,\frac{2}{3}c}{\frac{2}{3}l},$$

ou bien

$$OG = \frac{2}{3}\frac{ac}{l}.$$

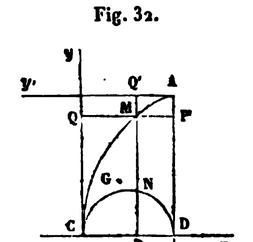
De là il est aisé de conclure le centre de gravité du segment BAC, puisqu'on connaît ceux du secteur OBAC et du triangle BOC.

CYCLOÏDE.

79. Prenons pour axe des y la tangente au sommet, et pour axe des x la perpendiculaire CD. Soient $x =$ CP,

$y = \text{MP}$ les coordonnées d'un point M de la courbe, x_1, y_1 celles du centre de gravité G du segment MCP, et a le diamètre du cercle générateur.

Fig. 32.



L'équation de la courbe est

$$(1) \qquad dy = dx\sqrt{\frac{a-x}{x}},$$

et les formules à employer pour déterminer x_1 et y_1 sont

$$(2) \quad \lambda = \int_0^x y\,dx, \quad \lambda x_1 = \int_0^x xy\,dx, \quad \lambda y_1 = \frac{1}{2}\int_0^x y^2\,dx.$$

Or

$$\lambda = \int_0^x y\,dx = xy - \int_0^x x\,dy,$$

et, en remplaçant dy par sa valeur,

$$\lambda = xy - \int_0^x dx\sqrt{ax - x^2}.$$

Mais si l'on appelle V l'aire du segment CNP du cercle générateur, on a

$$\text{V} = \int_0^x dx\sqrt{ax - x^2};$$

donc

$$(3) \qquad \lambda = xy - \text{V},$$

ce qu'on pouvait d'ailleurs poser immédiatement (*Cours d'Analyse*, 403).

80. On a ensuite

$$\lambda x_1 = \int yx\,dx = \int y\,d\frac{x^2}{2} = \frac{yx^2}{2} - \frac{1}{2}\int x^2\,dy$$
$$= \frac{yx^2}{2} - \frac{1}{2}\int x\,dx\sqrt{ax - x^2}.$$

Mais

$$\int x\,dx\sqrt{ax-x^2}=\int\left[\frac{a}{2}-\left(\frac{a}{2}-x\right)\right]dx\sqrt{ax-x^2},$$

et, par conséquent,

$$\int x\,dx\sqrt{ax-x^2}=\frac{a}{2}\int dx\sqrt{ax-x^2}$$
$$-\frac{1}{2}\int(a-2x)\,dx\sqrt{ax-x^2},$$

ou bien

$$\int x\,dx\sqrt{ax-x^2}=\frac{1}{2}a\mathrm{V}-\frac{1}{3}(ax-x^2)^{\frac{3}{2}}:$$

donc

(4) $$\lambda x_1=\frac{x^2y}{2}-\frac{a\mathrm{V}}{4}+\frac{1}{6}(ax-x^2)^{\frac{3}{2}},$$

d'où, en divisant par λ, on déduira x_1.

81. Le calcul de y_1 est un peu plus compliqué. On a

$$\lambda y_1=\frac{1}{2}\int y^2\,dx=\frac{1}{2}y^2x-\int xy\,dy;$$

or

$$\int xy\,dy=\int xy\sqrt{\frac{a-x}{x}}\,dx=\int y\sqrt{x}\sqrt{a-x}\,dx$$
$$=-\frac{2}{3}y\sqrt{x}\,(a-x)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}\int(a-x)^{\frac{3}{2}}d\left(y\sqrt{x}\right)$$
$$=-\frac{2}{3}y(a-x)\sqrt{ax-x^2}+\frac{2}{3}\int(a-x)^{\frac{3}{2}}\sqrt{x}\,dy$$
$$+\frac{2}{3}\int(a-x)^{\frac{3}{2}}y\frac{dx}{2\sqrt{x}}.$$

Mais

$$\int(a-x)^{\frac{3}{2}}\sqrt{x}\,dy=\int(a-x)^2\,dx=-\frac{1}{3}(a-x)^3,$$

$$\int(a-x)^{\frac{3}{2}}y\frac{dx}{2\sqrt{x}}=\int(a-x)\frac{y}{2}\,dy=\frac{1}{4}ay^2-\frac{1}{2}\int xy\,dy;$$

4.

donc

$$\int xy\,dy = -\frac{2}{3}y(a-x)\sqrt{ax-x^2} - \frac{2}{9}(a-x)^3 + \frac{1}{6}ay^2 - \frac{1}{3}\int xy\,dy\,;$$

d'où l'on tire, en désignant par c une constante,

$$\int xy\,dy = c - \frac{1}{2}y(a-x)\sqrt{ax-x^2} - \frac{1}{6}(a-x)^3 + \frac{1}{8}ay^2.$$

Si l'on fait $x=0$, on a $y=0$, $\int xy\,dy = 0$, et, par suite, $c=\frac{1}{6}a^3$. On a donc enfin

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} \lambda y_1 = \frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{8}ay^2 + \frac{1}{2}y(a-x)\sqrt{ax-x^2} \\ + \frac{1}{6}(a-x)^3 - \frac{1}{6}a^3. \end{aligned} \right.$$

82. Si l'on veut avoir le centre de gravité de la demi-cycloïde ACD, il faudra faire, dans les formules trouvées,

$$x=a, \quad y=\frac{\pi a}{2},$$

et l'on aura

$$\lambda = \frac{3\pi a^2}{8},$$

$$\lambda x_1 = \frac{7\pi a^3}{32},$$

$$\lambda y_1 = \frac{\pi^2 a^3}{8} - \frac{\pi^2 a^3}{32} - \frac{1}{6}a^3 = \frac{3\pi^2 a^3}{32} - \frac{1}{6}a^3,$$

d'où

$$x_1 = \frac{7}{12}a, \quad y_1 = \frac{\pi a}{4} - \frac{4a}{9\pi}.$$

SIXIÈME LEÇON.

CENTRE DE GRAVITÉ DES SURFACES. (Suite.)

Centre de gravité des surfaces de révolution. — Centre de gravité d'une zone sphérique, — d'une zone cycloïdale. — Théorèmes de Guldin. — Volume du cylindre.

CENTRE DE GRAVITÉ DES SURFACES DE RÉVOLUTION.

83. Considérons la surface engendrée par la révolution d'une courbe plane CD, tournant autour d'un axe Ox situé dans son plan. Prenons cette droite pour axe des abscisses et pour axe des ordonnées une perpendiculaire à Ox située dans le plan de la courbe.

Fig. 33.

Le centre de gravité de la surface est évidemment sur Ox. On n'a donc qu'à déterminer son abscisse $OG = x_1$.

Soient $M(x, y)$ et $M'(x + dx, y + dy)$ deux points infiniment voisins pris sur la courbe. On peut regarder la surface engendrée par la révolution de l'arc infiniment petit $MM' = ds$ comme celle d'un tronc de cône dont l'aire est alors $2\pi y\,ds$; donc si S est la surface engendrée par CD, on aura

$$dS = 2\pi y\,ds,$$

d'où

$$(1) \qquad S = 2\pi \int y\,ds.$$

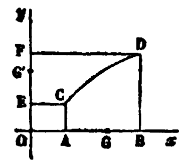
D'ailleurs le moment de l'élément de surface dS, par rapport à un plan zOy perpendiculaire à Ox, est $2\pi xy\,ds$; car x est l'abscisse du centre de gravité de

l'élément à un infiniment petit près; le moment de la surface totale est Sx_1 : donc

(2) $$Sx_1 = 2\pi\int xy\,ds.$$

84. Si l'arc CD tournait autour de l'axe des y, en nommant G′ le centre de gravité de la surface ainsi engendrée, on aurait

Fig. 34.



$$S' \times OG' = 2\pi\int xy\,ds.$$

Mais on a

$$S \times OG = 2\pi\int xy\,ds;$$

donc

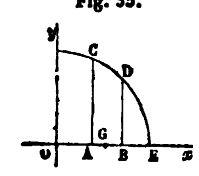
$$S' \times OG' = S \times OG,$$

relation qui fera trouver l'une des quatre quantités S, S′, OG, OG′, quand on connaîtra les trois autres.

CENTRE DE GRAVITÉ D'UNE ZONE SPHÉRIQUE.

85. Soit CD un arc de cercle qui, en tournant autour de Ox, engendre la zone dont on veut avoir le centre de gravité. Posons

Fig. 35.



$$OA = a,\quad OB = b,\quad OE = R,$$

nous aurons

$$ds = dx\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}} = \frac{R\,dx}{y};$$

d'où

$$S = 2\pi\int_a^b y\,ds = 2\pi\int_a^b R\,dx$$

ou

(1) $$S = 2\pi R(b-a),$$

et ensuite

$$Sx_1 = 2\pi \int_a^b xy\,ds = 2\pi \int_a^b Rx\,dx = \pi R\,(b^2 - a^2) :$$

donc

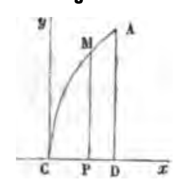
$$(2) \qquad x_1 = \frac{b+a}{2}.$$

Ainsi, *le centre de gravité d'une zone sphérique est sur le diamètre perpendiculaire aux deux bases et à égale distance de ces bases.*

CENTRE DE GRAVITÉ D'UNE ZONE CYCLOÏDALE.

86. En prenant les axes comme au n° 69, l'équation de la cycloïde sera

Fig. 36.



$$(1) \qquad dy = dx\sqrt{\frac{a-x}{x}},$$

d'où

$$ds = \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{x}}$$

et

$$S = 2\pi\sqrt{a}\int \frac{y\,dx}{\sqrt{x}}.$$

Or

$$\int \frac{y\,dx}{\sqrt{x}} = \int y\,d(2\sqrt{x}) = 2y\sqrt{x} - 2\int \sqrt{x}\,dy$$
$$= 2y\sqrt{x} - 2\int dx\sqrt{a-x},$$

ou enfin

$$S = 4\pi y\sqrt{ax} + \frac{8\pi\sqrt{a}}{3}(a-x)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Si l'on veut obtenir l'aire engendrée par l'arc CM, on aura $S = 0$ pour $x = 0$. On a donc

$$C = -\frac{8\pi a^2}{3};$$

donc

$$(2)\qquad S = 4\pi y\sqrt{ax} + \frac{8\pi\sqrt{a}}{3}(a-x)^{\frac{3}{2}} - \frac{8\pi a^2}{3}.$$

Maintenant,

$$Sx_1 = 2\pi\sqrt{a}\int y\sqrt{x}\,dx;$$

mais

$$\int y\sqrt{x}\,dx = \int y\,d\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2}{3}xy\sqrt{x} - \frac{2}{3}\int x^{\frac{3}{2}}\,dy$$

$$= \frac{2}{3}xy\sqrt{x} - \frac{2}{3}\int x\sqrt{a-x}\,dx$$

$$= \frac{2}{3}xy\sqrt{x} + \frac{2}{3}\int(a-x)^{\frac{3}{2}}\,dx - \frac{2a}{3}\int(a-x)^{\frac{1}{2}}\,dx.$$

En effectuant ces dernières intégrations et déterminant la constante arbitraire par la condition que Sx_1 soit nul pour $x = 0$, on aura

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} Sx_1 = \frac{3}{4}\pi xy\sqrt{ax} + \frac{8}{9}\pi a^{\frac{3}{2}}(a-x)^{\frac{3}{2}} \\ - \frac{8}{15}\pi\sqrt{a}(a-x)^{\frac{5}{2}} - \frac{16}{45}\pi a^3, \end{aligned}\right.$$

d'où l'on déduira x_1.

87. Si l'on veut avoir le centre de gravité de la surface engendrée par la demi-cycloïde, il faudra faire

$$x = a,\quad y = \frac{\pi a}{2},$$

ce qui donnera

$$S = 2\pi a^2\left(\pi - \frac{4}{3}\right),$$

$$Sx_1 = \frac{2\pi}{3}a^3\left(\pi - \frac{8}{15}\right),$$

d'où

$$x_1 = \frac{a}{3}\,\frac{\pi - \frac{8}{15}}{\pi - \frac{4}{3}}.$$

THÉORÈMES DE GULDIN.

88. Soient CD une courbe plane, l sa longueur et $g(x_1, y_1)$ son centre de gravité; ds étant la différentielle de cet arc, on a

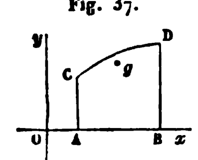


Fig. 37.

$$ly_1 = \int y\,ds.$$

Maintenant, si S est l'aire de la surface engendrée par la révolution de CD autour de Ox, on a

$$S = 2\pi \int y\,ds;$$

on aura donc

$$S = 2\pi y_1 \times l,$$

d'où l'on conclut ce théorème :

La surface engendrée par la révolution d'une courbe plane autour d'un axe situé dans son plan, a pour mesure la longueur de la courbe multipliée par la circonférence que décrit son centre de gravité.

89. Si la courbe, au lieu d'accomplir une révolution entière, ne tournait que d'un angle θ, en appelant S' l'aire engendrée, on aurait

$$\frac{S'}{S} = \frac{\theta}{2\pi},$$

d'où

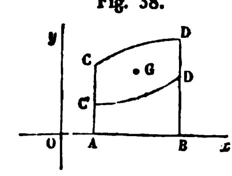
$$S' = \frac{S}{2\pi}\,\theta = \theta y_1 l.$$

Or θy_1 est l'arc décrit par le point g : on peut donc

dire aussi que : *La surface engendrée par une courbe plane tournant d'un angle quelconque autour d'une droite située dans son plan est égale à la longueur de la courbe multipliée par l'arc que décrit son centre de gravité.*

90. Soit CC'D'D une surface plane comprise entre deux courbes CD, C'D', et deux droites CA, DB perpendiculaires à Ox; soient G (x_1, y_1) le centre de gravité de cette surface, et λ son aire; on aura

Fig. 38.



$$\lambda y_1 = \frac{1}{2}\int (y^2 - y'^2)\,dx,$$

les équations des deux courbes CD, C'D' étant

$$y = \varphi(x), \quad y' = \varphi_1(x).$$

Soit V le volume engendré par la révolution de l'aire λ autour de l'axe Ox situé dans son plan, on a

$$V = \pi \int (y^2 - y'^2)\,dx;$$

donc

$$V = \lambda \times 2\pi y_1.$$

Ainsi, *le volume engendré par la révolution d'une aire plane autour d'un axe situé dans son plan est égal à l'aire de la surface génératrice, multipliée par la circonférence que décrit son centre de gravité.*

91. Si l'aire n'accomplissait pas une révolution entière, le volume engendré serait égal à l'aire λ multipliée par l'arc de cercle que décrit le centre de gravité de l'aire.

92. Par exemple, soit un cercle de rayon a, tournant

autour d'un axe situé à une distance $CH = h$ de son centre, nous aurons

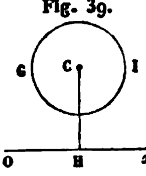


Fig. 39.

$$l = 2\pi a,\quad \lambda = \pi a^2,$$

et, par suite,

$$S = 4\pi^2 ah,\quad V = 2\pi^2 a^2 h.$$

Si une ellipse dont les axes sont $2a$ et $2b$ tourne autour d'un axe, situé dans son plan à une distance h de son centre, on aura

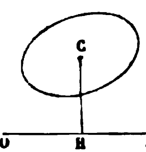


Fig. 40.

$$\lambda = \pi ab,$$
$$V = 2\pi^2 abh.$$

93. Le théorème de Guldin relatif aux volumes est susceptible d'extension.

Si une surface plane se transporte dans l'espace de telle sorte qu'un de ses points restant toujours sur une courbe quelconque IK, *son plan demeure constamment normal à cette courbe, le solide engendré par le mouvement de cette surface aura pour mesure l'aire de la surface, multipliée par la courbe que décrit son centre de gravité.*

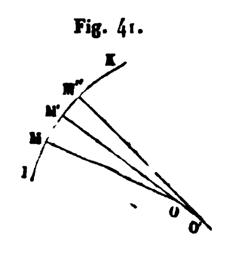


Fig. 41.

En effet, soient MO et M'O deux droites infiniment voisines suivant lesquelles le plan de la surface mobile rencontre successivement le plan osculateur de la courbe IK au point M. Les deux plans qui auront ces droites pour trace étant normaux à la courbe, se couperont sur une droite projetée en O et perpendiculaire au plan osculateur MM'O de la courbe au point M. Cette droite est l'axe du cercle osculateur et O en est le centre. Donc, quand la surface génératrice passera de la position qui correspond

à OM, à celle qui correspond à OM′, elle pourra être supposée tourner autour de l'arc projeté en O. Dès lors le volume du solide engendré par ce déplacement infiniment petit aura pour mesure l'aire de la surface mobile, multipliée par le petit arc de cercle que décrit le centre de gravité de cette surface. La même chose peut se dire de chaque élément de volume ainsi formé ; on voit donc bien que le volume total sera égal à l'aire génératrice multipliée par la courbe que décrit le centre de gravité.

On remarquera que le plan de la surface mobile reste toujours tangent à la surface développable formée par les intersections successives des plans normaux à la courbe directrice.

VOLUME DU CYLINDRE.

94. Soit ABCD un cylindre dont la section droite est AB, coupé par un plan CD incliné à ses arêtes. Soient λ' l'aire de la base AB, et z_1 la distance du centre de gravité de la base supérieure à la base inférieure. Je dis que le volume du cylindre ABCD est égal à $\lambda' z_1$.

Fig. 42.

En effet, soient Ox, Oy, Oz trois axes rectangulaires, dont deux, Ox, Oy, soient dans le plan de AB. En désignant par λ l'aire CD et par ω l'aire d'un de ses éléments infiniment petits, on aura (72)

$$(1) \qquad \lambda z_1 = \int\int z\omega.$$

Soient θ l'angle des deux plans AB et CD, et ω' la projection de ω sur le plan AB, on aura

$$\omega' = \omega\cos\theta,\quad \lambda' = \lambda\cos\theta.$$

En multipliant l'égalité (1) par le facteur $\cos\theta$, on aura

$$\lambda\cos\theta\, z_1 = \int\int z\omega\cos\theta$$

ou

(2) $$\lambda' z_1 = \int\int z\omega'.$$

Or, z étant la hauteur du centre de gravité de l'élément ω, $z\omega'$ est le volume du cylindre infiniment petit $\omega\omega'$, et dès lors $\int\int z\omega'$ est le volume du cylindre entier ABCD. On a donc

(3) $$V = \lambda' z_1.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

95. Le centre de gravité G′ de la section droite AB est la projection du centre de gravité G sur le plan de la section droite.

En effet, soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point G, et x'_1, y'_1, o celles du point G′. On a

$$\lambda x_1 = \int\int x\omega, \quad \lambda y_1 = \int\int y\omega,$$

d'où l'on déduit, en multipliant par le facteur constant $\cos\theta$,

$$\lambda' x_1 = \int\int x\omega', \quad \lambda' y_1 = \int\int y\omega';$$

on aurait de même

$$\lambda' x'_1 = \int\int x\omega', \quad \lambda' y'_1 = \int\int y\omega':$$

donc

$$x'_1 = x_1, \quad y'_1 = y_1,$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

96. De là résulte que les centres de gravité G, G′, G″, de toutes les sections planes faites dans un cylindre quelconque sont sur une même droite parallèle aux arêtes.

Enfin on peut en déduire que le volume d'un cylindre quelconque EFCD est égal à l'aire d'une section droite, multipliée par la distance GG'' des centres de gravité des deux bases.

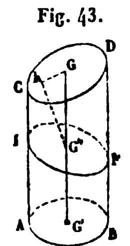


Fig. 43.

En effet, soient V_1 le volume ABCD, V_2 le volume ABEF, et V le volume EFCD. En désignant par λ' l'aire de la section droite AB, on aura

$$V_1 = \lambda' GG',$$
$$V_2 = \lambda' G'G'',$$

d'où

$$V = V_1 - V_2 = \lambda'(GG' - G'G''),$$

ou bien

$$V = \lambda' GG''.$$

SEPTIÈME LEÇON.

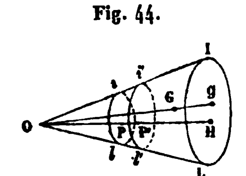
CENTRE DE GRAVITÉ DES VOLUMES

Centre de gravité du cône. — Centre de gravité du secteur sphérique. — Centre de gravité des solides de révolution. — Corps dont le centre de gravité s'obtient par une seule intégration. — Volume et centre de gravité d'un corps quelconque.

CENTRE DE GRAVITÉ DU CÔNE.

97. Soit OIL un cône quelconque à base plane IL et posons OH $= h$. Soient OP $= x$, OP$' = x + dx$, les distances au point O de deux sections planes, infiniment voisines et parallèles à la base. Nommons u l'aire de la section il et b celle de la base IL. On peut considérer la tranche $ill'i'$ comme un cylindre ayant pour base u et pour hauteur dx. Ce volume sera donc $u\,dx$, ou $\frac{bx^2}{h^2}\,dx$ à cause de l'égalité

Fig. 44.



$$\frac{u}{x^2} = \frac{b}{h^2}.$$

Par suite, on aura pour le volume du cône

$$V = \int_0^h \frac{bx^2\,dx}{h^2}$$

ou

$$(1) \qquad V = \frac{bh}{3}.$$

Appelons maintenant x_1 la distance du centre de gravité du cône à un plan parallèle à IL mené par le sommet. Le centre de gravité de la tranche infiniment mince $ili'l'$ à ce même plan est x, en négligeant des quantités infini-

ment petites. On aura donc, en prenant les moments par rapport à ce même plan,

$$Vx_1 = \int_0^h xu\,dx = \int_0^h \frac{bx^3\,dx}{h^2};$$

donc

$$Vx_1 = \frac{bh^4}{4h^2} = \frac{bh^2}{4},$$

d'où

$$(2) \quad \ldots \quad x_1 = \frac{3}{4}h.$$

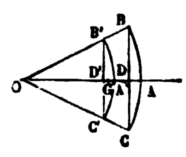
D'ailleurs le centre de gravité du cône est sur la droite Og, menée du sommet O au centre de gravité de la base IL, puisque les centres de gravité de toutes les tranches sont sur cette droite; par conséquent *le centre de gravité d'un cône à base quelconque est sur la droite qui va du sommet au centre de gravité de la base et aux trois quarts de cette droite à partir du sommet.*

98. En appliquant ce théorème à la pyramide triangulaire, on démontre aisément que le centre de gravité d'une telle pyramide est le même que celui de quatre poids égaux appliqués à ses sommets, et, par suite, que la distance du centre de gravité à un plan quelconque est le quart de la somme des distances des quatre sommets à ce plan.

CENTRE DE GRAVITÉ DU SECTEUR SPHÉRIQUE.

99. On peut concevoir le secteur sphérique engendré par la révolution du secteur circulaire BOA autour de OA, comme décomposé en une infinité de pyramides triangulaires équivalentes, dont les bases seraient les éléments triangulaires infiniment petits de la zone, base du secteur sphérique.

Fig. 45.



Or les centres de gravité de toutes ces pyramides se trouveront uniformément distribués sur la zone décrite par la révolution de A'B', arc dont le rayon $OB' = \frac{3}{4} OB$. Donc le centre de gravité du secteur sphérique coïncidera avec le centre de gravité de cette zone. Ce point sera donc le point G situé à égale distance de A' et de D', D' étant le point où la corde de l'arc B'A'C' rencontre OA.

Si l'on désigne par r le rayon de la sphère et par α l'angle AOB, on aura

$$OD' = \frac{3}{4} OD = \frac{3}{4} r \cos\alpha,$$

$$OA' = \frac{3}{4} r;$$

donc

$$OG = \frac{OD' + OA'}{2} = \frac{3}{8} r(1 + \cos\alpha),$$

ou bien

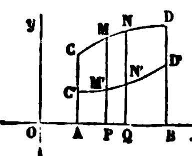
$$OG = \frac{3}{4} r \cos^2 \frac{1}{2} \alpha.$$

Ainsi on obtiendra le point G en projetant le point A' sur la bissectrice de l'angle AOB, et en projetant cette projection sur OD.

CENTRE DE GRAVITÉ DES SOLIDES DE RÉVOLUTION

100. Soit CDC'D' une surface plane comprise entre deux courbes CD, C'D' et deux droites parallèles CC', DD'. Supposons que cette aire tourne autour d'une droite Ox, située dans son plan et perpendiculaire à CC'. Considérons la bande infiniment mince MNM'N' limitée aux deux courbes CD et C'D' et aux deux parallèles infiniment voisines PM

Fig. 46.



et QN. Soient

$$OP = x, \quad PQ = dx, \quad PM = y, \quad PM' = y'.$$

Le volume engendré par MM'NN' peut être regardé comme la différence de deux cylindres ayant pour hauteur commune dx, et pour bases les cercles décrits par les droites PM et PM' : ce volume sera donc

$$\pi (y^2 - y'^2)\, dx,$$

et si V est le volume total, on aura, en posant $OA = a$, $OB = b$,

$$(1) \qquad V = \pi \int_a^b (y^2 - y'^2)\, dx.$$

Maintenant x étant l'abscisse du centre de gravité du volume engendré par MM'NN', le moment de ce volume, par rapport à un plan perpendiculaire à Ox, mené par le point O, sera $\pi x (y^2 - y'^2)\, dx$. Donc si x_1 est l'abscisse du centre de gravité que l'on cherche, on aura

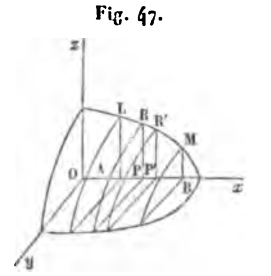
$$(2) \qquad V x_1 = \pi \int_a^b (y^2 - y'^2)\, x\, dx,$$

égalité qui fera connaître x_1.

CORPS DONT LE CENTRE DE GRAVITÉ S'OBTIENT PAR UNE SEULE INTÉGRATION.

101. On peut obtenir par une seule intégration le centre de gravité d'un corps lorsqu'il est décomposable en éléments infiniment petits, ayant leurs centres de gravité en ligne droite.

Fig. 47.



Considérons, par exemple, un segment d'ellipsoïde compris entre deux plans parallèles AL et BM.

Menons par le centre O de l'ellipsoïde un plan zOy,

parallèle à ces deux plans; soient Oy, Oz deux diamètres conjugués de la section ainsi obtenue, et Ox le diamètre conjugué à ce plan diamétral. Le diamètre Ox passera par les centres de gravité de toutes les sections parallèles à zOy, puisque ces centres de gravité sont les centres de toutes ces ellipses.

Or $2a$, $2b$, $2c$ étant les longueurs des trois diamètres conjugués, l'équation de l'ellipsoïde sera

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{1}$$

On peut concevoir le segment ALBM comme formé d'une infinité de tranches infiniment petites, limitées par des plans parallèles à zOy. Soit PRP′R′ une de ces tranches, telle que $OP = x$, $OP' = x + dx$. Le volume de cette tranche différera infiniment peu de celui d'un cylindre qui, ayant l'ellipse PR pour base, aurait pour hauteur la distance entre PR et PR′. Or l'équation de l'ellipse PR est

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2},$$

et par suite son aire est

$$\pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \sin\theta,$$

θ étant l'angle zOy. D'un autre côté, λ désignant l'angle que le diamètre Ox fait avec le plan diamétral zOy, $dx \sin\lambda$ est l'épaisseur de la tranche; le volume de cette tranche sera donc

$$\pi bc \sin\theta \sin\lambda \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx.$$

Par suite, $x = \alpha$, $x = \beta$ étant les équations des plans AL, BM, le volume V du segment sera

$$V = \frac{\pi bc \sin\theta \sin\lambda}{a^2} \int_\alpha^\beta (a^2 - x^2)\, dx,$$

ce qui donne, en intégrant,

$$(2)\qquad V = \frac{\pi bc \sin\theta \sin\lambda}{3a^2}(\beta - \alpha)(3a^2 - \alpha^2 - \alpha\beta - \beta^2).$$

Maintenant le centre de gravité G du segment ALBM est sur le diamètre Ox, et comme l'abscisse du centre de gravité de la tranche infiniment petite diffère infiniment peu de x,

$$\pi \frac{bc \sin\theta \sin\lambda}{a^2}(a^2 - x^2)\, x\, dx$$

sera le moment de cette tranche par rapport au plan zOy et à la direction Ox. D'un autre côté, si $OG = x_1$, Vx_1 sera le moment du segment. On aura donc

$$Vx_1 = \frac{\pi bc \sin\theta \sin\lambda}{a^2}\int_\alpha^\beta (a^2 - x^2)\, x\, dx$$

ou

$$Vx_1 = \frac{\pi bc \sin\theta \sin\lambda}{4a^2}(\beta^2 - \alpha^2)(2a^2 - \alpha^2 - \beta^2),$$

d'où, en divisant par V,

$$(3)\qquad x_1 = \frac{3(\alpha + \beta)(2a^2 - \alpha^2 - \beta^2)}{4(3a^2 - \alpha^2 - \alpha\beta - \beta^2)}.$$

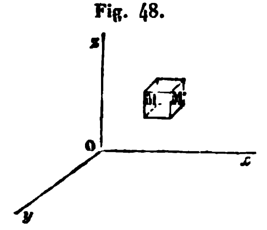
On doit remarquer que x_1 ne dépend ni des diamètres $2b$ et $2c$, ni des angles θ et λ, en sorte que cette formule donne immédiatement l'abscisse du centre de gravité d'un segment sphérique dont le rayon est a et dont α et β sont les distances des bases au centre de la sphère.

CENTRE DE GRAVITÉ D'UN CORPS QUELCONQUE.

102. Supposons le corps rapporté à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz. Si l'on mène une infinité de plans parallèles au plan xOy, on partagera le solide en une

infinité de tranches dont les bases seront parallèles à ce plan; en menant des plans parallèles au plan zOx, on décomposera chaque tranche en une infinité de petits filets prismatiques ayant toutes leurs arêtes perpendiculaires au plan zOy, et enfin au moyen de plans parallèles au plan zOy, chacun de ces filets se trouvera partagé en une infinité de parallélipipèdes infiniment petits dans toutes leurs dimensions.

Fig. 48.



Soient $M(x, y, z)$ et $M'(x + dx, y + dy, z + dz)$ deux sommets opposés d'un de ces parallélipipèdes infiniment petits. Son volume sera $dx\,dy\,dz$, et par conséquent, si V est le volume du solide tout entier, on aura

$$(1) \qquad V = \int\int\int dx\,dy\,dz.$$

Si le corps est homogène, cette intégrale triple pourra être considérée comme représentant le poids du corps. Si le corps n'est pas homogène, le poids de l'élément MM' sera représenté par $\rho\,dx\,dy\,dz$ et le poids du solide entier P par la formule

$$(2) \qquad P = \int\int\int \rho\,dx\,dy\,dz,$$

ρ désignant la densité du corps au point (x, y, z). On suppose que ρ est une fonction continue des coordonnées, fonction qui peut être considérée comme ayant sensiblement la même valeur dans toute l'étendue d'un élément infiniment petit.

Voici maintenant comment on devra effectuer l'intégration indiquée. L'équation de la surface du corps donne, en général, pour un système de valeurs de x et de y, deux valeurs de z : soient $f(x, y)$ la plus petite, et $F(x, y)$ la plus grande de ces valeurs. On commencera

par chercher l'intégrale

$$\int_{f(x,y)}^{F(x,y)} \rho\,dz,$$

en regardant x et y comme des constantes.

Imaginons maintenant que, de l'équation de la trace sur le plan des xy d'un cylindre parallèle à Oz et circonscrit à la surface du corps, on tire

$$y=\varphi(x), \quad y=\Phi(x),$$

la première étant la plus petite et la seconde la plus grande des valeurs de y qui correspondent à une valeur attribuée à x. En regardant x comme une constante, on cherchera l'intégrale définie

$$\int_{\varphi(x)}^{\Phi(x)} dy \int_{f(x,y)}^{F(x,y)} \rho\,dz.$$

Enfin

$$x=a, \quad x=b$$

étant les équations de deux plans parallèles au plan zOy, l'un mené par le point le plus rapproché, l'autre par le point le plus éloigné de ce plan sur la surface du solide, on aura

$$(3) \qquad P=\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\Phi(x)} dy \int_{f(x,y)}^{F(x,y)} \rho\,dz.$$

103. Pour trouver maintenant le centre de gravité (x_1, y_1, z_1) du solide, observons que $x\rho\,dV$, $y\rho\,dV$, $z\rho\,dV$ seront les moments du parallélipipède MM′ par rapport aux plans coordonnés, en regardant x, y, z comme les coordonnées du centre de gravité de ce parallélipipède. On aura donc, d'après le théorème des moments,

$$(4) \qquad \begin{cases} Px_1=\int\int\int x\rho\,dV, \\ Py_1=\int\int\int y\rho\,dV, \\ Pz_1=\int\int\int z\rho\,dV. \end{cases}$$

Si le corps était homogène, le facteur constant ρ pourrait sortir du signe d'intégration et, en remplaçant $\frac{P}{\rho}$ par V, on aurait

$$(5)\qquad \begin{cases} V x_1 = \int\int\int x\, dV, \\ V y_1 = \int\int\int y\, dV, \\ V z_1 = \int\int\int z\, dV. \end{cases}$$

Les limites de ces intégrales sont les mêmes que pour l'intégrale qui représente le volume

HUITIÈME LEÇON.

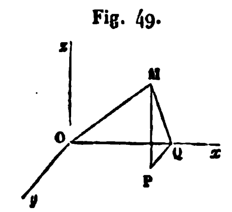
VOLUME ET CENTRE DE GRAVITÉ DES CORPS RAPPORTÉS A DES COORDONNÉES POLAIRES.

Coordonnées polaires. — Poids et volume d'un corps rapporté à des coordonnées polaires. — Coordonnées polaires du centre de gravité. — Limites des intégrales qui entrent dans les formules précédentes. — Application.

COORDONNÉES POLAIRES.

104. Soient $z = \mathrm{MP}$, $y = \mathrm{PQ}$, $x = \mathrm{OQ}$ les coordonnées rectangulaires d'un point M. Ce point peut être déterminé par sa distance $\mathrm{OM} = r$ à un point fixe O, par l'angle $\mathrm{MO}x = \theta$ que fait le rayon vecteur OM avec l'axe fixe $\mathrm{O}x$, enfin par l'angle $\mathrm{MQP} = \psi$ que le plan $\mathrm{MO}x$ fait avec le plan fixe $x\mathrm{O}y$. Les quantités r, θ, ψ sont dites les coordonnées polaires du point M.

Fig. 49.



On voit que les coordonnées polaires déterminent le point M par l'intersection de trois surfaces, savoir une *sphère* décrite du point O comme centre avec r pour rayon : un *cône* de révolution dont $\mathrm{O}x$ est l'axe et dont la génératrice fait avec l'axe un angle θ; enfin un *plan* passant par $\mathrm{O}x$ et faisant un angle ψ avec le plan $x\mathrm{O}y$.

105. Les formules propres à passer des coordonnées rectangulaires x, y, z aux coordonnées polaires r, θ, ψ se tirent immédiatement de la considération des triangles MOQ et MPQ, qui donnent

$$(1) \quad \begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta\cos\psi, \\ z = r\sin\theta\sin\psi. \end{cases}$$

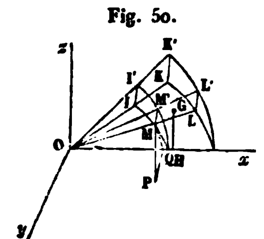
106. Inversement, pour passer du second système au premier, on aura les formules

$$(2)\qquad \begin{cases} r = z\sqrt{x^2+y^2+z^2}, \\ \tang\psi = \dfrac{z}{y}, \\ \cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}. \end{cases}$$

POIDS ET VOLUME DES CORPS RAPPORTÉS À DES COORDONNÉES POLAIRES.

107. Soit M (r, θ, ψ) un point pris dans le corps considéré. Décrivons dans le plan MOx et du point O comme centre deux arcs de cercle MI et LK, avec les rayons OM $= r$ et OL $= r + \Delta r$, terminés à la droite OK telle que LOK $= \Delta\theta$.

Fig. 50.



Si l'on imagine que le quadrilatère plan IMLK tourne autour de Ox d'un angle $\Delta\psi$ et vienne en I'M'L'K', nous obtiendrons un petit solide MK' que nous prendrons pour l'élément du volume total. D'après le théorème de Guldin (90), MK' aura pour mesure l'aire IMLK multipliée par l'arc de cercle que décrit le centre de gravité G de cette aire. Or

$$\text{IMLK} = \text{OKL} - \text{OMI} = \frac{1}{2}(r+\Delta r)^2\Delta\theta - \frac{1}{2}r^2\Delta\theta,$$

ou bien

$$\text{IMLK} = \left(r + \frac{1}{2}\Delta r\right)\Delta r\Delta\theta.$$

D'un autre côté, si u est la perpendiculaire GH abaissée du point G sur l'axe Ox, l'arc décrit par le point G sera égal à $u\Delta\psi$. Mais le point G étant compris dans l'inté-

rieur du quadrilatère IKLM, peut devenir aussi voisin que l'on voudra du point M en prenant $\Delta\theta$ et $\Delta\psi$ assez petits. Par conséquent, GH différera peu de la perpendiculaire $MQ = r\sin\theta$ abaissée du point M sur l'axe Ox : on aura donc

$$(1) \qquad u = r\sin\theta + \alpha,$$

α désignant une quantité qui tend vers o en même temps que Δr et $\Delta\theta$; et par suite

$$(2) \qquad \Delta V = (r\sin\theta + \alpha)\left(r + \frac{1}{2}\Delta r\right)\Delta r\Delta\theta\Delta\psi.$$

Mais si l'on appelle ρ la densité du solide au point M, $\rho + 6$ sera la densité moyenne de l'élément de volume ΔV, 6 devenant nul à la limite. En appelant ΔP le poids de cet élément, on aura donc

$$\Delta P = (\rho + 6)\Delta V$$

et par suite

$$(3) \qquad \Delta P = (\rho + 6)(r\sin\theta + \alpha)\left(r + \frac{1}{2}\Delta r\right)\Delta r\Delta\theta\Delta\psi.$$

De là on conclut, en désignant par γ un infiniment petit,

$$P = \Sigma\rho r^2\sin\theta\Delta r\Delta\theta\Delta\psi + \Sigma\gamma\Delta r\Delta\theta\Delta\psi.$$

Or, si l'on suppose les accroissements Δr, $\Delta\theta$, $\Delta\psi$ de plus en plus petits, on a

$$\lim\Sigma\gamma\Delta r\Delta\theta\Delta\psi = 0,$$

$$\lim\Sigma\rho r^2\sin\theta\Delta r\Delta\theta\Delta\psi = \int\int\int\rho r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\psi.$$

Donc

$$(4) \qquad P = \int\int\int\rho r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\psi,$$

relation que l'on aurait pu obtenir plus rapidement par la méthode des infiniment petits.

Quand le corps est homogène, ρ est une constante qu'on peut faire sortir du signe d'intégration, et si l'on observe

que $\frac{P}{\rho}$ est égal au volume V du corps, on aura

$$(5) \qquad V = \int\int\int r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\psi.$$

COORDONNÉES POLAIRES DU CENTRE DE GRAVITÉ D'UN CORPS.

108. En posant $dP = \rho r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\psi$, un raisonnement analogue à celui que nous venons de faire nous donnera, pour les moments du solide par rapport aux trois plans coordonnés, les intégrales

$$\int\int\int x dP, \quad \int\int\int y dP, \quad \int\int\int z dP,$$

et comme ces moments sont aussi égaux à Px_1, Py_1, Pz_1, on aura finalement, pour déterminer les coordonnées rectangulaires du centre de gravité solide, les formules suivantes :

$$(4) \qquad P = \int\int\int \rho r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\psi,$$

$$(6) \qquad \begin{cases} Px_1 = \int\int\int \rho r^3 \sin\theta \cos\theta \, dr \, d\theta \, d\psi, \\ Py_1 = \int\int\int \rho r^3 \sin^2\theta \cos\psi \, dr \, d\theta \, d\psi, \\ Pz_1 = \int\int\int \rho r^3 \sin^2\theta \sin\psi \, dr \, d\theta \, d\psi. \end{cases}$$

On obtiendrait ensuite les coordonnées polaires ρ_1, θ_1, ψ_1, du centre de gravité à l'aide des formules du n° 106.

LIMITES DES INTÉGRALES PRÉCÉDENTES.

109. Quant aux limites de ces intégrales, il faut distinguer deux cas, suivant que l'origine des coordonnées est dans le corps ou hors du corps.

Dans le premier cas, 1° on intégrera d'abord par rapport à r en regardant θ, ψ, $d\theta$, $d\psi$ comme des constantes,

depuis $r = 0$ jusqu'à $r = f(\theta, \psi)$, l'équation polaire de la surface du corps résolue par rapport à r étant

$$r = f(\theta, \psi).$$

On aura ainsi le poids et le centre de gravité d'une pyramide infiniment petite ayant son sommet au point O, et dont les quatre arêtes seraient les droites OL, OK, OL', OK', qui correspondent aux angles θ et ψ.

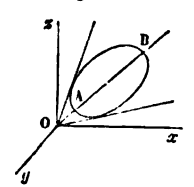
2° On intégrera ensuite par rapport à θ, en regardant ψ et $d\psi$ comme des constantes, depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = \pi$, ce qui donnera le poids et le centre de gravité d'une tranche infiniment mince comprise entre deux plans infiniment voisins passant par Ox et correspondant à un angle ψ.

3° Enfin, on aura le résultat définitif en intégrant les quatre expressions trouvées par rapport à ψ entre les limites $\psi = 0$ et $\psi = 2\pi$. D'après cela, la formule qui donne P pourra s'écrire

$$P = \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{f(\theta, \psi)} \rho r^2 dr.$$

110. Si le point O est extérieur, on intégrera d'abord, par rapport à r, entre les limites

Fig. 51.



$$r = f(\theta, \psi), \quad r = F(\theta, \psi),$$

en supposant que l'équation de la surface, résolue par rapport à r, donne pour cette variable les deux valeurs

$$r = OA = f(\theta, \psi), \quad r = OB = F(\theta, \psi).$$

Soient maintenant θ' et θ'' les angles que les tangentes menées par le point O à la courbe d'intersection de la surface et du plan MOx font avec l'axe Ox. On intégrera par rapport à θ depuis θ' jusqu'à θ''. Enfin, on intégrera par rapport à ψ depuis $\psi = \alpha$ jusqu'à $\psi = \beta$, α et β

étant les valeurs de ψ correspondant à deux plans menés par Ox, et tangents à la surface.

Si l'axe Ox passait par l'intérieur du corps solide, il faudrait intégrer par rapport à ψ de $\psi = 0$ à $\psi = 2\pi$.

Enfin, dans tous les cas, on pourrait changer l'ordre des intégrations; mais les limites des intégrales ne seraient plus les mêmes.

APPLICATION.

111. Nous allons appliquer les formules précédentes à la recherche du centre de gravité d'un corps homogène, terminé par deux surfaces sphériques concentriques de rayons a et b et par la surface d'un cône droit ayant son sommet au centre commun des deux sphères.

Prenons pour origine ce centre et pour axe des x l'axe du cône. Le centre de gravité sera évidemment situé sur cette droite. Nous n'aurons donc que la seule coordonnée x_1 à déterminer au moyen des formules

$$(1) \qquad V = \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\alpha} \sin\theta \, d\theta \int_a^b r^2 \, dr,$$

$$(2) \qquad V x_1 = \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\alpha} \sin\theta \cos\theta \, d\theta \int_a^b r^3 \, dr.$$

Or, on a

$$\int_a^b r^2 \, dr = \frac{b^3 - a^3}{3},$$

$$\int_0^{\alpha} \sin\theta \, d\theta = 1 - \cos\alpha = 2 \sin^2 \frac{1}{2}\alpha,$$

$$\int_0^{2\pi} d\psi = 2\pi;$$

donc

$$(3) \qquad V = \frac{4\pi}{3}(b^3 - a^3) \sin^2 \frac{1}{2}\alpha.$$

On aura ensuite

$$\int_a^b r^3\,dr = \frac{b^4 - a^4}{4},$$

$$\int_0^\alpha \sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\int_0^\alpha \sin 2\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\sin^2\alpha;$$

donc

$$(4)\qquad \mathrm{V}x_1 = \pi \sin^2\alpha\, \frac{b^4 - a^4}{4},$$

et, en divisant (4) par (3),

$$x_1 = \frac{3}{16}\,\frac{b^4 - a^4}{b^3 - a^3}\,\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\frac{1}{2}\alpha}$$

ou

$$(5)\qquad x_1 = \frac{3}{4}\,\frac{b^4 - a^4}{b^3 - a^3}\cos^2\frac{1}{2}\alpha.$$

Si $a = 0$ et $\alpha = 90^\circ$, on trouve

$$x_1 = \frac{3}{8}\,b.$$

Ainsi, le centre de gravité d'une demi-sphère est situé à une distance du centre égale aux trois huitièmes du rayon, comme on le trouverait par la formule du n° 99.

NEUVIÈME LEÇON.

ATTRACTION DES CORPS.

Loi de l'attraction. — Attraction d'une couche sphérique. — Attraction de deux sphères. — Formules générales. — Réduction des intégrales générales à une seule. — Propriétés de la fonction V.

LOI DE L'ATTRACTION.

112. Tous les corps de la nature s'attirent mutuellement, et l'intensité de l'attraction pour deux corps est *proportionnelle aux masses ou quantités de matière de ces corps et en raison inverse du carré de leur distance.*

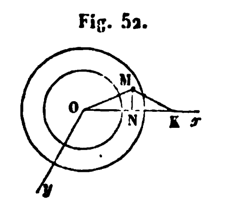
Pour éclaircir cet énoncé, supposons que deux corps de dimensions et de formes quelconques, ayant chacun une masse égale à l'unité, s'attirent mutuellement, et concevons que cette attraction ne varie ni en grandeur ni en direction dans toute l'étendue de ces deux corps, en sorte qu'elle soit la même entre deux points matériels a et b de ces deux corps que celle qui aurait lieu entre ces deux points s'ils étaient placés à l'unité de distance l'un de l'autre. Appelons f l'attraction totale exercée par l'un de ces deux corps sur l'autre. La loi énoncée plus haut signifie que si deux points matériels ont des masses μ et μ' et sont placés à une distance u l'un de l'autre, l'attraction exercée par l'un d'eux sur l'autre sera mesurée par $\frac{f\mu\mu'}{u^2}$.

ATTRACTION D'UNE COUCHE SPHÉRIQUE.

113. Considérons une couche homogène comprise entre deux sphères concentriques dont les rayons soient b et c, et cherchons à déterminer l'attraction exercée par

la couche sur un point matériel K extérieur à cette couche.

Fig. 52.



Soit M un point matériel de la couche; nommons μ' sa masse et r, θ, ψ ses coordonnées polaires, en prenant le point O pour pôle, pour axe polaire la droite Ox qui passe par le point K, et enfin pour plan fixe le plan xOy. Posons en outre

$$OK = a, \quad MK = u.$$

En nommant dV l'élément de volume de la couche, on a (107)

$$dV = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\psi,$$

et par conséquent, si ρ est la densité de la substance dont la couche est formée, on a

$$\mu' = \rho \, dV = \rho r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\psi.$$

L'attraction exercée par le point matériel M sur le point K aura pour expression (112)

$$\frac{f\mu\mu'}{u^2},$$

c'est-à-dire

$$\frac{f\mu\rho r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\psi}{u^2}$$

114. Les attractions exercées par tous les points de la couche sphérique sur le point K sont des forces appliquées en ce point, et dont la résultante doit être dirigée suivant KO, car tout est symétrique autour de cette droite. Il suffira donc d'évaluer la somme des composantes partielles dirigées suivant KO. Or, la composante suivant KO de l'attraction mutuelle des points M et K est

$$\frac{f\mu\mu'}{u^2} \cos MKO = \frac{f\mu\mu'}{u^2} \frac{a^2 + u^2 - r^2}{2au}$$

ou, en remplaçant μ' par sa valeur,

$$f\mu\rho r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\psi \frac{a^2 + u^2 - r^2}{2au^3};$$

mais on a

$$u^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta,$$

d'où

$$u\,du = ar\sin\theta\, d\theta.$$

Donc l'expression ci-dessus peut s'écrire

$$\frac{f\mu\rho\, r\, dr\, du\, d\psi}{2a^2}\left(1 + \frac{a^2 - r^2}{u^2}\right).$$

115. Pour intégrer cette expression, on remarquera d'abord que ψ n'y entre que par sa différentielle, car u et r sont indépendants de ψ. En intégrant par rapport à ψ, depuis zéro jusqu'à 2π, on aura donc

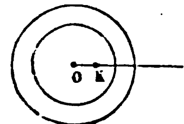
$$\frac{\pi f\mu\rho}{a^2}\int r\,dr \int\left(1 + \frac{a^2 - r^2}{u^2}\right)du.$$

Intégrant par rapport à u, on aura d'abord pour l'intégrale indéfinie

$$\int\left(1 + \frac{a^2 - r^2}{u^2}\right)du = u + \frac{r^2 - a^2}{u} + \text{C}.$$

116. Maintenant si le point K est situé entre le centre et la couche sphérique, comme la distance

Fig. 53.



$$u = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta}$$

doit être positive et que les limites de θ sont zéro et π, les limites correspondantes de u seront $r - a$ et $r + a$ · mais

$$\int_{r-a}^{r+a}\left(1 + \frac{a^2 - r^2}{u^2}\right)du = 0.$$

Il résulte de là qu'en multipliant par $\frac{\pi f\mu r d}{a^2}$ et inté-

grant par rapport à r, on aura une constante pour l'intégrale indéfinie, et par suite zéro pour l'intégrale définie. On a donc ce théorème :

La résultante des attractions de tous les points matériels d'une couche sphérique homogène sur un point matériel placé dans son intérieur est nulle.

117. En second lieu, si le point K est situé à l'extérieur de la couche, après avoir intégré par rapport à ψ, il faudra intégrer par rapport à u de $u = a - r$ à $u = a + r$, valeurs extrêmes de u : or

$$\int_{a-r}^{a+r}\left(1 + \frac{a^2-r^2}{u^2}\right)du = a+r-a+r-(a-r-r-a) = 4r;$$

par suite, en intégrant entre les limites b et c l'expression $\frac{4\pi f\mu\rho r^2}{a^2}dr$, on aura

$$\frac{4}{3}\pi(c^3-b^3)\frac{f\mu\rho}{a^2}.$$

On peut simplifier ce résultat, en observant que si m est la masse de la couche sphérique, ρ étant sa densité et $\frac{4}{3}\pi(c^3-b^3)$ son volume, on a

$$m = \frac{4}{3}\pi(c^3-b^3)\rho,$$

d'où résulte que l'attraction exercée sur le point est

$$\frac{f\mu m}{a^2}.$$

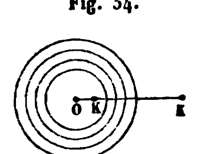
De là ce théorème :

L'attraction exercée par une couche sphérique homogène sur un point matériel extérieur à cette couche est égale à celle qu'éprouverait ce point si toute la masse de la couche était réunie à son centre.

118. Les résultats trouvés (116 et 117) s'étendent au

cas d'un corps composé de couches sphériques et concentriques dont la densité varie de l'une à l'autre suivant une loi quelconque, mais de telle sorte que cette densité reste constante dans toute l'étendue d'une même couche.

Fig. 54.

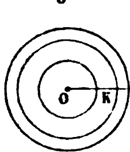


En effet, si le point K est dans l'intérieur du corps, la résultante des actions de chaque couche élémentaire étant nulle, l'attraction totale est bien nulle aussi.

En second lieu, si le point est à l'extérieur du corps, chaque couche élémentaire agissant comme si toute sa masse était concentrée en son centre, l'attraction du corps tout entier sur ce même point sera la même que si la masse totale était réunie au centre.

119. Si le point K fait partie de la masse attirante, on concevra celle-ci partagée en deux couches sphériques concentriques au moyen d'une sphère de même centre passant par ce point. L'attraction totale exercée sur le point par la couche extérieure sera nulle et le point sera seulement attiré par la seconde couche, comme si toute la masse de celle-ci était réunie au centre.

Fig. 55



120. Quand le rayon intérieur de la couche sphérique est nul, c'est-à-dire dans le cas de la sphère, les résultats précédents subsistent encore. En supposant la sphère homogène, $\frac{4\pi a^3}{3}\rho$ est la partie de sa masse qui agit sur le point considéré et l'attraction a pour valeur $\frac{4}{3}\pi f \mu \rho a$; ainsi *l'attraction d'une sphère sur un point intérieur est proportionnelle à la distance du point attiré au centre.*

121. Au contraire, si le point attiré est extérieur à la

sphère, l'attraction exercée sur ce point sera réciproquement proportionnelle au carré de sa distance au centre et aura pour mesure $\frac{4}{3}\pi f \mu \rho \frac{c^3}{a^2}$. Du reste la comparaison des expressions $\frac{4}{3}\pi f \mu \rho \frac{c^3}{a^2}$ et $\frac{4}{3}\pi f \mu \rho a$ fait voir que l'attraction a sa plus grande valeur quand $a = c$, c'est-à-dire quand le point est à la surface de la sphère et que cette attraction est nulle pour $a = 0$ ainsi que pour $a = \infty$, ce qu'il était facile de reconnaître *à priori*.

ATTRACTION DE DEUX SPHÈRES.

122. Soient deux sphères de rayons a et b et dont les centres soient à une distance c l'un de l'autre.

Tous les points matériels de la première sphère attirent une molécule de la seconde comme s'ils étaient réunis au centre de la première. On peut donc remplacer celle-ci par un point matériel de masse $\frac{4}{3}\pi\rho a^3$. L'attraction exercée par la seconde sphère sur ce point matériel étant la même que si la masse $\frac{4}{3}\pi\rho' b^3$ de celle-ci était réunie à son centre, il en résulte que l'attraction mutuelle des deux sphères sera égale à

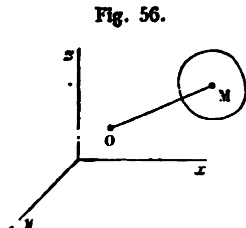
$$\frac{16}{9}\frac{\pi^2 \rho\rho' a^3 b^3}{c^2}.$$

Ainsi deux sphères homogènes (ou composées de couches homogènes dont la densité varie d'une couche à l'autre) s'attirent comme deux molécules de même masse placées à leurs centres respectifs.

FORMULES GÉNÉRALES.

123. L'attraction exercée par un point M (x, y, z) de masse dm sur un point O $(\alpha, 6, \gamma)$ dont la masse est μ

Fig. 56.



est égale à

$$\frac{\mu\, dm}{u^2},$$

et les composantes de cette attraction élémentaire, parallèles aux axes de coordonnées, sont

$$\frac{f\mu(\alpha - x)}{u^3}\,dm, \quad \frac{f\mu(\beta - x)}{u^3}\,dm, \quad \frac{f\mu(\gamma - x)}{u^3}\,dm,$$

en regardant ces composantes comme positives quand elles tendent à diminuer les coordonnées du point attiré.

Pour avoir les composantes A, B, C de l'attraction totale exercée par tous les points du corps attirant, il faudra intégrer les expressions précédentes dans toute l'étendue de ce corps. On aura ainsi

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} A &= f\mu\int\int\int \frac{\alpha - x}{u^3}\,dm,\\ B &= f\mu\int\int\int \frac{\beta - y}{u^3}\,dm,\\ C &= f\mu\int\int\int \frac{\gamma - z}{u^3}\,dm.\end{aligned}\right.$$

124. Pour rendre l'intégration plus facile, transportons l'origine au point attiré et désignons par g, h, l les angles que la droite OM fait avec les axes de coordonnées. On a

$$\cos g = \frac{x - \alpha}{u}, \quad \cos h = \frac{y - \beta}{u}, \quad \cos k = \frac{z - \gamma}{u}.$$

Prenons en même temps des coordonnées polaires u, θ, ψ liées aux angles g, h, l par les formules

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \cos g &= \cos\theta,\\ \cos h &= \sin\theta\cos\psi,\\ \cos k &= \sin\theta\sin\psi\end{aligned}\right.$$

[ce qu'on voit en faisant u ou $r = 1$ (105)]. D'ailleurs on a

$$dm = \rho u^2 du \sin\theta\, d\theta\, d\psi.$$

On aura donc

$$(3)\qquad \left\{ \begin{aligned} A &= -f\mu \int\int\int \rho \cos g\, du \sin\theta\, d\theta\, d\psi, \\ B &= -f\mu \int\int\int \rho \cos h\, du \sin\theta\, d\theta\, d\psi, \\ C &= -f\mu \int\int\int \rho \cos k\, du \sin\theta\, d\theta\, d\psi. \end{aligned} \right.$$

Si le point O est intérieur, il faut intégrer par rapport à u depuis $u = 0$ jusqu'à $u = R$, R désignant le rayon vecteur terminé à la surface du corps; par rapport à θ, depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = \pi$; par rapport à ψ, depuis $\psi = 0$ jusqu'à $\psi = 2\pi$.

RÉDUCTION DES INTÉGRALES GÉNÉRALES A UNE SEULE.

125. Les intégrales comprises dans les formules (1) peuvent être ramenées à la seule intégrale triple

$$(4)\qquad V = \int\int\int \frac{dm}{u},$$

étendue à toute la masse du corps.

En effet, puisque

$$u^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2$$

on aura

$$(5)\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dV}{d\alpha} &= -\int\int\int \frac{(\alpha - x)\, dm}{u^3}, \\ \frac{dV}{d\beta} &= -\int\int\int \frac{(\beta - y)\, dm}{u^3}, \\ \frac{dV}{d\gamma} &= -\int\int\int \frac{(\gamma - z)\, dm}{u^3}, \end{aligned} \right.$$

par suite (123)

$$(6)\quad \begin{cases} A = -f\mu \dfrac{dV}{d\alpha}, \\ B = -f\mu \dfrac{dV}{d\beta}, \\ C = -f\mu \dfrac{dV}{d\gamma}. \end{cases}$$

Ainsi tout le calcul se réduit à la détermination de la fonction V.

PROPRIÉTÉS DE LA FONCTION V.

126. Si le point attiré est extérieur, la différentielle $\frac{dm}{u}$ ne devient pas infinie dans les limites de l'intégration. On peut donc appliquer les règles de la différentiation sous le signe à l'intégrale définie

$$(1)\quad V = \int\int\int \frac{dm}{u}$$

et l'on en tirera

$$(2)\quad \frac{d^2V}{d\alpha^2} + \frac{d^2V}{d\beta^2} + \frac{d^2V}{d\gamma^2} = \int\int\int dm \left(\frac{d^2\frac{1}{u}}{d\alpha^2} + \frac{d^2\frac{1}{u}}{d\beta^2} + \frac{d^2\frac{1}{u}}{d\gamma^2} \right).$$

Mais à cause de

$$u = \sqrt{(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 + (\gamma - z)^2}$$

on a

$$(3)\quad \frac{d\frac{1}{u}}{d\alpha} = \frac{x - \alpha}{u^3},$$

$$(4)\quad \frac{d^2\frac{1}{u}}{d\alpha^2} = \frac{3(x - \alpha)^2 - u^2}{u^5}.$$

On conclut de cette dernière égalité

$$(5)\qquad \frac{d^2\frac{1}{u}}{d\alpha^2}+\frac{d^2\frac{1}{u}}{d\beta^2}+\frac{d^2\frac{1}{u}}{d\gamma^2}=0.$$

Le second membre de l'équation (2) est donc nul, et l'on a

$$(6)\qquad \frac{d^2V}{d\alpha^2}+\frac{d^2V}{d\beta^2}+\frac{d^2V}{d\gamma^2}=0.$$

127. Si le point attiré est intérieur, on part des formules (6) du n° **125**; en les différentiant on a

$$\frac{d^2V}{d\alpha^2}+\frac{d^2V}{d\beta^2}+\frac{d^2V}{d\gamma^2}=-\frac{1}{f\rho}\left(\frac{dA}{d\alpha}+\frac{dB}{d\beta}+\frac{dC}{d\gamma}\right)$$

ou, en vertu des formules (3) du n° **124**,

$$\begin{aligned}\frac{d^2V}{d\alpha^2}+\frac{d^2V}{d\beta^2}+\frac{d^2V}{d\gamma^2}=\frac{d}{d\alpha}&\int\int\int\rho\cos g\sin\theta\,du\,d\theta\,d\psi\\ +\frac{d}{d\beta}&\int\int\int\rho\cos h\sin\theta\,du\,d\theta\,d\psi\\ +\frac{d}{d\gamma}&\int\int\int\rho\cos k\sin\theta\,du\,d\theta\,d\psi.\end{aligned}$$

Si l'on effectue les différentiations en appliquant les règles relatives au cas où les limites d'intégration sont variables, on trouve

$$\begin{aligned}&\frac{d^2V}{d\alpha^2}+\frac{d^2V}{d\beta^2}+\frac{d^2V}{d\gamma^2}\\ &=\int\int\int\sin\theta\,du\,d\theta\,d\psi\left(\cos g\frac{d\rho}{d\alpha}+\cos h\frac{d\rho}{d\beta}+\cos k\frac{d\rho}{d\gamma}\right)\\ &\quad+\int\int\rho_1\sin\theta\,d\theta\,d\psi\left(\cos g\frac{dR}{d\alpha}+\cos h\frac{dR}{d\beta}+\cos k\frac{dR}{d\gamma}\right),\end{aligned}$$

ρ_1 et R désignant les valeurs de ρ et de u à la surface. On

a d'ailleurs

$$\cos g \frac{d\rho}{d\alpha} + \cos h \frac{d\rho}{d\beta} + \cos k \frac{d\rho}{d\gamma} = \frac{d\rho}{du},$$

$$\cos g \frac{dR}{d\alpha} + \cos h \frac{dR}{d\beta} + \cos k \frac{dR}{d\gamma} = -1.$$

Par conséquent

$$\frac{d^2V}{d\alpha^2} + \frac{d^2V}{d\beta^2} + \frac{d^2V}{d\gamma^2} = \int\int\int \sin\theta\, d\theta\, d\psi \frac{d\rho}{du} du$$
$$- \int\int \rho_2 \sin\theta\, d\theta\, d\psi.$$

Mais si l'on désigne par ρ_1 la densité du corps au point O, on a

$$\int\int\int \sin\theta\, d\theta\, d\psi \frac{d\rho}{du} du = 2\pi \int_0^\pi (\rho_2 - \rho_1) \sin\theta\, d\theta$$
$$= -4\pi\rho_1 + \int\int \rho_2 \sin\theta\, d\theta\, d\psi :$$

donc

(7) $$\frac{d^2V}{d\alpha^2} + \frac{d^2V}{d\beta^2} + \frac{d^2V}{d\gamma^2} = -4\pi\rho_1.$$

DIXIÈME LEÇON.

ATTRACTION D'UN ELLIPSOIDE HOMOGÈNE SUR UN POINT INTÉRIEUR.

Formules relatives à l'ellipsoïde. — Conséquences de ces formules. — Suite de l'intégration. — Formules de Jacobi. — Cas où l'ellipsoïde est peu différent de la sphère.

FORMULES RELATIVES À L'ELLIPSOÏDE.

128. Proposons-nous de trouver l'attraction de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{1}$$

sur un point intérieur (α, β, γ).

Pour avoir la valeur de R, il faut faire

$$\begin{cases} x=\alpha+u\cos g,\\ y=\beta+u\cos h,\\ z=\gamma+u\cos k, \end{cases} \tag{2}$$

dans l'équation (1), ce qui donne

$$pu^2+2qu=l, \tag{3}$$

en posant

$$\begin{cases} p=\dfrac{\cos^2 g}{a^2}+\dfrac{\cos^2 h}{b^2}+\dfrac{\cos^2 k}{c^2},\\ q=\dfrac{\alpha\cos g}{a^2}+\dfrac{\beta\cos h}{b^2}+\dfrac{\gamma\cos k}{c^2},\\ l=1-\dfrac{\alpha^2}{a^2}-\dfrac{\beta^2}{b^2}-\dfrac{\gamma^2}{c^2}. \end{cases} \tag{4}$$

On tire de l'équation (3)

$$u=\frac{-q\pm\sqrt{q^2+pl}}{p}.$$

Comme p et l sont positives, on a deux valeurs de u, l'une positive, qui est $\frac{-q+\sqrt{q^2+pl}}{p}$, l'autre négative, qu'il faut rejeter, car le rayon vecteur est une quantité positive, sa direction étant déterminée par les angles g, h, k, qui peuvent être aigus ou obtus. On prend donc

$$R = \frac{-q+\sqrt{q^2+pl}}{p},$$

et l'on a, en intégrant par rapport à u la première des formules (3) du n° 124 et en omettant le facteur constant $f\mu\rho$,

$$A = -\int\int R \cos g \sin\theta \, d\theta \, d\psi$$

ou

$$(4) \qquad A = \int\int \frac{q-\sqrt{q^2+pl}}{p} \cos g \sin\theta \, d\theta \, d\psi,$$

et de même

$$(5) \qquad B = \int\int \frac{q-\sqrt{q^2+pl}}{p} \cos h \sin\theta \, d\theta \, d\psi,$$

$$(6) \qquad C = \int\int \frac{q-\sqrt{q^2+pl}}{p} \cos k \sin\theta \, d\theta \, d\psi.$$

129. On peut supprimer le radical $\sqrt{q^2+pl}$ dans ces formules. Par exemple, la partie

$$\int\int \frac{\sqrt{q^2+pl}}{p} \cos g \sin\theta \, d\theta \, d\psi,$$

qui entre dans la formule (4), est nulle, car si l'on considère un élément de l'intégrale double correspondant à une certaine direction (θ, ψ) du rayon vecteur, puis l'élément correspondant à la direction opposée $(\pi-\theta, \pi+\psi)$, $\cos g$ ou $\cos\theta$ changera de signe sans changer de valeur en passant du premier élément au second; il en sera de même de $\sin\psi$ et $\cos\psi$; quant à $\sin\theta$, il ne changera pas,

de sorte que les deux éléments, étant égaux et de signes contraires, se détruisent. La valeur de A se réduit donc à

$$A = \int\int \frac{q}{p} \cos g \sin\theta \, d\theta \, d\psi,$$

ou, en remplaçant q par sa valeur (128),

$$A = \frac{\alpha}{a^2}\int\int \frac{\cos^2 g}{p} \sin\theta \, d\theta \, d\psi + \frac{\beta}{b^2}\int\int \frac{\cos g \cos h}{p} \sin\theta \, d\theta \, d\psi$$
$$+ \frac{\gamma}{c^2}\int\int \frac{\cos g \cos k}{p} \sin\theta \, d\theta \, d\psi.$$

130. En prenant deux éléments pour lesquels θ ait deux valeurs supplémentaires tandis que ψ sera le même, ou, ce qui revient au même, deux éléments qui répondent à des valeurs supplémentaires de g et aux mêmes valeurs de h et de k, on voit que les deux dernières intégrales sont composées de parties qui se détruisent deux à deux, et A se réduit à la première intégrale. Une simplification analogue aura lieu dans les valeurs de B et de C. On aura donc

$$(7)\quad \begin{cases} A = \dfrac{\alpha}{a^2}\displaystyle\int\int \frac{\cos^2 g}{p} \sin\theta \, d\theta \, d\psi, \\ B = \dfrac{\beta}{b^2}\displaystyle\int\int \frac{\cos^2 h}{p} \sin\theta \, d\theta \, d\psi, \\ C = \dfrac{\gamma}{c^2}\displaystyle\int\int \frac{\cos^2 k}{p} \sin\theta \, d\theta \, d\psi, \end{cases}$$

ou, en remplaçant p, $\cos g$, $\cos h$, $\cos k$ par leurs valeurs (124),

$$(8)\quad \begin{cases} A = \alpha\displaystyle\int\int \frac{b^2c^2\cos^2\theta \sin\theta \, d\theta \, d\psi}{b^2c^2\cos^2\theta + a^2c^2\cos^2\psi\sin^2\theta + a^2b^2\sin^2\psi\sin^2\theta}, \\ B = \beta\displaystyle\int\int \frac{a^2c^2\sin^3\theta \cos^2\psi \, d\theta \, d\psi}{b^2c^2\cos^2\theta + a^2c^2\cos^2\psi\sin^2\theta + a^2b^2\sin^2\psi\sin^2\theta}, \\ C = \gamma\displaystyle\int\int \frac{a^2b^2\sin^3\theta \sin^2\psi \, d\theta \, d\psi}{b^2c^2\cos^2\theta + a^2c^2\cos^2\psi\sin^2\theta + a^2b^2\sin^2\psi\sin^2\theta}, \end{cases}$$

CONSÉQUENCES DES FORMULES PRÉCÉDENTES.

131. Avant d'effectuer les intégrations, on peut déduire de ces formules plusieurs conséquences.

1° Tous les points situés dans un même plan perpendiculaire à un axe sont également attirés dans le sens de cet axe, et les composantes de l'attraction sont proportionnelles aux distances du point attiré aux trois plans principaux de l'ellipsoïde. Par conséquent, cette attraction reste parallèle à une même direction pour tous les points situés sur une ligne droite passant par le centre, et elle est proportionnelle à la distance du point attiré au centre.

2° On a

$$\frac{A}{\alpha}+\frac{B}{6}+\frac{C}{\gamma}=\int\int \sin\theta\, d\theta\, d\psi = 4\pi$$

et

$$\frac{dA}{d\alpha}+\frac{dB}{d6}+\frac{dC}{d\gamma}=4\pi,$$

cas particulier de la formule (7), n° 127,

$$\frac{d^2V}{d\alpha^2}+\frac{d^2V}{d6^2}+\frac{d^2V}{d\gamma^2}=-4\pi\rho_1.$$

3° Les valeurs des composantes A, B, C ne renferment que les rapports des axes de l'ellipsoïde; elles restent donc les mêmes quand ces trois axes varient proportionnellement, c'est-à-dire deviennent na, nb, nc. Donc une couche homogène comprise entre deux surfaces ellipsoïdales concentriques, semblables et semblablement placées (homothétiques), n'a aucune action sur un point placé dans l'espace vide intérieur, et par conséquent l'action d'un ellipsoïde sur un point de sa propre masse se réduit à celle de la partie de ce corps qui est terminée par une surface concentrique et semblable à la sienne et passant par le point donné.

SUITE DE L'INTÉGRATION DES FORMULES DANS LE CAS DE L'ELLIPSOÏDE.

132. Comme la fonction sous les signes $\int\int$ dans les formules (8),

$$A = \alpha \int\int \frac{b^2c^2\cos^2\theta \sin\theta\, d\theta\, d\psi}{b^2c^2\cos^2\theta + a^2c^2\cos^2\psi\sin^2\theta + a^2b^2\sin^2\psi\sin^2\theta},$$

$$B = 6 \int\int \frac{a^2c^2\sin^3\theta\cos^2\psi\, d\theta\, d\psi}{b^2c^2\cos^2\theta + a^2c^2\cos^2\psi\sin^2\theta + a^2b^2\sin^2\psi\sin^2\theta},$$

$$C = \gamma \int\int \frac{a^2b^2\sin^3\theta\sin^2\psi\, d\theta\, d\psi}{b^2c^2\cos^2\theta + a^2c^2\cos^2\psi\sin^2\theta + a^2b^2\sin^2\psi\sin^2\theta},$$

a la même valeur pour deux valeurs de θ supplémentaires et pour des valeurs de ψ telles que φ, $\pi - \varphi$, $\pi + \varphi$, $2\pi - \varphi$, il suffira d'intégrer par rapport à θ de zéro à $\frac{\pi}{2}$ puis de doubler le résultat; et par rapport à ψ, de zéro à $\frac{\pi}{2}$ en quadruplant le résultat. Occupons-nous d'abord de la valeur de A. En mettant les limites en évidence, on aura

$$A = 8\, b^2c^2\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \sin\theta\, d\theta$$

$$\times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{b^2c^2\cos^2\theta + a^2c^2\cos^2\psi\sin^2\theta + a^2b^2\sin^2\psi\sin^2\theta}.$$

Posant

$$\tang\psi = t,$$

d'où

$$d\psi = \frac{dt}{1+t^2}, \quad \sin^2\psi = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2\psi = \frac{1}{1+t^2},$$

on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{b^2c^2\cos^2\theta + \ldots}$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{dt}{c^2(b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta) + b^2(c^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta)t^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\pi}{bc\sqrt{(b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta)(c^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta)}}$$

à cause de la formule

$$\int \frac{dt}{m + nt^2} = \frac{1}{\sqrt{mn}} \text{ arc tang}\left(t\sqrt{\frac{n}{m}}\right);$$

donc

$$A = 4\pi\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{bc\cos^2\theta \sin\theta \, d\theta}{\sqrt{(b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta)(c^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta)}}.$$

Sans nouveau calcul on déduira B et C de A par de simples permutations. On aura donc

$$(9) \left\{ \begin{aligned} A &= 4\pi\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{bc\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{(b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta)(c^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta)}}, \\ B &= 4\pi6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{ac\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)(c^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)}}, \\ C &= 4\pi\gamma \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{ab\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{(a^2\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta)(b^2\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta)}}. \end{aligned} \right.$$

Ces composantes, étant positives, tendent à rapprocher le point O du centre de l'ellipsoïde. Elles ne renferment que les rapports des axes, de sorte qu'en remplaçant *a*, *b*, *c* par *na*, *nb*, *nc* elles restent les mêmes. Ainsi *l'ellipsoïde étant augmenté d'une partie comprise entre*

sa surface et une surface semblable, l'action de la couche ajoutée sur le point intérieur est nulle (131, 3°).

133. Faisant $\cos\theta = u$, on a

$$A = 4\pi\alpha\frac{bc}{a^2}\int_0^1 \frac{u^2\,du}{\sqrt{\left(1+\frac{b^2-a^2}{a^2}u^2\right)\left(1+\frac{c^2-a^2}{a^2}u^2\right)}},$$

ou, en posant $M = \frac{4}{3}\pi abc$, $\lambda^2 = \frac{b^2-a^2}{a^2}$, $\lambda'^2 = \frac{c^2-a^2}{a^2}$,

$$(10)\qquad A = \frac{3M\alpha}{a^3}\int_0^1 \frac{u^2\,du}{\sqrt{(1+\lambda^2u^2)(1+\lambda'^2u^2)}}.$$

En permutant a et b, on a de même

$$B = 4\pi 6\frac{ac}{b^2}\int_0^1 \frac{v^2\,dv}{\sqrt{\left(1+\frac{a^2-b^2}{b^2}v^2\right)\left(1+\frac{c^2-b^2}{b^2}v^2\right)}},$$

puis, faisant $v = \frac{u\sqrt{1+\lambda^2}}{\sqrt{1+\lambda^2u^2}} = \frac{bu}{a\sqrt{1+\lambda^2u^2}}$,

$$(11)\qquad B = \frac{3M6}{a^3}\int_0^1 \frac{u^2\,du}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\lambda'^2u^2}},$$

et pour C, en posant $v = \frac{cu}{a\sqrt{1+\lambda'^2u^2}} = \frac{u\sqrt{1+\lambda'^2}}{\sqrt{1+\lambda'^2u^2}}$

$$(12)\qquad C = \frac{3M\gamma}{a^3}\int_0^1 \frac{u^2\,du}{(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\lambda^2u^2}}.$$

134. Posant

$$F = \int_0^1 \frac{u^2\,du}{\sqrt{(1+\lambda^2u^2)(1+\lambda'^2u)}},$$

on a

$$(13)\quad \begin{cases} A = \dfrac{3M\alpha}{a^3} F, \\ B = \dfrac{3M\beta}{a^3} \dfrac{d\lambda F}{d\lambda}, \\ C = \dfrac{3M\gamma}{a^3} \dfrac{d\lambda' F}{d\lambda'}. \end{cases}$$

FORMULES DE JACOBI.

135. Jacobi fait

$$u = \frac{a}{\sqrt{t+a^2}}, \quad \text{d'où} \quad du = -\frac{a\,dt}{2(t+a^2)^{\frac{3}{2}}},$$

ce qui lui donne les formules plus symétriques

$$(14)\quad \begin{cases} A = \dfrac{2\pi\alpha}{a^2}\displaystyle\int_0^\infty \dfrac{dt}{\left(1+\frac{t}{a^2}\right)\sqrt{\left(1+\frac{t}{a^2}\right)\left(1+\frac{t}{b^2}\right)\left(1+\frac{t}{c^2}\right)}}, \\ B = \dfrac{2\pi\beta}{b^2}\displaystyle\int_0^\infty \dfrac{dt}{\left(1+\frac{t}{b^2}\right)\sqrt{\left(1+\frac{t}{a^2}\right)\left(1+\frac{t}{b^2}\right)\left(1+\frac{t}{c^2}\right)}}, \\ C = \dfrac{2\pi\gamma}{c^2}\displaystyle\int_0^\infty \dfrac{dt}{\left(1+\frac{t}{c^2}\right)\sqrt{\left(1+\frac{t}{a^2}\right)\left(1+\frac{t}{b^2}\right)\left(1+\frac{t}{c^2}\right)}}. \end{cases}$$

CAS OU L'ELLIPSOÏDE EST PEU DIFFÉRENT D'UNE SPHÈRE.

136. Si l'ellipsoïde est peu différent d'une sphère, en sorte que les quantités $\frac{b^2-a^2}{a^2}$ et $\frac{c^2-a^2}{a^2}$ ou λ^2 et λ'^2 soient très-petites, on développera A [formule (10)] en série convergente. Posons à cet effet

$$\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2u^2}\sqrt{1+\lambda'^2u^2}} = 1 - P_1u^2 + P_2u^4 - P_3u^6 + \ldots,$$

on aura

$$P_1 = \frac{1}{2}(\lambda^2 + \lambda'^2),$$

$$P_2 = \frac{1.3}{2.4}(\lambda^4 + \lambda'^4) + \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\lambda^2\lambda'^2,$$

$$P_3 = \frac{1.3.5}{2.4.6}(\lambda^6 + \lambda'^6) + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{1}{2}\,\lambda^2\lambda'^2(\lambda^2 + \lambda'^2)$$

$$P_4 = \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}(\lambda^8 + \lambda'^8) + \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{1}{2}(\lambda^6\lambda'^2 + \lambda^2\lambda'^6) + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{1.3}{2.4}\,\lambda^4\lambda'^4,$$

. . . . ;

et il en résultera

$$A = \frac{3M\alpha}{a^3}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}P_1 + \frac{1}{7}P_2 - \frac{1}{9}P_3 + \ldots\right).$$

Des suites semblables exprimeront B et C.

ONZIÈME LEÇON.

SUITE DE L'ATTRACTION DES ELLIPSOIDES.

Réduction aux fonctions elliptiques des composantes de l'attraction. — Cas d'un ellipsoïde de révolution. — Théorème de Newton. — Cas d'un point extérieur. — Théorème d'Ivory.

RÉDUCTION AUX FONCTIONS ELLIPTIQUES DES COMPOSANTES DE L'ATTRACTION.

137. On peut exprimer généralement A, B, C par des fonctions elliptiques de première et de deuxième espèce.

En supposant $a < b < c$, d'où $\lambda < \lambda'$, on pose dans les valeurs de A, B, C (133)

$$\lambda' u = \operatorname{tang}\varphi, \quad e^2 = 1 - \frac{\lambda^2}{\lambda'^2}, \quad \operatorname{tang}T = \lambda' = \sqrt{\frac{c^2 - a^2}{a^2}},$$

et l'on trouve

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} A &= \frac{3M\alpha}{a^3\lambda'^3}\int_0^T \frac{\operatorname{tang}^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}}, \\ B &= \frac{3M\beta}{a^3\lambda'^3}\int_0^T \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{(1 - e^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}, \\ C &= \frac{3M\gamma}{a^3\lambda'^3}\int_0^T \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}}. \end{aligned} \right.$$

Or, on a

$$\frac{d}{d\varphi}\operatorname{tang}\varphi\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi} = \frac{1}{\cos^2\varphi}\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi} - \frac{e^2\sin^2\varphi}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}}.$$

Si l'on remplace dans cette formule $\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}$ par $\dfrac{1 - e^2\sin^2\varphi}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}}$, on trouve

$$\frac{d}{d\varphi}\operatorname{tang}\varphi\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi} = \sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi} + (1 - e^2)\frac{\operatorname{tang}^2\varphi}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}};$$

en intégrant, il vient alors

$$\int \frac{\operatorname{tang}^2 \varphi \, d\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{\operatorname{tang} \varphi \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} - \mathrm{E}(e, \varphi)}{1 - e^2}.$$

En posant, conformément à l'usage,

$$\mathrm{E}(e, \varphi) = \int_0^\varphi d\varphi \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi},$$

$$\mathrm{F}(e, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}},$$

on a de même

$$\int \frac{\sin^2 \varphi \, d\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{e^2} [\mathrm{F}(e, \varphi) - \mathrm{E}(e, \varphi)];$$

on a ensuite

$$\frac{d}{d\varphi} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$$

$$= \frac{(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)(1 - e^2 \sin^2 \varphi) + e^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi + e^2 \sin^2 \varphi (1 - \cos^2 \varphi)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\cos^2 \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} - \frac{(1 - e^2) \sin^2 \varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \left(1 - \frac{1}{e^2}\right) + \frac{1}{e^2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} - \frac{(1 - e^2) \sin^2 \varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}.$$

En intégrant, on trouve alors

$$\frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{e^2 - 1}{e^2} \mathrm{F}(e, \varphi)$$

$$+ \frac{1}{e^2} \mathrm{E}(e, \varphi) - (1 - e^2) \int \frac{\sin^2 \varphi \, d\varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}},$$

c'est-à-dire

$$\int \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{e^2}\,\mathrm{F}(e,\varphi) + \frac{1}{e^2(1-e^2)}\,\mathrm{E}(e,\varphi) - \frac{1}{(1-e^2)}\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}.$$

Les formules (1) deviennent alors

$$\mathrm{A} = 3\mathrm{M}\alpha(c^2-a^2)^{-\frac{3}{2}}(b^2-a^2)^{-1}\left[\frac{b}{ca}(c^2-a^2)^{\frac{1}{2}} - \mathrm{E}\right],$$

$$\mathrm{B} = 3\mathrm{M}\mathcal{6}\Big[-(c^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}(c^2-b^2)^{-1}\mathrm{F} + (c^2-a^2)^{\frac{1}{2}}(c^2-b^2)^{-1}(b^2-a^2)^{-1}\mathrm{E} - \frac{a}{bc}(b^2-a^2)^{-1}\Big],$$

$$\mathrm{C} = 3\mathrm{M}\gamma(\mathrm{F}-\mathrm{E})(c^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}(c^2-b^2)^{-1};$$

et dans ces équations il faut sous-entendre, devant les signes E et F, le symbole

$$\left(\sqrt{\frac{c^2-b^2}{c^2-a^2}},\quad \text{arc tang}\sqrt{\frac{c^2-a^2}{a^2}}\right).$$

CAS OU L'ELLIPSOÏDE EST DE RÉVOLUTION.

138. Si l'ellipsoïde est de révolution autour de son petit axe $2a$, on a $b=c$, $\lambda'=\lambda$. La formule (133)

$$\mathrm{A} = \frac{3\mathrm{M}\alpha}{a^3}\int_0^1 \frac{u^2\,du}{\sqrt{(1+\lambda^2u^2)(1+\lambda'^2u^2)}}$$

devient

$$\mathrm{A} = \frac{3\mathrm{M}\alpha}{a^3}\int_0^1 \frac{u^2\,du}{1+\lambda^2u^2}$$

et donne

(3) $$\mathrm{A} = \frac{3\mathrm{M}\alpha}{a^3\lambda^3}(\lambda - \text{arc tang}\lambda);$$

et comme en général

$$B = \frac{3M\beta}{a^3}\int_0^1 \frac{u^2\,du}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\lambda'^2u^2}},$$

on aura pour $c = b$

$$B = \frac{3M\beta}{a^3}\int_0^1 \frac{u^2du}{(1+\lambda^2u^2)^2}.$$

On trouve, en effectuant l'intégration,

$$(4)\qquad B = \frac{3M\beta}{2a^3\lambda^3}\left(\text{arc tang}\lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right).$$

Pour avoir la valeur de C, on remarquera que les formules (13) du n° 134 donnent, en faisant $\lambda' = \lambda$,

$$\frac{C}{\gamma} = \frac{B}{\beta};$$

on aura donc

$$(5)\qquad C = \frac{3M\gamma}{2a^3\lambda^3}\left(\text{arc tang}\lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right).$$

Les composantes B et C étant entre elles comme les composantes β et γ du point attiré, leur résultante A′ sera dirigée suivant la perpendiculaire δ abaissée de ce point sur l'axe de révolution et aura pour valeur

$$A' = \frac{3M\delta}{2a^3\lambda^3}\left(\text{arc tang}\lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right).$$

139. Si λ est petit, on développe suivant les puissances de cette quantité, et l'on a

$$A = \frac{M\alpha}{a^3}\left(1 - \frac{3}{5}\lambda^2 + \ldots\right),$$

$$A' = \frac{M\delta}{a^3}\left(1 - \frac{6\lambda^2}{5} + \ldots\right).$$

140. Dans le cas de la sphère $\lambda = 0$, la résultante est $\frac{M\alpha}{a^3} = \frac{4}{3}\pi\alpha$, en supposant le point placé sur l'axe des x.

141. Si l'ellipsoïde était de révolution autour de l'axe $2b$, en supposant $c = a$ et $b > a$, on aurait $\lambda' = 0$, et des calculs analogues aux précédents donneraient

$$B = \frac{3M6}{a^3\lambda^3}\left[l(\lambda + \sqrt{1+\lambda^2}) - \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right];$$

$$\frac{A}{\alpha} = \frac{C}{\gamma} = \frac{3M}{a^3}\int_0^1 \frac{u^2 du}{\sqrt{1+\lambda^2 u^2}}$$

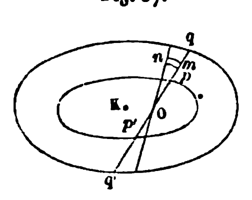
$$= \frac{3M}{2a^3\lambda^3}\left[\lambda\sqrt{1+\lambda^2} - l(\lambda + \sqrt{1+\lambda^2})\right].$$

THÉORÈME DE NEWTON.

142. On peut démontrer synthétiquement ce théorème de Newton qu'*une couche homogène d'une épaisseur quelconque comprise entre deux surfaces ellipsoïdales semblables et semblablement placées n'exerce aucune action sur un point intérieur.*

Concevons un cône infiniment étroit ayant son sommet au point attiré O. Il intercepte dans la couche deux portions de volumes ν, ν' qu'on peut décomposer en tranches ou troncs de cônes par des plans perpendiculaires à l'arête qq'. La masse de la tranche mn, située à la distance $Om = u$ du point O, est $\rho\sigma du$, σ étant la section mn; mais $\sigma = \omega u^2$, en nommant ω la section faite dans le cône à une distance du point O égale à l'unité. L'attraction de cette tranche sur le point O est

Fig. 57.



$$f\mu\rho\frac{\sigma du}{u^2} \quad \text{ou} \quad f\mu\rho\omega du.$$

En intégrant par rapport à u depuis $u = Op$ jusqu'à $u = Oq$, ρ et ω étant des constantes, on voit que l'action

de ν est égale à $f\mu\rho\omega\,(Oq - Op)$ ou $f\mu\rho\omega pq$. De même, l'action de ν' est $f\mu\rho\omega p'q'$. Ces deux forces agissent en sens contraires et se détruisent, car $pq = p'q'$, puisque dans deux ellipsoïdes semblables les cordes parallèles à une même direction ont leurs milieux sur un même plan diamétral. Donc les actions exercées sur le point O par les divers éléments de la couche peuvent se décomposer en actions deux à deux égales et contraires; donc elles se détruisent.

143. Ce théorème est vrai pour une couche infiniment mince, et par conséquent pour une couche d'épaisseur finie telle, qu'on puisse la considérer comme composée de couches infiniment minces, comprises entre des surfaces ellipsoïdales concentriques, semblables et semblablement placées, la densité ne variant que d'une couche à une autre.

Si le point O était extérieur, les deux actions exercées par les portions ν et ν' seraient encore égales, mais elles *s'ajouteraient*.

CAS D'UN POINT EXTÉRIEUR. THÉORÈME D'IVORY.

144. En conservant les mêmes notations, on a

$$A = -\int\int\int \cos g\, du \sin\theta\, d\theta\, d\psi.$$

Ici on doit intégrer depuis $u = R$ jusqu'à $u = R'$, R et R' désignant les distances du point attiré aux deux points où la droite déterminée par les angles θ et ψ rencontre la surface de l'ellipsoïde. On a donc

$$A = \int\int (R' - R)\cos\theta \sin\theta\, d\theta\, d\psi,$$

ou bien (128)

$$A = 2\int\int \frac{\sqrt{q^2 + pl}}{p}\cos\theta \sin\theta\, d\theta\, d\psi.$$

Il faudrait intégrer cette expression entre les limites qui

correspondent à $R' - R = 0$, c'est à-dire pour toutes les directions qui tombent dans l'intérieur du cône circonscrit. Mais on ramène ce cas à celui du point intérieur par le théorème d'Ivory.

145. Concevons deux ellipsoïdes ayant leurs axes a, b, c et a', b', c' dirigés suivant les trois mêmes axes rectangulaires. On appelle points *correspondants* deux points dont les coordonnées sont proportionnelles aux demi-axes auxquels elles sont parallèles, c'est-à-dire que (x, y, z) et (x', y', z') étant deux points correspondants, on aura

$$\frac{x}{a} = \frac{x'}{a'}, \quad \frac{y}{b} = \frac{y'}{b'}, \quad \frac{z}{c} = \frac{z'}{c'}.$$

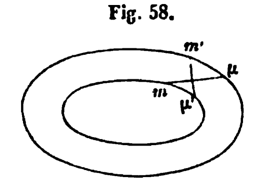
Si l'un de ces points est sur la surface du premier ellipsoïde, l'autre sera évidemment sur la surface du second.

Supposons, en outre, que les sections principales de ces deux ellipsoïdes aient les mêmes foyers, c'est-à-dire que

$$a^2 - a'^2 = b^2 - b'^2 = c^2 - c'^2.$$

Si l'on prend sur les deux ellipsoïdes deux points quelconques $m(x, y, z)$, $\mu(\alpha, \beta, \gamma)$ et leurs correspondants $m'(x', y', z')$, $\mu'(\alpha', \beta', \gamma')$, les distances μm et $\mu' m'$ sont égales.

Fig. 58.



En effet, on a

$$\begin{aligned}
&\overline{\mu m}^2 - \overline{\mu' m'}^2 \\
&= (\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 + (\gamma - z)^2 - (\alpha' - x')^2 - (\beta' - y')^2 - (\gamma' - z')^2 \\
&= \left(\frac{a'}{a}\alpha' - x\right)^2 + \left(\frac{b'}{b}\beta' - y\right)^2 + \left(\frac{c'}{c}\gamma' - z\right)^2 - \left(x' - \frac{a'}{a}x\right)^2 - \ldots \\
&= \left(\frac{\alpha'^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2}\right)(a'^2 - a^2) + \left(\frac{\beta'^2}{b^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)(b'^2 - b^2) \\
&\qquad + \left(\frac{\gamma'^2}{c^2} - \frac{z^2}{c^2}\right)(c'^2 - c^2),
\end{aligned}$$

ou bien

$$\overline{\mu m}^2 - \overline{\mu' m'}^2 = (a'^2 - a^2)\left[\frac{\alpha'^2}{a^2} + \frac{\beta'^2}{b^2} + \frac{\gamma'^2}{c^2} - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)\right].$$

Mais ce dernier facteur est nul, puisque l'on a

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{\alpha'^2}{a^2} + \frac{\beta'^2}{b^2} + \frac{\gamma'^2}{c^2} = 1,$$

donc

$$\mu m = \mu' m'.$$

146. Appelons toujours A′, B′, C′ les composantes de l'attraction du premier ellipsoïde sur le point μ. On a, en faisant abstraction du facteur $f\mu\rho$,

$$A = \int\int\int \frac{\alpha - x}{u^3}\, dx\, dy\, dz.$$

On a, en regardant x comme seule variable

$$u\, du = -(\alpha - x)\, dx,$$

d'où

$$\int \frac{\alpha - x}{u^3}\, dx = -\int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{u},$$

donc si l'on désigne par R et r les valeurs de u qui correspondent aux limites de l'intégrale, c'est-à-dire aux deux points où la surface de l'ellipsoïde est rencontrée par une même parallèle à l'axe des x, on aura

$$A = \int\int \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) dy\, dz.$$

Considérons maintenant l'attraction que le second ellipsoïde exerce sur le point μ' correspondant de μ, et nommons A′, B′, C′ ses composantes, on aura

$$A' = \int\int \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{R'}\right) dy'\, dz'.$$

Mais $r = \mu m$, $r' = \mu' m'$; donc (145) $r' = r$: de même, $R' = R$. D'ailleurs, $dy' = \frac{b'}{b} dy$, $dz' = \frac{c'}{c} dz$. Donc

$$A' = \int\int \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) \frac{b'c'}{bc}\, dy\, dz = \frac{b'c'}{bc} \int\int \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) dy\, dz$$

ou

$$A' = \frac{b'c'}{bc} A.$$

On aura de même

$$B' = \frac{a'c'}{ac} B, \quad C' = \frac{a'b'}{ab} C.$$

Donc *l'attraction d'un ellipsoïde sur un point extérieur μ est ramenée à l'attraction d'un ellipsoïde homofocal sur le point μ' correspondant.*

Ce théorème subsiste quelle que soit la loi d'attraction.

147. Pour faire usage de ce théorème, il faut calculer les valeurs des demi-axes a', b', c' du second ellipsoïde, connaissant ceux du premier et les coordonnées α, β, γ du point μ. On a

$$\frac{\alpha^2}{a'^2} + \frac{\beta^2}{b'^2} + \frac{\gamma^2}{c'^2} = 1;$$

or

$$b'^2 - a'^2 = b^2 - a^2 = h,$$
$$c'^2 - a'^2 = c^2 - a^2 = k,$$

d'où

$$\frac{\alpha^2}{a'^2} + \frac{\beta^2}{a'^2 + h} + \frac{\gamma^2}{a'^2 + k} = 1.$$

Cette équation donne une valeur positive pour a'^2, et une seule, car $a'^2 = 0$ rend le premier membre plus grand que l'unité et $a'^2 = \infty$ le rend moindre que l'unité. D'ailleurs ce premier membre décroît d'une manière continue quand a' varie depuis zéro jusqu'à l'infini : il ne peut donc passer qu'une seule fois par la valeur de 1. Le demi-axe a' étant déterminé, on aura les deux autres par les équations

$$b'^2 = a'^2 + h, \quad c'^2 = a'^2 + k.$$

DYNAMIQUE.

PREMIÈRE PARTIE.

DOUZIÈME LEÇON.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES SUR LE MOUVEMENT

Définitions. — Mouvement uniforme. — De l'inertie. — Vitesse dans le mouvement varié.

DÉFINITIONS.

148. La *dynamique* a pour objet l'étude des lois du mouvement des corps. On considère, dans cette partie de la Mécanique, une quantité dont on n'a pas eu à s'occuper en statique, *le temps*. L'idée du temps, comme celle de l'espace, est une idée simple, qu'on ne définit pas; mais il est nécessaire de définir l'égalité des temps.

Deux intervalles de temps sont égaux, quand deux corps identiques, placés dans les mêmes circonstances, parcourent des espaces égaux dans ces deux intervalles de temps, quelle que soit la loi de leur mouvement commun. C'est ce qui aurait lieu, par exemple, si l'on abandonnait le même corps ou deux corps identiques, partant d'un même point, à l'action de la pesanteur à deux époques différentes : le point de départ étant le même, ils emploieraient le même temps à parcourir le même espace. De même encore, si l'on suppose deux globules pesants et identiques, suspendus aux extrémités de deux fils pareils et de même longueur, dont l'autre extrémité est fixe, et qu'à deux époques différentes ces deux pendules soient également écartés de la verticale, la durée de la première

oscillation sera la même pour l'un et pour l'autre. La notion d'une suite d'intervalles de temps égaux conduit à celle du rapport commensurable ou incommensurable de deux temps quelconques. L'unité de temps généralement adoptée est la *seconde*. Nous n'avons pas à la définir ici.

MOUVEMENT UNIFORME.

149. Le mouvement le plus simple que puisse prendre un point matériel est celui dans lequel ce point décrit une ligne droite, sur laquelle il parcourt des espaces égaux dans des temps égaux. Ce mouvement est dit *uniforme* et sert de terme de comparaison à tous les autres mouvements. On appelle mouvement *varié* tout mouvement qui n'est pas uniforme.

150. Quand un point M se meut en ligne droite, l'espace parcouru par ce point, ou plus généralement sa distance x à un point fixe O pris sur cette droite, est une fonction du temps t écoulé depuis une époque convenue, en sorte qu'on a

Fig. 59.

$$x = f(t);$$

cette équation est ce qu'on appelle l'*équation du mouvement.*

151. Un mouvement uniforme diffère d'un autre mouvement uniforme par la grandeur de l'espace constant que le mobile parcourt dans l'unité de temps. Cet espace est ce qu'on nomme la *vitesse* du mobile. Si donc l'on désigne par s l'espace parcouru dans le temps t et par a l'espace parcouru dans l'unité de temps, on aura

$$s = at \quad \text{ou} \quad \frac{s}{t} = a.$$

On voit par là que l'on peut encore définir la vitesse, le rapport de l'espace parcouru au temps employé à le parcourir.

Si l'on rapporte la position du mobile à un point O fixe pris sur la droite parcourue et que l'on désigne par b sa distance OB à cette origine, à l'origine du temps, il est clair qu'on aura

$$x = s + b$$

ou

$$x = at + b. \tag{1}$$

C'est l'équation la plus générale du mouvement uniforme.

Pour un autre point M' on aurait

$$x = a't + b'. \tag{2}$$

Ces deux équations serviront à résoudre toutes les questions qui concernent les positions relatives des deux points mobiles, à des époques quelconques.

152. L'équation du mouvement uniforme suppose qu'on ait adopté deux unités, l'unité de longueur et l'unité de temps. Le nombre qui exprime la vitesse dépend de chacune d'elles; mais le rapport des vitesses dans deux mouvements uniformes reste invariable quand on change ces unités. En effet, si l'unité de temps devient n fois plus grande, les vitesses qui étaient auparavant exprimées par a et a' le seront maintenant par na et na': or $\frac{na}{na'} = \frac{a}{a'}$. De même, si l'unité de longueur devient p fois plus grande, les vitesses auront pour expressions nouvelles $\frac{a}{p}$ et $\frac{a'}{p}$, et leur rapport ne sera pas changé.

En général, le nombre qui exprime la vitesse varie avec l'unité de longueur. Il est d'autant moindre que cette unité est plus grande. Ce nombre varie aussi dans le même rapport que l'unité de temps.

DE L'INERTIE.

153. Il est évident que si un point matériel est en repos, il ne peut se mettre en mouvement de lui-même et

sans une cause extérieure, car il n'y a pas de raison pour que ce point se meuve de lui-même dans un certain sens plutôt que dans un autre. En outre, si un point matériel a été mis en mouvement par des causes quelconques (que nous appelons des *forces*) et qu'ensuite il ne soit plus sollicité par aucune force, il devra se mouvoir suivant une certaine ligne droite, en conservant toujours la même vitesse, c'est-à-dire en parcourant sur cette ligne droite des espaces égaux en temps égaux. On voit bien d'abord que le point se mouvra en ligne droite, car il n'y a pas de raison pour qu'il s'écarte de la direction de son mouvement à l'instant où les forces ont cessé d'agir. Il n'est pas aussi facile d'admettre que sa vitesse restera la même ou que son mouvement sera uniforme, car il n'y aurait rien d'absurde à supposer que son mouvement se ralentisse peu à peu et cesse entièrement au bout d'un certain temps. Mais on observe qu'un corps, soumis à une impulsion et abandonné ensuite à lui-même, possède pendant un certain temps un mouvement sensiblement rectiligne et uniforme, et qui dure d'autant plus longtemps que les obstacles et les résistances qui s'opposent à ce mouvement sont moindres. Tel est, par exemple, un corps solide qui reçoit une impulsion sur un plan fixe horizontal très-poli, sur lequel il repose par une face plane et qui n'éprouve que peu de frottement. On est donc conduit à admettre que s'il était possible qu'un point matériel, après avoir été mis en mouvement par des causes quelconques, ne fût plus sollicité par aucune force et ne rencontrât aucun obstacle, son mouvement serait rectiligne et uniforme.

154. Ces propriétés constituent ce qu'on appelle l'*inertie* de la matière.

L'inertie de la matière consiste donc en ce que tout point matériel en repos reste en repos, tant qu'aucune cause extérieure n'agit sur lui, et s'il a été mis en muo-

vement et qu'ensuite aucune force ne lui soit appliquée, son mouvement est naturellement rectiligne et uniforme.

Le mot inertie ne signifie pas que la matière soit incapable d'agir, car, au contraire, la plupart des forces dont nous observons les effets proviennent des actions que les molécules matérielles exercent les unes sur les autres, de sorte qu'un point matériel peut trouver dans un autre, mais jamais en lui-même, la cause de son mouvement.

VITESSE DANS LE MOUVEMENT VARIÉ.

155. Il résulte de ce qui précède que tout point matériel doué d'un mouvement varié rectiligne ou d'un mouvement curviligne doit être sollicité par une ou plusieurs forces, sans quoi son mouvement serait uniforme. Comme l'espace parcouru par le mobile n'est pas toujours le même dans des temps égaux, la définition que nous avons donnée de la vitesse n'aurait pas de sens dans ce cas. Pour concevoir ce qu'on entend alors par vitesse, imaginons que la cause ou force qui produit le mouvement cesse d'agir à un instant déterminé : le point continuera à se mouvoir dans la direction d'une certaine droite et son mouvement sur cette droite sera uniforme. On appelle vitesse d'un mobile au bout du temps t, la vitesse du mouvement uniforme qui succéderait au mouvement varié si, à cet instant, la force motrice cessait d'agir.

156. Quand le mouvement n'est pas uniforme et rectiligne, la vitesse varie à chaque instant et d'une manière continue, soit en grandeur, soit en direction. En effet, l'observation prouve qu'il n'existe pas de force qui puisse, dans un instant indivisible, changer brusquement la grandeur ou la direction de la vitesse d'un corps ou imprimer subitement une vitesse finie à un corps en repos.

On a pendant longtemps distingué deux espèces de forces : les *forces continues*, comme la pesanteur, agissant sans interruption sur le mobile pendant un temps fini, et

les *forces instantanées* qu'on supposait capables d'imprimer subitement à un corps en repos une vitesse finie ou de changer instantanément la vitesse ou la direction d'un corps en mouvement; mais par l'observation attentive des phénomènes on reconnaît que ces dernières forces n'existent pas dans la nature, et qu'une force ne peut changer d'une manière sensible la grandeur et la direction de la vitesse qu'en agissant pendant un certain temps qui est quelquefois assez court pour n'être pas appréciable. On s'accorde aujourd'hui à n'admettre que des forces continues.

157. Soit M un point matériel qui se meut, d'un mouvement varié, sur une droite Ox. Appelons x la distance OM de ce mobile à un point quelconque de la direction Ox, et t le temps compté à partir d'une époque quelconque, temps au bout duquel le mobile est en M; soit v la vitesse inconnue qu'il possède à cet instant. Nous allons faire voir que

Fig. 60.

$$v = \frac{dx}{dt}.$$

On peut d'abord démontrer ce théorème par la considération des infiniment petits. En effet, supposons le mobile arrivé en M au bout du temps t. Pendant l'intervalle de temps infiniment petit dt qui succède au temps t, le mobile parcourt l'espace infiniment petit $MM' = dx$, et sa vitesse varie infiniment peu (156), de sorte qu'on peut regarder le mouvement du mobile de M en M' comme uniforme. On a donc

$$dx = v\,dt \quad \text{ou} \quad v = \frac{dx}{dt}.$$

158. On peut établir rigoureusement cette formule par la méthode des limites. Supposons qu'après le temps t le mobile parcoure pendant l'intervalle de temps Δt

l'espace $MM' = \Delta x$. On pourra toujours prendre le temps Δt assez court pour que, pendant ce temps-là, la vitesse du mobile soit continuellement croissante ou décroissante. Supposons-la croissante : v étant la vitesse du mobile au point M, désignons par v' sa vitesse quand il arrive au point M'. L'espace Δx parcouru par le mobile pendant le temps Δt doit être évidemment plus grand que l'espace $v\Delta t$ qu'il parcourrait s'il se mouvait uniformément pendant le temps Δt avec la vitesse v qu'il a au commencement de ce temps, puisque v est sa plus petite vitesse pendant le temps Δt. Ensuite Δx doit être plus petit que l'espace $v'\Delta t$ que parcourrait le mobile s'il se trouvait avoir la vitesse constante v' qu'il a au bout du temps Δt et qui est sa plus grande vitesse.

On a donc

$$v\Delta t < \Delta x < v'\Delta t,$$

d'où

$$v < \frac{\Delta x}{\Delta t} < v'.$$

Si Δt tend vers zéro, v' se rapproche indéfiniment de v qui ne change pas ; $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ se rapproche donc aussi indéfiniment de v, de sorte que l'on a

$$v = \lim \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}.$$

159. Jusqu'ici nous n'avons pas considéré le sens du mouvement. Or le point peut se mouvoir dans le sens Mx ou dans le sens contraire. Mais dans l'un et l'autre cas la formule

$$v = \frac{dx}{dt}$$

donnera la vitesse du mobile, pourvu que l'on convienne de regarder comme positive la vitesse du mobile lorsqu'il va dans le sens des abscisses positives, et de la regarder comme négative dans le cas contraire ; car le rapport $\frac{\Delta x}{\Delta t}$

est positif dans le premier cas, négatif dans le second, et il en est de même de sa limite $\frac{dx}{dt}$.

160. La relation $v = \frac{dx}{dt}$ montre que si

$$x = f(t)$$

est l'équation du mouvement, on aura

$$v = f'(t).$$

Si l'équation du mouvement était de la forme

$$\varphi(x, t) = 0,$$

on aurait

$$v = -\frac{\frac{d\varphi}{dt}}{\frac{d\varphi}{dx}}.$$

161. Réciproquement, si l'on donne l'équation

$$v = \varphi(t),$$

une simple intégration donnera l'équation du mouvement rectiligne du mobile, savoir :

$$x = \int \varphi(t)\, dt + c.$$

On déterminera la constante c en exprimant que le mobile a une position donnée à une époque donnée.

TREIZIÈME LEÇON.

DE L'ACCÉLÉRATION.

Du mouvement uniformément varié. — Principe des mouvements relatifs. — Comparaison des forces d'après les mouvements qu'elles impriment aux points matériels. — De l'accélération dans un mouvement rectiligne quelconque.

DU MOUVEMENT UNIFORMÉMENT VARIÉ.

162. Soit un point matériel M qui se meut sur une droite Ox de telle sorte que sa vitesse v croisse proportionnellement au temps t,

Fig. 61.

O A M x

à partir du moment où le mobile était en un point donné A. Soit g l'accroissement constant de la vitesse pour chaque unité de temps. Le point O étant pris pour origine, soient $OA = b$ l'abscisse du mobile à l'époque initiale, et $OM = x$ son abscisse après le temps t. En appelant a la vitesse du mobile au point A, on aura

$$(1) \qquad v = a + gt$$

ou

$$dx = a\,dt + gt\,dt;$$

on a donc, en intégrant,

$$x = c + at + \frac{gt^2}{2}.$$

Or pour $t = 0$, on doit avoir $x = b$; donc $c = b$, et l'équation du mouvement est

$$(2) \qquad x = b + at + \frac{gt^2}{2}.$$

Le mouvement représenté par cette équation est dit *uniformément varié* ou *accéléré*.

163. Si l'on place le point O en A, c'est-à-dire si l'on compte les espaces à partir du point où se trouvait le mobile à l'origine du temps ; si de plus on suppose $a = 0$, on aura

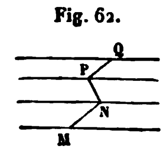
$$v = gt, \quad x = \frac{gt^2}{2}.$$

Ces deux équations sont celles qui lient l'espace, la vitesse et le temps dans la chute des corps pesants qui tombent dans le vide. L'observation donne à Paris $g = 9^m,80896$ en prenant la seconde pour unité de temps. Il en résulte que tout corps pesant parcourt dans le vide, dans la première seconde de sa chute, $\frac{1}{2}g$ ou $4^m,90448$.

PRINCIPE DES MOUVEMENTS RELATIFS.

164. Il existe une relation entre l'intensité de la force qui sollicite un point matériel et la variation de vitesse que cette force produit. Cette relation se déduit d'un principe qu'il ne paraît pas possible de démontrer à l'aide du seul raisonnement, mais auquel on a été conduit par une multitude d'observations et d'expériences, principe qui est vérifié par l'accord constant des conséquences qui s'en déduisent avec les phénomènes observés. Ce principe consiste en ce que *si des points matériels* M, N, P... *se meuvent dans l'espace suivant des droites parallèles, avec une vitesse constante ou variable, mais qui soit la même pour tous à chaque instant, de sorte qu'ils paraissent ne pas se déplacer les uns par rapport aux autres, si l'un des points,* M *par exemple, vient à être sollicité par une certaine force, le mouvement relatif du point* M *à l'égard des autres points sera le même que le mouvement absolu qu'aurait ce point* M *si le mouvement commun n'existait pas et que le point* M *partant du repos fût encore sollicité par la même force.*

Fig. 62.



C'est ainsi que sur un bateau transporté d'un mouvement rectiligne et uniforme, les mouvements relatifs que nous imprimons aux corps transportés avec nous sont les mêmes que si le bateau était en repos.

Mais cette loi de la nature ne peut être soumise à aucune expérience directe et rigoureuse. Elle est vérifiée par l'accord des conséquences qu'on en tire avec les faits observés, surtout en Astronomie.

165. Il résulte d'abord de ce principe que si un point matériel animé d'une vitesse acquise vient à être sollicité par une force dirigée dans le sens même de son mouvement, cette force lui communiquera, après un temps quelconque, un accroissement de vitesse précisément égal à la vitesse qu'elle lui imprimerait s'il partait de l'état de repos.

En effet, soit un point matériel M se mouvant uniformément sur une ligne droite avec une vitesse v. Dans un temps quelconque θ, succédant au temps t, il parcourra un espace $v\theta$ si aucune force n'agit sur lui. Mais supposons que, pendant le temps θ, il vienne à être sollicité par une force P dans le sens de son mouvement. Désignons par ξ l'espace que cette force ferait parcourir au point M s'il partait du repos, et par u la vitesse qu'elle lui imprimerait au bout du temps θ, vitesse égale à $\frac{d\xi}{d\theta}$ (158). Alors le point M, animé de sa vitesse acquise v et sollicité en outre par la force P, parcourra pendant le temps θ un espace égal à $v\theta + \xi$. Car si l'on considère d'autres points sur la même droite Ox ou en dehors, se mouvant uniformément avec la vitesse v, chacun d'eux parcourra dans le temps θ l'espace $v\theta$. Or, en vertu du principe des mouvements relatifs (164), le point M, auquel seul est appliquée la force P, doit, au bout du temps θ, précéder les autres points dans le sens du mouvement d'une quantité égale à l'espace ξ que la force lui ferait parcourir s'il était d'abord

en repos. Le point M parcourra donc l'espace $v\theta + \xi$ dans le temps θ, et sa vitesse sera

$$\frac{d(v\theta + \xi)}{d\theta} = v + \frac{d\xi}{d\theta} = v + u.$$

Ainsi la vitesse v se trouve augmentée par l'action de la force P de la quantité u, c'est-à-dire de la vitesse que la force P imprimerait, après le temps θ, au mobile pris d'abord à l'état de repos.

On voit de même que si le point mobile, animé d'une vitesse v, est sollicité par la force P en sens contraire de son mouvement, sa vitesse diminuera de la même quantité u et deviendra $v - u$ au bout du temps θ. Ainsi le changement de vitesse produit par une force qui vient solliciter un point en mouvement est indépendant de la vitesse précédemment acquise.

EFFET D'UNE FORCE CONSTANTE SUR UN POINT MATÉRIEL.

166. Supposons maintenant qu'une force P, d'intensité constante, agisse d'une manière continue sur un mobile. Il résulte de ce qui précède qu'elle devra augmenter ou diminuer sa vitesse de quantités égales en temps égaux. En effet, soit u la variation de vitesse produite par cette force dans un premier intervalle de temps θ, $v + u$ sera au bout de ce temps la vitesse du mobile. Mais au bout d'un second intervalle de temps égal à θ, sa vitesse devra être $v + u + u$ ou $v + 2u$; par la même raison, au bout d'un troisième intervalle de temps θ, sa vitesse est $v + 3u$, et ainsi de suite.

Soit a la vitesse que possède le point mobile à l'instant où la force commence à agir sur lui, et soit g la vitesse que la force imprimerait à ce point au bout de l'unité de temps, s'il était d'abord en repos. Alors le mobile, au bout du temps t, aura la vitesse $a + gt$ ou $a - gt$, suivant que la force constante agira dans le sens de la vitesse

initiale a ou en sens contraire. Le mouvement du point est donc uniformément varié (162).

COMPARAISON DES FORCES, D'APRÈS LES MOUVEMENTS QU'ELLES IMPRIMENT AU MÊME POINT MATÉRIEL.

167. Nous n'avons considéré qu'une seule force agissant sur le point M. Supposons maintenant que ce mobile, déjà animé de la vitesse v, vienne au bout du temps t à être sollicité dans le même sens pendant le temps θ, par deux forces P et P′ qui, en agissant séparément, feraient parcourir à ce point, pris à l'état de repos, des espaces ξ et ξ' pendant le temps θ et lui imprimeraient des vitesses

$$u = \frac{d\xi}{d\theta}, \quad u' = \frac{d\xi'}{d\theta}.$$

Imaginons que de la position M partent à la fois deux points matériels animés tous deux de la vitesse v, mais l'un étant soumis simplement à l'action de la force P et l'autre à l'action simultanée des forces P et P′. Le premier parcourra dans le temps θ l'espace $v\theta + \xi$, et, d'après le principe (164), le second aura sur le premier une avance de ξ'. De là il suit que $v\theta + \xi + \xi'$ est l'espace parcouru par le point matériel M qui, déjà animé de la vitesse v, est sollicité pendant le temps θ par les deux forces P et P′. Donc au bout de ce temps sa vitesse sera

$$v + \frac{d\xi}{d\theta} + \frac{d\xi'}{d\theta} \quad \text{ou} \quad v + u + u'.$$

Ainsi *le changement de vitesse produit sur un mobile par l'action simultanée de deux forces est indépendant de la vitesse acquise et est égal à la somme des vitesses qu'aurait eues séparément le mobile si, pris à l'état de repos, il avait été tour à tour soumis à l'action de chacune des forces* P *et* P′.

On verrait de même que si les forces P et P′ agissaient

en sens contraire, le changement de vitesse dans le temps θ serait égal à $u - u'$.

168. Cela posé, il est facile de démontrer que *deux forces d'intensités constantes sont entre elles comme les changements de vitesses qu'elles peuvent produire séparément pendant le même temps sur un même point matériel.*

En effet, supposons qu'une force f agisse pendant un temps θ sur un mobile dont la vitesse acquise est v. Elle fera subir à ce mobile un accroissement de vitesse k. Soit k' la variation de vitesse qu'éprouverait le point par l'action séparée d'une autre force f'; si f et f' agissent simultanément, le changement de vitesse sera $k + k'$ (167). Donc si $f' = f$, on aura $k + k' = 2k$. Ainsi une force $2f$ produira un changement de vitesse égal à $2k$; de même, une force $3f$ produira un changement de vitesse égal à $3k$, et en général une force nf produira un changement de vitesse égal à nk.

Soient maintenant P et P' deux forces d'intensité constante, et soient u et u' les changements de vitesse qu'elles produisent sur un même mobile pendant un temps θ. Je dis qu'on aura

$$\frac{P}{P'} = \frac{u}{u'}.$$

En effet, si les forces P et P' sont entre elles dans un rapport commensurable, soit f leur commune mesure et soit

$$P = nf, \quad P' = n'f,$$

n et n' étant deux nombres entiers, de sorte que l'on ait

$$\frac{P}{P'} = \frac{n}{n'}.$$

Si k est le changement de vitesse que produirait la force f dans les circonstances déjà spécifiées, on aura

$$u = nk, \quad u' = n'k,$$

d'où

$$\frac{u}{u'} = \frac{n}{n'}$$

donc

$$\frac{P}{P'} = \frac{u}{u'}.$$

Si les forces P et P′ n'ont pas entre elles un rapport commensurable, je dis que l'égalité précédente aura encore lieu.

En effet, divisons la force P en n forces égales à f, de sorte que

$$P = nf:$$

en désignant par k la vitesse que produirait la force f, on aura

$$u = nk.$$

Si f est contenu n' fois dans P′, on aura

$$n'f < P' < (n'+1)f,$$
$$n'k < u' < (n'+1)k.$$

Donc les rapports $\frac{P'}{P}$ et $\frac{u'}{u}$ tombent entre $\frac{n'}{n}$ et $\frac{n'+1}{n}$, et, comme ces derniers peuvent différer d'aussi peu qu'on voudra en prenant n suffisamment grand, on en conclut que

$$\frac{P}{P'} = \frac{u}{u'}.$$

Ainsi *des forces d'intensités constantes sont entre elles comme les changements de vitesses qu'elles font subir à un même point matériel, quand elles agissent séparément sur lui, pendant le même temps*

169. Ce fait est confirmé par l'expérience.

1° On sait que la pesanteur n'a pas la même intensité en différentes régions de la terre, et le poids d'un même corps varie d'un lieu à l'autre, dans le rapport des intensités de cette force. Or, l'expérience montre que ce rap-

port est précisément le même que celui des vitesses acquises par un même corps tombant, en ces différents endroits, pendant le même temps.

2° Soit P le poids d'un corps tombant le long d'un plan incliné, qui fait avec l'horizon un angle α. Soit P' la composante de ce poids parallèle au plan incliné : on a

Fig. 63.

$$P' = P \sin\alpha.$$

Or, en appelant u la vitesse acquise par le corps tombant librement, et u' celle qu'il acquiert en descendant sur le plan incliné, l'expérience montre que

$$u' = u \sin\alpha.$$

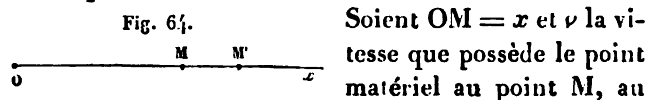
Donc on a bien

$$\frac{P}{P'} = \frac{u}{u'}.$$

DE L'ACCÉLÉRATION.

170. Supposons qu'une force d'intensité variable sollicite un point matériel M suivant une certaine droite Ox. Soient $OM = x$ et v la vitesse que possède le point matériel au point M, au bout du temps t compté à partir d'une époque quelconque.

Fig. 64.



A ce moment la force présente une certaine intensité P, et, si elle agissait constamment avec cette intensité, elle ferait éprouver à la vitesse, pendant l'unité de temps, une certaine variation φ. Cette quantité φ est ce qu'on nomme l'*accélération*, et nous allons démontrer que l'on a

$$\varphi = \frac{dv}{dt}.$$

En effet, soit Δt un intervalle de temps assez petit pour que l'intensité de la force soit constamment croissante ou

décroissante, lorsque le point ira de M en M′. Ici, pour fixer les idées, nous la supposerons croissante. Soient φ et φ' les accélérations qui correspondent aux points M et M′; v et $v + \Delta v$ les vitesses du mobile en ces deux points. Si la force conservait pendant le temps Δt une intensité égale à celle qu'elle a en M, $\varphi \Delta t$ serait l'accroissement de vitesse du mobile sous l'action de cette force au bout du temps Δt. De même $\varphi' \Delta t$ serait la vitesse acquise pendant le même temps, si la force avait la même intensité qu'en M′, dans cet intervalle. On aura donc

$$\varphi \Delta t < \Delta v < \varphi' \Delta t,$$

ou

$$\varphi < \frac{\Delta v}{\Delta t} < \varphi'.$$

Donc, comme $\lim \varphi' = \varphi$, on a

$$\varphi = \lim \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

171. Autrement : l'espace Δx parcouru pendant le temps Δt est évidemment compris entre les espaces qui auraient été parcourus si la force avait eu constamment, pendant cet intervalle de temps, ou sa plus petite, ou sa plus grande intensité. On aura donc, si $\Delta t = \theta$

$$\Delta x > v\theta + \frac{1}{2}\varphi\theta^2,$$

$$\Delta x < v\theta + \frac{1}{2}\varphi'\theta^2.$$

Or

$$\Delta x = \frac{dx}{dt}\theta + \left(\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha\right)\frac{\theta^2}{1.2}$$

ou

$$\Delta x = v\theta + \left(\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha\right)\frac{\theta^2}{1.2}:$$

donc $\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha$ est toujours compris entre φ et φ', et par

suite

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi$$

Mais $\frac{dx}{dt} = v$; donc

$$\varphi = \frac{dv}{dt}.$$

172. Quant au sens du mouvement, l'accélération φ sera positive ou négative selon que la force P tirera dans le sens des x positifs ou dans le sens contraire; car dans le premier cas la force augmentera la vitesse et dans le second cas elle la diminuera. On aura donc dans le premier cas $\frac{dv}{dt} > 0$, dans le second $\frac{dv}{dt} < 0$.

QUATORZIÈME LEÇON.

DE LA MASSE DES CORPS.

Masse d'un point matériel. — Masse d'un corps. — Relation entre les forces, les masses et les vitesses. — De la quantité de mouvement. — Force motrice. — Force accélératrice. — Relations entre le poids et la masse. — Des unités employées en Mécanique.

MASSE DES POINTS MATÉRIELS.

173. Jusqu'à présent nous n'avons considéré que des forces appliquées à un seul et même point matériel. Nous allons maintenant examiner ce qui se passe quand des forces agissent sur des corps de grandeur finie. Mais quelques remarques sont utiles auparavant.

Concevons qu'un corps soit placé sur un plan horizontal et qu'il n'y soit retenu par aucun frottement. Si l'on veut faire glisser ce corps sur le plan, il faut exercer un effort quelconque. Pour expliquer cet effort, on doit observer que si l'on agit sur un corps pour le mettre en mouvement, une réaction en sens inverse s'exerce contre l'agent ou l'organe qui donne le mouvement, et cette réaction est la cause de la sensation que nous éprouvons. En général un corps ne peut agir sur un autre sans éprouver de la part de cet autre une réaction égale et contraire.

174. De ce qu'il faut des efforts plus ou moins considérables pour donner le même mouvement à des corps différents, on doit conclure que ces corps ne contiennent pas des quantités égales de matière. On est ainsi conduit à la notion de la *masse* des corps.

On dit que *deux points matériels ont des masses égales, quand deux forces égales, appliquées pendant le même temps à ces deux points, leur donnent le même mouvement.*

Fig. 65.

Il faut remarquer que cette définition ne suppose nullement que les deux points matériels soient formés de la même substance. Quant à l'égalité des forces, on doit l'entendre comme en statique. Ainsi deux forces sont égales si, en les supposant appliquées verticalement aux deux plateaux d'une balance, elles se font équilibre.

175. Si l'on conçoit une multitude de points matériels ayant des masses égales et qu'on réunisse plusieurs de ces points en un seul, on formera des molécules dont les masses auront entre elles des rapports quelconques.

MASSE DES CORPS.

176. Soient A, B, C, D des points matériels de même masse. Des forces égales et parallèles appliquées à ces points, pendant le même temps, leur feront parcourir des droites égales et parallèles avec une vitesse commune, laquelle, du reste, sera généralement variable. Il suit de là que le mouvement ne sera pas troublé si ces points sont liés entre eux par des droites rigides et invariables. On forme ainsi un corps solide, lequel d'ailleurs peut être quelconque. D'un autre côté, les forces égales et parallèles, appliquées à ces différents points, peuvent être remplacées par leur résultante qui est parallèle aux forces considérées, égale à leur somme et passe toujours par le même point, quelle que soit d'ailleurs la direction commune de ces forces. Ce point est dit *le centre de masse*

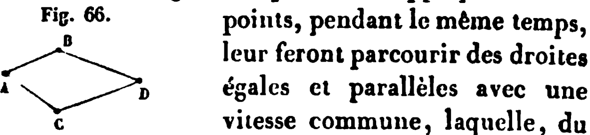


Fig. 66.

du corps. Donc, *quand un corps de figure invariable est sollicité par une force qui passe par le centre de masse, tous ses points décrivent des droites parallèles et égales, dans le même temps*, car cette force pourrait être décomposée en autant de forces parallèles et égales appliquées aux différents points, égaux en masse, qui composent ce corps.

Au contraire, le mouvement n'aurait plus lieu de cette manière si la direction de la force ne passait pas par le centre de masse. Il y aurait alors pour chaque point tout à la fois un mouvement de translation dans l'espace et un mouvement de rotation autour du centre de masse.

Cela posé, *les masses de deux corps sont égales, lorsqu'en appliquant des forces égales à leur centre de masse tous les points de ces corps décrivent des droites parallèles avec la même vitesse*. Les masses m et m' de deux corps sont dans le rapport de n à n' lorsqu'on peut les partager l'un en n parties, l'autre en n' parties ayant la même masse μ. On aura dans ce cas

$$m = n\mu, \quad m' = n'\mu.$$

RELATION ENTRE LES FORCES, LES MASSES ET LES VITESSES.

177. Il suit de là que *si des forces constantes* P *et* P' *appliquées aux masses m et m' leur impriment la même vitesse u, elles seront entre elles comme ces masses.*

Soit $\frac{n}{n'}$ le rapport des masses, en sorte que l'on ait

$$m = n\mu, \quad m' = n'\mu :$$

en appelant ϖ la force qui communiquerait à la masse μ la vitesse u dans le temps t, on a

$$P = n\varpi, \quad P' = n'\varpi$$

car la force P par exemple équivaut à n forces égales à ϖ appliquées aux n molécules μ qui forment la masse m :

par suite

$$\frac{P}{P'} = \frac{n}{n'} = \frac{m}{m'}.$$

On étendra sans peine cette propriété aux masses dont le rapport serait incommensurable.

178. Supposons que deux forces d'intensité constante P et P', appliquées à deux corps quelconques dont les masses sont m et m', leur fassent acquérir des vitesses u et u' au bout d'un même temps t. Je dis qu'on aura

$$\frac{P}{P'} = \frac{mu}{m'u'}.$$

Appelons en effet Q la force qui dans le temps t donnerait la vitesse u au corps dont la masse est m'. On aura

$$\frac{P}{Q} = \frac{m}{m'}, \quad \frac{Q}{P'} = \frac{u}{u'} \ (*)$$

d'où l'on déduit

$$\frac{P}{P'} = \frac{mu}{m'u'}.$$

DE LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT.

179. Le produit mu de la masse d'un corps m par la vitesse u commune à tous ses points est ce qu'on appelle la *quantité de mouvement* du corps. Ainsi la proportion

$$\frac{P}{P'} = \frac{mu}{m'u'}$$

(*) Car, en désignant par q et p' les forces qui imprimeraient à une molécule μ de la masse m' les vitesses respectives u et u', on a

$$\frac{q}{p'} = \frac{u}{u'}.$$

Donc la somme des forces q appliquées à toutes les molécules du corps m' est à la somme des forces p' comme u est à u', c'est-à-dire

$$Q : P' = u : u'.$$

peut s'énoncer en disant que *les intensités de deux forces appliquées à deux corps quelconques, à leurs centres de masse, sont proportionnelles aux quantités de mouvement qu'elles donnent à ces deux corps,* d'où il suit qu'on peut prendre pour mesure de l'intensité d'une force P la quantité de mouvement mu qu'elle communique à une masse m dans un temps déterminé, par exemple dans l'unité de temps. On prend donc

$$P = mu;$$

mais si l'on choisit arbitrairement l'unité de longueur, l'unité de force et l'unité de temps, on est obligé de prendre pour unité de masse la masse d'un corps qui, sollicité par l'unité de force, acquerrait dans l'unité de temps une vitesse égale à l'unité de longueur.

FORCE MOTRICE. — FORCE ACCÉLÉRATRICE.

180. La formule $P = mu$ donne la mesure de l'intensité d'une force constante : mais elle s'étend aux forces dont l'intensité est variable avec le temps. Supposons en effet qu'une force appliquée au centre de masse d'un corps dont la masse est m, ait, à l'instant considéré, une intensité P. Soit φ la vitesse que cette force ferait acquérir au mobile au bout de l'unité de temps, si pendant ce temps elle conservait une intensité constante égale à P. On aura alors

$$P = m\varphi.$$

Mais φ étant l'accélération du mobile au bout du temps t, on a

$$\varphi = \frac{dv}{dt}.$$

Donc à chaque instant l'intensité de la force P, que l'on appelle *force motrice*, est donnée par la relation

$$P = m\frac{dv}{dt}.$$

181. Si l'on désigne par p la force qui donne la même accélération φ à l'unité de masse, on a

$$p = \varphi.$$

Ainsi le nombre p, qui représente la force motrice de l'unité de masse, est le même que celui qui exprime l'accélération φ, en sorte qu'il est permis de les substituer l'un à l'autre. La force motrice qui produit le mouvement de l'unité de masse est dite la force accélératrice du mobile, et la quantité φ est nommée indifféremment l'*accélération* ou la *force accélératrice.*

RELATION ENTRE LE POIDS ET LA MASSE.

182. L'observation prouve que deux corps pesants, quelles que soient leur substance et leur forme, acquièrent la même vitesse, au bout du même temps, quand ils tombent dans le vide. Ce fait n'était pas connu avant Galilée, et l'on croyait que la pesanteur agissait avec une intensité variable sur les corps de différente nature. Mais Galilée démontra ce fait par l'expérience, et fit voir que si les choses ne semblaient pas se passer ainsi dans la nature, la cause en était due à la résistance de l'air, milieu dans lequel s'opère la chute du corps.

Il résulte de ce fait que les *poids de deux corps sont proportionnels à leurs masses :* car les poids étant des forces constantes, on a

$$\frac{P}{P'} = \frac{mu}{m'u'},$$

et, puisque dans ce cas $u = u' = g$, on aura

$$\frac{P}{P'} = \frac{m}{m'}.$$

Le nombre qui exprime le poids d'un corps en représente aussi la masse, si l'on prend pour unité de masse la masse d'un corps dont le poids est égal à l'unité. Mais

nous verrons bientôt qu'on adopte une autre convention.

Il est utile de remarquer que l'égalité des masses de deux corps hétérogènes ne pouvait pas se conclure de ce seul fait que ces corps ont des poids égaux. Il fallait savoir en outre que ces corps acquièrent la même vitesse après être tombés pendant le même temps.

Il résulte de la proportionnalité des poids aux masses que le centre de masse d'un corps n'est autre chose que son centre de gravité.

DES UNITÉS EMPLOYÉES EN MÉCANIQUE

183. On peut maintenant fixer les différentes unités que l'on doit employer dans l'étude des propriétés de la pesanteur. On prend ordinairement pour unité de temps la seconde, pour celle de longueur le mètre. L'unité de force est le gramme ou le kilogramme : le gramme est le poids d'un centimètre cube d'eau distillée à son maximum de densité. Soit g la vitesse acquise par un corps pesant au bout d'une seconde ; à Paris, on a $g = 9^{m},80896$. Il reste encore à fixer l'unité de masse qui n'est plus arbitraire. Or, si dans la relation

$$P = mg$$

on fait $P = g$, on a $m = 1$: on doit donc prendre pour unité de masse la masse du poids

$$9^{gr},80896,$$

poids qui peut servir de mesure à l'intensité de la pesanteur.

184. L'intensité de la pesanteur ou le poids d'un corps varie à la surface de la terre, et la vitesse que la pesanteur imprime au corps, au bout d'une seconde, varie dans le même rapport. La relation $P = mg$ fait voir

que le nombre $\frac{P}{g}$, qui exprime la masse, reste le même, en quelque endroit qu'on le détermine.

185. Soient V le volume d'un corps supposé homogène et D sa densité ou sa masse sous l'unité de volume. En appelant m la masse de tout le corps, on aura

$$m = VD,$$

ou, à cause de $P = mg$,

$$P = VDg.$$

QUINZIÈME LEÇON.

MOUVEMENT DES CORPS PESANTS.

Mouvement vertical des corps pesants dans le vide. — Mouvement d'un corps pesant sur un plan incliné. — Détermination de la constante g. — Chute d'un corps dans un milieu qui résiste comme le carré de la vitesse. — Cas particulier où la résistance devient nulle.

MOUVEMENT VERTICAL DES CORPS PESANTS DANS LE VIDE.

186. Quand un corps, sollicité par une force P, constante ou variable, parcourt une certaine droite, son mouvement est représenté par les équations

$$\varphi = \frac{dv}{dt}, \quad v = \frac{dx}{dt},$$

φ désignant l'accélération et v la vitesse; on déduit de ces formules, en prenant t pour variable indépendante,

$$\varphi = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad v\,dv = \varphi\,dx.$$

On retrouve aisément, au moyen de ces équations, les lois du mouvement uniformément varié. Ainsi, en appelant g l'accélération due à la pesanteur, on a

$$\varphi \text{ ou } \frac{dv}{dt} = g,$$

d'où

$$(1) \qquad v = a + gt,$$

a représentant la vitesse possédée par le mobile à l'origine du temps. On déduit ensuite de $v = \frac{dx}{dt}$ l'équation

$$(2) \qquad x = b + at + \frac{gt^2}{2},$$

b étant l'abscisse du mobile à l'origine du temps.

187. Si l'on compte les espaces et le temps à partir du point où la vitesse est nulle, on a

$$(3) \qquad v = gt, \quad x = \frac{gt^2}{2}.$$

L'élimination de t entre ces deux équations donne la relation

$$(4) \qquad v = \sqrt{2gx}, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{v^2}{2g},$$

entre la vitesse et l'espace parcouru. On appelle $\sqrt{2gx}$ *la vitesse due à la hauteur* x, et $\frac{v^2}{2g}$ est dite *la hauteur due à la vitesse* v.

188. Supposons maintenant qu'un corps soit lancé de bas en haut suivant la verticale. La force constante agissant en sens inverse du mouvement, on devra poser

$$\frac{dv}{dt} = -g,$$

si l'on compte de bas en haut les abscisses positives.

On tire de là

$$(5) \qquad v = a - gt$$

et, par suite,

$$x = b + at - \frac{gt^2}{2}.$$

Si l'on compte les espaces à partir du point où se trouve le mobile à l'origine du temps, on a $b = 0$ et

$$(6) \qquad x = at - \frac{gt^2}{2}.$$

En appelant θ le temps au bout duquel le mobile cesse de monter, et h la hauteur à laquelle il s'élève, on a

$$a - g\theta = 0,$$

d'où

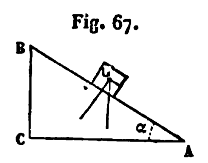
$$(7) \qquad \theta = \frac{a}{g}, \quad h = \frac{a^2}{2g}.$$

Arrivé a cette hauteur, le corps commence à descendre et, revenu au point de départ, sa vitesse redevient égale à sa vitesse initiale; car, en faisant $x = \frac{a^2}{2g}$ dans la formule (4), on trouve $v = a$, mais elle est de sens contraire.

MOUVEMENT D'UN CORPS PESANT SUR UN PLAN INCLINÉ.

189. Soit G le centre de gravité d'un corps pesant, placé sur un plan incliné : la composante de son poids, parallèle à la longueur AB du plan incliné, tendra seule à faire descendre le corps. En appelant α l'angle BAC de ce plan avec l'horizon, $g \sin\alpha$ sera l'accélération du mobile, et l'on aura, pour déterminer son mouvement,

Fig. 67.



$$\frac{dv}{dt} = g \sin\alpha.$$

Ainsi, le mouvement du mobile sera le même que celui qui aurait lieu suivant la verticale si l'intensité de la pesanteur, au lieu d'être g, était $g \sin\alpha$. On aura donc, en changeant g en $g \sin\alpha$ dans les formules (3) et (4) du n° 187,

(1) $$v = g \sin\alpha t,$$

(2) $$x = \frac{g \sin\alpha t^2}{2},$$

(3) $$v^2 = 2gx \sin\alpha.$$

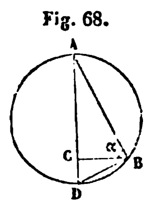
190. Si x' représente la longueur AB du plan incliné et h sa hauteur BC, on aura, pour $x = x'$,

$$v^2 = 2gx' \sin\alpha \quad \text{ou} \quad v^2 = 2gh.$$

Donc *la vitesse acquise par un mobile qui a parcouru toute la longueur* BA *du plan incliné est égale à celle qu'il aurait acquise en tombant de la hauteur* BC.

191. Soit ABD une circonférence dont le diamètre AD est vertical. Supposons qu'un corps descende le long de la corde AB, et cherchons le temps qu'il mettra à parcourir cette corde.

Fig. 68.



Menons BC perpendiculaire à AD : soient $AB = x$, $AD = a$, $ABC = ADB = \alpha$. En appliquant au triangle ABC les formules du plan incliné (189), on aura

$$x = \frac{1}{2} g t^2 \sin\alpha;$$

mais on a

$$AB = AD.\sin\alpha \quad \text{ou} \quad x = a \sin\alpha,$$

donc

$$a = \frac{1}{2} g t^2$$

ou

$$t = \sqrt{\frac{2a}{g}};$$

d'où l'on conclut que *le temps employé par le corps pour descendre le long de* AB *est le même, quelle que soit cette corde, et qu'il est égal au temps que le corps emploierait à descendre de la hauteur* AD.

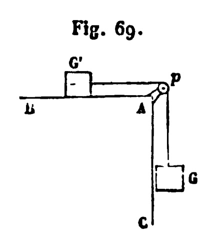
DÉTERMINATION DE LA CONSTANTE g.

192. Le plan incliné rend la chute d'un corps moins rapide sans changer la loi de son mouvement. En prenant l'angle α suffisamment petit, il devient possible d'observer le temps que met le corps à descendre d'une hauteur donnée, et par suite d'en conclure la quantité g qui représente l'intensité de la pesanteur.

Il existe d'autres moyens d'arriver au même résultat.

193. Soit G′ un corps placé sur un plan horizontal AB et tiré par un fil horizontal dont la direction passe par le centre de masse. Supposons que ce fil, enroulé autour d'une poulie p, soit entraîné suivant la verticale par le poids d'un corps G sollicité librement par la pesanteur.

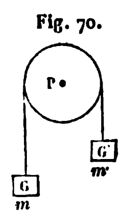
Fig. 69.



Soient m et m' les masses des corps G et G′. La force accélératrice du mobile G étant g, et la force motrice du corps G se répartissant sur la masse $m + m'$, la force accélératrice de tout le système sera $\frac{mg}{m + m'}$. Le mouvement suivra donc les mêmes lois que celui d'un corps entièrement libre, mais pourra être ralenti autant que l'on voudra, en prenant m' assez grand par rapport à m.

194. La machine d'Atwood offre un troisième moyen. Réduite à l'état le plus simple, elle se compose d'une poulie verticale P, mobile autour d'un axe horizontal et sur la gorge de laquelle s'enroule un fil portant à ses extrémités deux corps pesants G et G′.

Fig. 70.



Soient m et m' les masses des corps G et G′. La force motrice de G étant mg, et $m'g$ étant celle de G′, si l'on suppose $m > m'$, le système sera entraîné par une force motrice égale à $mg - m'g$ ou $(m - m')g$. Mais comme cette force sollicite une masse $m + m'$, la force accélératrice du système ou la force motrice rapportée à l'unité de masse sera

$$\frac{(m - m')g}{m + m'}.$$

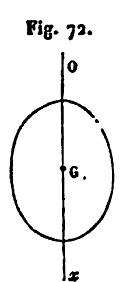
On pourra donc au moyen de cet appareil ralentir autant qu'on le voudra le mouvement du système.

CHUTE D'UN CORPS PESANT DANS UN MILIEU QUI RESISTE COMME LE CARRÉ DE LA VITESSE.

195. Supposons que le corps qui tombe soit symétrique autour d'un axe vertical. Le poids du corps est une force dirigée suivant cet axe, et il en est de même de la résultante R des résistances partielles qu'oppose l'air à la chute du corps, aux différents points de sa surface; la force R agit en sens contraire de la pesanteur.

Soient m la masse du corps et G son centre de gravité ou de masse, situé nécessairement sur Ox. La force motrice du corps due à la pesanteur étant mg, $mg - R$ sera la force motrice réelle et $\frac{mg-R}{m}$ ou $g - \frac{R}{m}$ sera la force accélératrice.

Fig. 72.



L'observation prouve que la résistance R, lorsque le mouvement du corps n'est ni très-lent, ni très-rapide, peut être regardée comme proportionnelle à la densité du milieu et au carré de la vitesse du mobile. On peut donc poser

$$(1) \qquad R = a\rho v^2,$$

ρ désignant la densité de l'air, v la vitesse du corps et a un coefficient que l'on peut déterminer pour le corps pesant considéré par une expérience, et qui ne dépend ni de ρ ni de v. Par conséquent la force accélératrice du mobile sera $g - \frac{a\rho v^2}{m}$.

196. Si le corps est une sphère, en appelant D sa densité, r son rayon, on aura

$$m = \frac{4}{3}\pi r^3 D,$$

d'où

(2) $$\frac{R}{m} = \frac{3a\rho v^2}{4\pi r^3 D}.$$

D'ailleurs on trouve par l'observation que la résistance du fluide est proportionnelle à la surface de la sphère ou au carré de son rayon; on peut donc poser $a = br^2$, et l'on a

$$\frac{R}{m} = \frac{3b}{4\pi}\frac{\rho v^2}{Dr} = \frac{\gamma\rho v^2}{Dr}.$$

Enfin, pour la même sphère et pour le même milieu, γ, ρ, D, r étant des constantes, on peut poser

$$\frac{Dr}{\gamma\rho} = \frac{k^2}{g},$$

et il vient enfin

(3) $$\frac{R}{m} = \frac{gv^2}{k^2}.$$

La constante k désigne la vitesse que devrait avoir le mobile pour que la résistance de l'air fût précisément égale au poids du corps.

197. En supposant toute la masse du corps concentrée à son centre de gravité G, le mouvement de ce point, et par suite celui de tout le corps sera déterminé par l'équation

(4) $$\frac{dv}{dt} = g - \frac{R}{m} = g - \frac{gv^2}{k^2};$$

de là on tire

$$\frac{2g\,dt}{k} = \frac{2k\,dv}{k^2 - v^2},$$

ce que l'on peut écrire ainsi :

$$\frac{2g\,dt}{k} = \frac{k + v + k - v}{k^2 - v^2}dv = \frac{dv}{k - v} + \frac{dv}{k + v}.$$

En intégrant de part et d'autre, on aura donc

$$\frac{2gt}{k} = \mathrm{l}\frac{k + v}{k - v} + c.$$

Si l'on détermine la constante par la condition que la vitesse soit nulle pour $t = 0$, on a $c = 0$, et l'équation devient

(5) $$\frac{2gt}{k} = 1\frac{k+v}{k-v}.$$

On en tire

$$\frac{k+v}{k-v} = e^{\frac{2gt}{k}},$$

d'où

$$v = k\frac{e^{\frac{2gt}{k}} - 1}{1 + e^{\frac{2gt}{k}}},$$

ou enfin, en divisant les deux termes par $e^{\frac{gt}{k}}$,

(6) $$v = k\frac{e^{\frac{gt}{k}} - e^{-\frac{gt}{k}}}{e^{\frac{gt}{k}} + e^{-\frac{gt}{k}}}.$$

198. Pour déduire de là l'espace en fonction du temps, remplaçons v par $\frac{dx}{dt}$, nous aurons

$$dx = k\frac{\left(e^{\frac{gt}{k}} - e^{-\frac{gt}{k}}\right)dt}{e^{\frac{gt}{k}} + e^{-\frac{gt}{k}}};$$

mais le numérateur de cette fraction est la différentielle du dénominateur, à un facteur constant près. Donc on aura en intégrant

(7) $$x = \frac{k^2}{g}1\frac{1}{2}\left(e^{\frac{gt}{k}} + e^{-\frac{gt}{k}}\right),$$

la constante étant déterminée par la condition que l'on ait à la fois $x = 0$ et $t = 0$.

199. Enfin on peut trouver une relation entre l'espace parcouru et la vitesse. On a (nº 186)

$$v\,dv = \varphi\,dx.$$

Ici la force accélératrice φ est égale à $g - \frac{gv^2}{k^2}$. On a donc

$$v\,dv = \left(g - \frac{gv^2}{k^2}\right) dx$$

ou

$$dx = \frac{k^2}{2g} \times \frac{2v\,dv}{k^2 - v^2}.$$

En intégrant et déterminant la constante par la condition que l'on ait $x = 0$, lorsque $v = 0$, on a

$$(8) \qquad x = \frac{k^2}{2g}\,\mathrm{l}\,\frac{k^2}{k^2 - v^2}.$$

200. Quand on suppose t très-grand, $e^{-\frac{gt}{k}}$ est très-petit, et, en négligeant ce terme, on a

$$v = k, \quad x = kt - \frac{k^2}{g}\,\mathrm{l}\,2.$$

Ainsi, au bout d'un temps très-long, le mouvement devient sensiblement uniforme, et la force accélératrice $\varphi = g - \frac{gv^2}{k^2}$ est sensiblement nulle, car elle devient nulle pour $v = k$. Ce fait se conçoit sans peine, car le poids du corps est une force constante, et la résistance de l'air une force variable qui augmente avec la vitesse du mobile et qui finit par faire, à très-peu près, équilibre au poids du corps. Mais on n'a $v = k$ que pour $t = \infty$, en sorte que le mouvement tend à devenir uniforme, mais ne l'est jamais rigoureusement.

De la valeur

$$k^2 = \frac{g\,\mathrm{D}r}{\gamma\rho}$$

on conclut que le carré de la vitesse du mouvement uniforme vers lequel tend le mouvement varié est proportionnel à la densité du corps et au rayon de la sphère, et en raison inverse de la densité du milieu résistant. Ce fait est confirmé par l'expérience.

Le temps au bout duquel le mouvement devient sensiblement uniforme est d'autant plus grand que la valeur de k est plus grande. Car, pour que l'on ait

$$e^{-\frac{gt}{k}} < \frac{1}{n},$$

il faut que l'on ait

$$t > \frac{k}{g}\,\mathrm{l}n.$$

CAS PARTICULIER OU LA RÉSISTANCE DU MILIEU DEVIENT NULLE.

201. Nous avons vu que la résistance du milieu avait pour expression

$$\mathrm{R} = \frac{gv^2}{k^2}m.$$

Il suit de là qu'en faisant $k = \infty$, on a $\mathrm{R} = 0$. Cette hypothèse doit donc faire retrouver les lois de la chute des corps pesants dans le vide. Mais comme les formules se présentent alors sous une forme indéterminée, nous allons remplacer dans ces équations $e^{\frac{gt}{k}}$ et $e^{-\frac{gt}{k}}$ par leur développement en séries convergentes. Or on a

$$e^{\frac{gt}{k}} = 1 + \frac{gt}{k} + \frac{g^2t^2}{2k^2} + \frac{g^3t^3}{6k^3} + \ldots,$$

$$e^{-\frac{gt}{k}} = 1 - \frac{gt}{k} + \frac{g^2t^2}{2k^2} - \frac{g^3t^3}{6k^3} + \ldots,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{1}{2}\left(e^{\frac{gt}{k}} - e^{-\frac{gt}{k}}\right) = \frac{gt}{k} + \frac{g^3 t^3}{6 k^3} + \ldots,$$

$$\frac{1}{2}\left(e^{\frac{gt}{k}} + e^{-\frac{gt}{k}}\right) = 1 + \frac{g^2 t^2}{2 k^2} + \ldots.$$

Substituant ce résultat dans l'équation

$$(6) \qquad v = \frac{k\left(e^{\frac{gt}{k}} - e^{-\frac{gt}{k}}\right)}{e^{\frac{gt}{k}} - e^{-\frac{gt}{k}}} \quad (197),$$

et faisant les réductions, on trouve pour $k = \infty$

$$v = gt.$$

Maintenant l'équation

$$(7) \qquad x = \frac{k^2}{g}\, \mathrm{l}\, \frac{1}{2}\left(e^{\frac{gt}{k}} + e^{-\frac{gt}{k}}\right) \quad (198)$$

devient par la substitution

$$x = \frac{k^2}{g}\, \mathrm{l}\left(1 + \frac{g^2 t^2}{2 k^2} + \ldots\right).$$

Si l'on développe $\mathrm{l}\left(1 + \frac{g^2 t^2}{2 k^2} + \ldots\right)$ en série, on aura

$$x = \frac{gt^2}{2} + \alpha,$$

α étant la somme des termes qui s'évanouissent pour $k = \infty$. Donc à cette limite on a

$$x = \frac{gt^2}{2}.$$

SEIZIÈME LEÇON.

SUITE DU MOUVEMENT DES CORPS PESANTS.

Mouvement d'un corps pesant lancé de bas en haut. — Mouvement d'un corps pesant dans un milieu qui résiste comme la vitesse. — Chute d'un corps dans le vide en ayant égard à la variation d'intensité de la pesanteur. — Cas particulier d'un corps placé à une petite distance de la surface terrestre.

MOUVEMENT D'UN CORPS PESANT LANCÉ DE BAS EN HAUT.

202. Supposons maintenant que le corps considéré ait un mouvement vertical, mais de bas en haut, dans le milieu résistant. En conservant les mêmes notations,

$$-mg - R$$

sera la force motrice du mobile, et sa force accélératrice sera

$$\varphi = -g - \frac{R}{m},$$

puisque la pesanteur et la résistance du milieu sollicitent le corps en sens inverse de son mouvement. On a donc ici

$$(1) \qquad \frac{dv}{dt} = -g - \frac{R}{m},$$

et si l'on pose encore

$$(2) \qquad \frac{R}{m} = \frac{gv^2}{k^2},$$

il vient

$$\frac{g\,dt}{k} = -\frac{k\,dv}{k^2 + v^2}.$$

Intégrant et déterminant la constante, par la condition que pour $t = 0$ on ait $v = a$, a étant la vitesse initiale

du mobile, on a

$$(3) \qquad \frac{gt}{k} = \text{arc tang}\,\frac{a}{k} - \text{arc tang}\,\frac{v}{k}.$$

203. Cette équation donne le temps en fonction explicite de la vitesse. Pour en déduire la vitesse en fonction du temps, posons

$$\text{arc tang}\,\frac{a}{k} = p, \quad \text{arc tang}\,\frac{v}{k} = q,$$

on aura

$$\frac{gt}{k} = p - q,$$

d'où

$$q = p - \frac{gt}{k}$$

et

$$\text{tang}\,q = \frac{\text{tang}\,p - \text{tang}\,\frac{gt}{k}}{1 + \text{tang}\,p\,\text{tang}\,\frac{gt}{k}}.$$

Remplaçant $\text{tang}\,q$ par $\frac{v}{k}$ et $\text{tang}\,\frac{gt}{k}$ par $\dfrac{\sin\frac{gt}{k}}{\cos\frac{gt}{k}}$, on trouve

$$(4) \qquad v = k\,\frac{a\cos\frac{gt}{k} - k\sin\frac{gt}{k}}{a\sin\frac{gt}{k} + k\cos\frac{gt}{k}}.$$

204. Pour obtenir x ou l'espace parcouru au bout du temps t, on observera que le numérateur de v multiplié par dt est, à un facteur constant près, la différentielle du dénominateur. Donc, si l'on intègre et qu'on détermine la constante par la condition que l'on ait simultanément $x = 0$ et $t = 0$, ce qui revient à placer l'origine des abscisses au point de départ du mobile, on a

$$(5) \qquad x = \frac{k^2}{g}\,\mathrm{l}\left(\frac{a}{k}\sin\frac{gt}{k} + \cos\frac{gt}{k}\right).$$

205. Quand on veut exprimer x en fonction de v, on fait usage de la formule

$$v\,dv = \varphi\,dx,$$

qui devient, en remplaçant φ par sa valeur (202),

$$v\,dv = -\left(g + \frac{gv^2}{k^2}\right)dx$$

ou

$$-\frac{k^2 . 2v\,dv}{k^2 + v^2} = 2g\,dx.$$

Intégrant et déterminant la constante, de manière que l'on ait à la fois $x = 0$ et $v = a$, on a

$$(6) \qquad x = \frac{k^2}{2g}\,\mathrm{l}\,\frac{k^2 + a^2}{k^2 + v^2}.$$

206. Il y a un instant où le corps cesse de monter. Si θ est le temps de l'ascension et h la hauteur la plus grande à laquelle parvient le mobile, on aura, en faisant $v = 0$ dans les formules (4) et (6),

$$\operatorname{tang}\frac{g\theta}{k} = \frac{a}{k}, \quad \text{d'où} \quad \theta = \frac{k}{g}\operatorname{arc\,tang}\frac{a}{k}$$

et

$$h = \frac{k^2}{2g}\,\mathrm{l}\,\frac{k^2 + a^2}{k^2}.$$

Parvenu à cette hauteur, le mobile commence à descendre, et si l'on appelle a' la vitesse qu'il possède lorsqu'il est revenu au point de départ, on aura, en faisant $x = h$, $v = a'$ dans la formule (8) du n° 199,

$$h = \frac{k^2}{2g}\,\mathrm{l}\,\frac{k^2}{k^2 - a'^2}$$

ou

$$\frac{k^2}{2g}\,\mathrm{l}\,\frac{k^2 + a^2}{k^2} = \frac{k^2}{2g}\,\mathrm{l}\,\frac{k^2}{k^2 - a'^2}.$$

On a donc

$$\frac{k^2 + a^2}{k^2} = \frac{k^2}{k^2 - a'^2},$$

d'où l'on tire

$$a' = \frac{ak}{\sqrt{a^2 + k^2}}.$$

Cette formule fait voir que a' est toujours moindre que a.

207. Pour déterminer le temps θ' de la chute du corps, on remplacera, dans la formule (5) du n° 197,

$$\frac{2gt}{k} = 1\frac{k+v}{k-v},$$

v par a' et t par θ', d'où l'on déduira

$$\theta' = \frac{k}{g} 1\sqrt{\frac{k+a'}{k-a'}} = \frac{k}{g} 1\frac{\sqrt{a^2+k^2}+a}{k},$$

et si l'on nomme T le temps total que le mobile met à revenir à sa position initiale, on aura

$$T = \theta + \theta'$$

ou

$$T = \frac{k}{g}\left(\text{arc tang}\,\frac{a}{k} + 1\frac{\sqrt{a^2+k^2}+a}{k}\right)$$

Les quantités a et g sont supposées connues; le temps T peut être obtenu par l'expérience : cette dernière relation peut donc servir à déterminer la constante k pour un mobile donné.

MOUVEMENT D'UN CORPS PESANT DANS UN MILIEU QUI RÉSISTE COMME LA VITESSE.

208. Quand le mobile possède une très-petite vitesse, on peut regarder la résistance du milieu comme proportionnelle à cette vitesse. Si le corps descend, il faudra poser

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{gv}{k}$$

ou

$$(1) \qquad \frac{g\,dt}{k} = \frac{dv}{k-v}.$$

Intégrant et déterminant la constante par la condition

qu'on ait à la fois $t = 0$, $v = 0$, on a

(2) $$\frac{gt}{k} = \mathrm{l}\,\frac{k}{k - v},$$

d'où

(3) $$v = k\left(1 - e^{-\frac{gt}{k}}\right).$$

Multipliant par dt et intégrant,

(4) $$x = kt - \frac{k^2}{g}\left(1 - e^{-\frac{gt}{k}}\right),$$

la constante étant déterminée par la condition que $x = 0$ pour $t = 0$.

MOUVEMENT D'UN CORPS DÉNUÉ DE PESANTEUR DANS UN MILIEU QUI RÉSISTE COMME LA RACINE CARRÉE DE LA VITESSE.

209. Ce cas est intéressant, parce que le mobile finit par s'arrêter et que cette circonstance répond à une solution particulière de l'équation différentielle.

La résistance du milieu, seule force qui sollicite le mobile, agissant en sens inverse du mouvement, on aura

(1) $$\frac{dv}{dt} = -\alpha\sqrt{v}.$$

Comme l'unité de vitesse est arbitraire, on peut la choisir de telle sorte que $\alpha = 2$. Alors l'équation précédente revient à

(2) $$dt = -\frac{dv}{2\sqrt{v}}.$$

Intégrant et supposant $v = a$ pour $t = 0$, on aura

$$t = \sqrt{a} - \sqrt{v}$$

ou

(3) $$v = (\sqrt{a} - t)^2.$$

De cette équation on déduit

$$dx = (\sqrt{a} - t)^2 dt,$$

d'où l'on tire, en intégrant et supposant $x = 0$ pour $t = 0$,

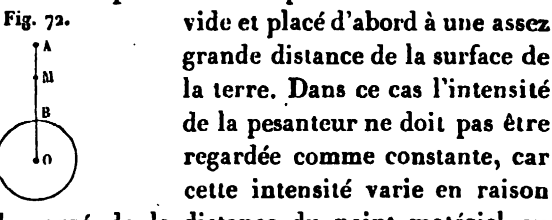
$$(4) \qquad x = \frac{a\sqrt{a}}{3} - \frac{(\sqrt{a} - t)^3}{3}.$$

210. La formule (3) fait voir que si t augmente en restant moindre que $\sqrt{a}$, v diminue, et que $v = 0$ pour $t = \sqrt{a}$; on a en même temps $x = \frac{a\sqrt{a}}{3}$. Ainsi le mobile s'arrêtera après avoir parcouru un espace $\frac{a\sqrt{a}}{3}$, et comme la force accélératrice est nulle en ce moment, le corps restera indéfiniment en repos. Cependant les formules (3) et (4) ne conduisent pas à cette conséquence; car v et x varient pour $t > \sqrt{a}$. Mais, si l'on remonte à l'équation (1), on voit qu'elle est satisfaite par $v = 0$, quel que soit d'ailleurs t. Cette solution particulière s'applique aux cas où $t \geqq \sqrt{a}$; mais elle ne peut s'appliquer au cas où $t < \sqrt{a}$, car au moment du départ la vitesse du mobile est a et non 0. Ainsi, quand on a $t < \sqrt{a}$, on doit appliquer les formules (3) et (4), et la solution particulière quand on a $t \geqq \sqrt{a}$.

CHUTE D'UN CORPS DANS LE VIDE EN AYANT ÉGARD À LA VARIATION DE LA PESANTEUR.

211. Soit M un point matériel pesant tombant dans le vide et placé d'abord à une assez grande distance de la surface de la terre. Dans ce cas l'intensité de la pesanteur ne doit pas être regardée comme constante, car cette intensité varie en raison inverse du carré de la distance du point matériel au centre de la terre. Soient $OB = r$ le rayon de la terre, g l'intensité de la pesanteur à la surface, $AO = a$ la

Fig. 72.



distance initiale du point M, enfin $AM = x$ l'espace parcouru dans le temps t.

L'accélération φ au point M sera donnée par la proportion

$$\frac{\varphi}{g} = \frac{r^2}{(a-x)^2}.$$

On aura donc

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{gr^2}{(a-x)^2}. \tag{1}$$

Si l'on multiplie de part et d'autre par $2\,dx$, on aura

$$\frac{2\,dx\,d^2x}{dt^2} = \frac{2\,gr^2dx}{(a-x)^2}$$

ou

$$d\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = d\,\frac{1}{(a-x)}\,2\,gr^2.$$

Donc, en intégrant et déterminant la constante par la condition que la vitesse initiale soit nulle, on aura

$$v^2 = \frac{2\,gr^2}{a}\,\frac{x}{a-x}. \tag{2}$$

212. Cette formule fait voir que la vitesse augmente avec x, ce qu'on pouvait prévoir. Si l'on fait

$$x = AB = a = r = h,$$

il vient

$$v = \sqrt{2\,gh}\,\sqrt{\frac{r}{a}};$$

comme on a $r < a$, on voit que la vitesse du mobile en arrivant à la surface de la terre est moindre que la vitesse qu'il aurait en tombant de la même hauteur h, si la pesanteur était partout la même qu'à la surface : conséquence évidente.

213. Pour $x = a$, on a $v = \infty$. Donc, si toute la masse du globe était réunie à son centre, la vitesse acquise par le mobile arrivant au centre serait infinie.

214. Si l'on remplace v par $\frac{dx}{dt}$ dans l'équation (2), on a

$$\sqrt{\frac{2gr^2}{a}}\,dt = \frac{(a-x)\,dx}{\sqrt{ax-x^2}};$$

on donne aux radicaux le signe +, parce que la vitesse $\frac{dx}{dt}$ doit être positive. Pour intégrer on écrira

$$\sqrt{\frac{2gr^2}{a}}\,dt = \frac{\left(\frac{1}{2}a-x\right)dx}{\sqrt{ax-x^2}} + \frac{\frac{1}{2}a\,dx}{\sqrt{ax-x^2}};$$

or

$$\frac{\left(\frac{1}{2}a-x\right)dx}{\sqrt{ax-x^2}} = d\sqrt{ax-x^2},$$

$$\frac{\frac{1}{2}a\,dx}{\sqrt{ax-x^2}} = \frac{1}{2}a\,d\,\text{arc cos}\,\frac{a-2x}{a},$$

donc

$$(3)\qquad \sqrt{\frac{2gr^2}{a}}\,t = \sqrt{ax-x^2} + \frac{1}{2}a\,\text{arc cos}\,\frac{a-2x}{a}.$$

On n'ajoute pas de constante, parce qu'on doit avoir $x=0$ pour $t=0$.

215. Cette relation entre l'espace et le temps peut être représentée par une courbe. Menons Ay perpendiculaire à AO, et OD parallèle à Ay. Imaginons qu'une circonférence ayant AO pour diamètre roule sur OD, le point A de cette circonférence engendrera une cycloïde AND, dont l'équation différentielle.

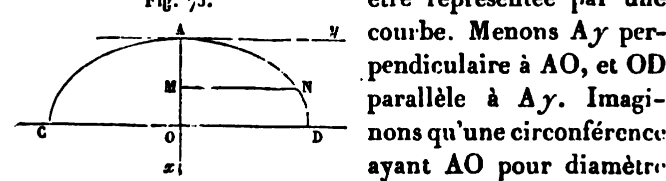


Fig. 73.

par rapport aux axes Oy et Ox, sera

$$dy = dx\sqrt{\frac{a-x}{x}}$$

ou

$$dy = \frac{(a-x)\,dx}{\sqrt{ax-x^2}}.$$

Or le second membre est égal à $\sqrt{\frac{2gr^2}{a}}\,dt$; on aura donc

$$dy = \frac{\sqrt{2gr^2}}{a}\,dt$$

et par conséquent

$$y = t\sqrt{\frac{2gr^2}{a}} \quad \text{ou} \quad t = \frac{y}{r}\sqrt{\frac{a}{2g}}.$$

Le temps employé par le mobile à parcourir l'espace AM est donc proportionnel à l'ordonnée correspondante de la cycloïde.

CAS PARTICULIER D'UN CORPS PLACÉ A UNE PETITE DISTANCE DE LA SURFACE TERRESTRE.

216. Les formules que nous venons de trouver doivent devenir celles du mouvement uniformément accéléré quand on suppose la distance AB très-petite par rapport au rayon terrestre.

En effet, soit (*fig.* 72, p. 150)

$$AB = h,$$

d'où

$$a = r + h,$$

on a, formule (2), n° 211,

$$v^2 = \frac{2gr}{a}\,\frac{x}{r+h-x}.$$

Comme h et x sont des quantités très-petites par rapport

à r, on peut négliger $h - x$, qui est ajouté à r, et remplacer a par r, ce qui donne

$$v^2 = 2gx.$$

Maintenant dans la formule (3) (214) on peut remplacer

$$\frac{1}{2} a \arccos \frac{a - 2x}{a}$$

par

$$\frac{1}{2} a \arcsin \left(\frac{2}{a} \sqrt{ax - x^2}\right);$$

mais $\frac{x}{a}$ et par suite $\frac{2}{a}\sqrt{ax - x^2}$ ou $2\sqrt{\frac{x}{a}\left(1 - \frac{x}{a}\right)}$ étant très-petit, on peut remplacer l'arc par son sinus et à la place de $\frac{1}{2} a \arcsin\left(\frac{2}{a}\sqrt{ax - x^2}\right)$ écrire $\sqrt{ax - x^2}$.

Par la même raison, négligeant x^2 devant ax et remplaçant a par r, la formule (3) devient

$$\sqrt{2gr}\, t = 2\sqrt{rx}$$

ou

$$x = \frac{gt^2}{2}.$$

DIX-SEPTIÈME LEÇON.

DU MOUVEMENT RECTILIGNE DES POINTS ATTIRÉS OU REPOUSSÉS PAR DES CENTRES FIXES.

Mouvement de deux points qui s'attirent en raison inverse du carré des distances. — Mouvement d'un point attiré par un centre fixe en raison directe de la distance. — Mouvement d'un point repoussé par un centre fixe en raison directe de la distance.

MOUVEMENT DE DEUX POINTS MATÉRIELS QUI S'ATTIRENT EN RAISON INVERSE DU CARRÉ DES DISTANCES.

217. On peut ramener au problème précédent (211) le mouvement de deux points matériels qui s'attirent en raison directe des masses et en raison inverse du carré de la distance.

Les équations du mouvement de ces deux points, en appelant m et m' leurs masses, x et x' leurs distances à une origine prise sur la droite qu'ils parcourent et u leur distance au bout du temps t, seront

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{fmm'}{u^2}, \quad m'\frac{d^2x'}{dt^2} = -\frac{fmm'}{u^2};$$

on a donc

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + m'\frac{d^2x'}{dt^2} = 0,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{mx + m'x'}{m + m'} = at + b,$$

c'est-à-dire que le centre de gravité des deux masses se meut uniformément. On a ensuite

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{f(m+m')}{u^2}$$

ou, à cause de $x' - x = u$,

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = -\frac{f(m + m')}{u^2}.$$

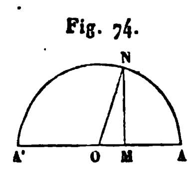
Donc l'un des points se meut par rapport à l'autre comme s'il était attiré par une masse égale à $(m + m')$ placée en un centre fixe. On déterminera donc u en fonction de t comme dans le problème précédent, puis on aura les valeurs de x et de x' par les équations

$$x' - x = u, \quad \frac{mx + m'x'}{m + m'} = at + b.$$

MOUVEMENT D'UN POINT ATTIRÉ EN RAISON DIRECTE DE LA DISTANCE.

218. Considérons un point matériel placé d'abord au point A où sa vitesse est nulle et attiré par un centre fixe O, en raison directe de sa distance à ce dernier point, que nous prendrons pour origine. Comme la force attractive tend à diminuer l'abscisse variable x du point mobile, on a l'équation

Fig. 74.



$$(1) \qquad \frac{d^2 x}{dt^2} = -n^2 x,$$

n^2 étant la mesure de l'attraction exercée sur l'unité de masse du corps à l'unité de distance. Multiplions de part et d'autre par $2dx$, nous aurons

$$\frac{2dx\,d^2x}{dt^2} = -2n^2 x dx,$$

d'où, en intégrant,

$$(2) \qquad \frac{dx^2}{dt^2} = n^2(a^2 - x^2),$$

la constante étant déterminée par la condition que $\frac{dx}{dt}$ ou v soit nulle pour $x = a$.

Comme la vitesse du mobile est négative quand il va dans le sens AO, on a

$$dx = -n\,dt\sqrt{a^2 - x^2}$$

ou

$$n\,dt = -\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Intégrant et déterminant la constante par la condition que l'on ait à la fois $t = 0$, $x = a$, ce qui la rend nulle on a

$$nt = \text{arc}\cos\frac{x}{a}$$

ou

(3) $$x = a\cos nt;$$

et ensuite

(4) $$v = -na\sin nt.$$

219. Lorsque le point mobile arrive en O, on a

$$x = 0 \quad \text{et} \quad nt = \frac{\pi}{2},$$

d'où

$$t = \frac{\pi}{2n}.$$

Parvenu à ce point, sa vitesse est égale à $-na$. Le mobile dépasse donc le point O et continue sa route en vertu de sa vitesse acquise. Pour déterminer le point A′ où il s'arrêtera, faisons $v = 0$, il en résulte $nt = \pi$, d'où $t = \frac{\pi}{n}$ et par suite $x = -a$. Ainsi OA′ = OA.

Arrivé en A′ où il n'a plus de vitesse, le mobile se trouve placé par rapport au point O, comme il l'était en A. Il sera donc attiré avec une vitesse croissante de A′ jusqu'au point O où sa vitesse sera na, puis continuera sa route en vertu de sa vitesse acquise jusqu'en A, pour revenir de nouveau en O, et ainsi de suite.

Ainsi le mobile fera une infinité d'oscillations toutes

égales entre elles et de même durée, de A en A′ et de A′ en A.

220. On peut, comme dans le cas précédent (215), représenter par une construction géométrique la relation qui existe entre l'espace et le temps. Sur AA′ (*fig.* 74, n° 218) comme diamètre décrivons une demi-circonférence. Soit $OM = x$, et menons MN perpendiculaire à AA′. Le triangle rectangle ONM donne

$$x = a \cos \frac{AN}{a};$$

mais

$$x = a \cos nt,$$

donc

$$AN = ant.$$

Ainsi $\frac{AN}{an}$ représentera le temps que le mobile emploie à aller du point M au point A.

MOUVEMENT D'UN POINT REPOUSSÉ PAR UN CENTRE FIXE EN RAISON DIRECTE DE LA DISTANCE.

221. Examinons maintenant le cas d'un point matériel repoussé par un centre fixe O, en raison directe de la distance.

Supposons qu'à l'origine du temps le point matériel placé à une distance $OA = a$ du centre fixe soit animé d'une vitesse dirigée vers le point O et représentée par $-nb$.

Fig. 75.

La force accélératrice, positive puisque la répulsion tend à augmenter l'abscisse du point M, étant représentée par n^2x, on aura

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = n^2x,$$

d'où l'on déduit, en multipliant par $2dx$ et intégrant,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = n^2x^2 + c.$$

Mais, pour $t=0$, on a $\frac{dx}{dt}$ ou $v=-nb$, $x=a$; donc

$$n^2b^2=n^2a^2+c,$$

d'où, en éliminant la constante,

$$(2)\qquad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2=n^2(x^2+b^2-a^2).$$

On en déduit

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2+b^2-a^2}}=-n\,dt$$

ou

$$(3)\qquad v=-n\sqrt{x^2+b^2-a^2}.$$

On prend le signe —, parce que la vitesse est d'abord négative. En intégrant de nouveau et ayant égard aux circonstances initiales, on aura

$$\mathrm{l}\,\frac{x+\sqrt{x^2+b^2-a^2}}{a+b}=-nt$$

ou

$$x+\sqrt{x^2+b^2-a^2}=(a+b)e^{-nt}.$$

On tire facilement de cette équation

$$(4)\qquad 2x=(a+b)e^{-nt}+(a-b)e^{nt}.$$

222. Examinons maintenant quelques cas particuliers. La formule

$$v=-n\sqrt{x^2+b^2-a^2}$$

montre que la vitesse ne peût jamais être nulle, si l'on a $b^2>a^2$. Dans ce cas le mobile atteindra l'origine lorsqu'on aura

$$t=-\frac{1}{n}\,\mathrm{l}\,\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a+b},$$

valeur positive, puisqu'on a $\sqrt{b^2-a^2}<a+b$. Sa vitesse étant alors $-n\sqrt{b^2-a^2}$, le mobile dépassera le point O, et il est clair qu'il se mouvra indéfiniment vers la gauche.

Si l'on a $b < a$, la vitesse sera nulle lorsque l'on aura

$$x = \sqrt{a^2 - b^2},$$

ce qui correspond à un point placé entre O et A, et cette circonstance arrivera à une époque donnée par

$$t = -\frac{1}{n} \operatorname{l} \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a + b}.$$

Il est clair qu'arrivé au point B le mobile, repoussé par l'action du centre fixe, commencera à se mouvoir vers la droite, et sa vitesse sera positive. Il faudra donc, à partir de cet instant, prendre la formule

$$v = +\sqrt{x^2 + b^2 - a^2}.$$

Dans ce cas le mobile ne passera jamais par le point O, car la formule

$$t = -\operatorname{l} \frac{x + \sqrt{x^2 + b^2 - a^2}}{a + b}$$

donne pour $x = 0$

$$t = -\operatorname{l} \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a + b},$$

valeur imaginaire,

Enfin si l'on a $b = a$, les formules se simplifient, et l'on a

$$v = -nx,$$

$$x = 2ae^{-nt},$$

$$t = -\frac{1}{n} \operatorname{l} \frac{x}{a}.$$

La première montre que l'on a $v = 0$ pour $x = 0$; mais la seconde ou la troisième donnant pour $x = 0$, $t = \infty$, on voit que le mobile approchera continuellement du point O, mais n'y arrivera jamais.

DIX-HUITIÈME LEÇON.

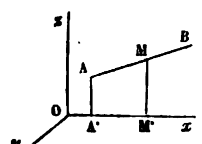
DU MOUVEMENT CURVILIGNE ET DES FORCES QUI LE PRODUISENT.

Projection d'un mouvement rectiligne et uniforme sur un axe. — De la vitesse dans le mouvement curviligne. — De la force qui produit un mouvement curviligne donné.

PROJECTION D'UN MOUVEMENT RECTILIGNE ET UNIFORME SUR UN AXE.

223. Si M est la position occupée par le mobile au bout du temps t, sur la droite AB, et v sa vitesse supposée constante, on aura

Fig. 76.



$$AM = vt.$$

Soit Ox un axe quelconque avec lequel AM fait un angle α, et soit A'M' la projection de AM sur Ox; on aura

$$A'M' = AM\cos\alpha = vt\cos\alpha,$$

ou bien

$$A'M' = v\cos\alpha\, t.$$

Donc *la projection du mobile sur un axe quelconque se meut d'un mouvement uniforme, dont la vitesse p est liée à la vitesse v par la formule*

$$p = v\cos\alpha.$$

Si l'on projette de la même manière le point mobile sur deux autres axes, Oy, Oz, faisant avec AM des angles β, γ, les vitesses p, q, r des projections sur les trois axes seront données par les formules

$$(1)\qquad p = v\cos\alpha,\quad q = v\cos\beta,\quad r = v\cos\gamma.$$

Les quantités p, q, r sont nommées les *composantes de la vitesse* du mobile sur ces axes. On démontre facilement que ces formules conviennent à tous les cas, pourvu que l'on considère p, q, r comme positives ou négatives suivant que les projections du point M se meuvent dans le sens positif de l'axe ou en sens contraire.

224. Lorsqu'on donnera le mouvement du point M, c'est-à-dire les valeurs de v, α, β, γ, les équations

$$v\cos\alpha = p,\quad v\cos\beta = q,\quad v\cos\gamma = r$$

feront connaître les composantes p, q, r. Réciproquement ces composantes étant connues, on en déduira v, α, β, γ par les formules

$$(2)\qquad v = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2},$$

$$(3)\qquad \cos\alpha = \frac{p}{v},\quad \cos\beta = \frac{q}{v},\quad \cos\gamma = \frac{r}{v}.$$

Si l'on mène par le point O une droite représentant en grandeur et en direction la vitesse du mobile, on voit que les composantes de cette vitesse seront représentées en grandeur et en direction par les arêtes d'un parallélipipède dont la vitesse du mobile serait la diagonale.

225. Soient a, b, c les coordonnées du point A où se trouve le mobile à l'origine des temps, et soient x, y, z celles du point M où il se trouve au bout du temps t, le mouvement sera complétement représenté par les trois équations

$$(4)\qquad \begin{cases} x = a + pt, \\ y = b + qt, \\ z = c + rt. \end{cases}$$

En effet, on a

$$OM' = OA' + A'M';$$

Mais

$$OM' = x,\quad OA' = a,\quad A'M' = pt;$$

donc

$$x = a + pt.$$

On démontrerait de la même manière les deux autres formules.

On aurait des formules semblables en prenant des axes obliques.

226. On a vu que la projection sur un axe quelconque d'un point qui se meut d'un mouvement uniforme et rectiligne se meut elle-même d'un mouvement uniforme. Réciproquement, *si les projections d'un point* M *sur trois axes* Ox, Oy, Oz *se meuvent avec des vitesses constantes* p, q, r, *le mouvement du point* M *sera lui-même rectiligne et uniforme.* En effet, soit A le point où se trouve le mobile quand $t = 0$; les projections de la droite AM sur les axes étant pt, qt, rt, on a

$$\text{AM} = t\sqrt{p^2 + q^2 + r^2};$$

de sorte que la distance AM est proportionnelle au temps. En outre, si l'on appelle α, β, γ les angles que la droite AM fait avec les axes, on a

$$\cos\alpha = \frac{pt}{\text{AM}}, \quad \cos\beta = \frac{qt}{\text{AM}}, \quad \cos\gamma = \frac{rt}{\text{AM}}$$

ou

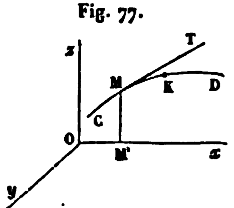
$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}, \\ \cos\beta &= \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}, \\ \cos\gamma &= \frac{r}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}. \end{aligned} \right.$$

Donc la droite AM conserve une direction constante; et comme sa longueur varie proportionnellement au temps, le mouvement est bien rectiligne et uniforme.

DE LA VITESSE DANS LE MOUVEMENT CURVILIGNE.

227. Soit $M(x, y, z)$ un point qui décrit dans l'espace une ligne courbe CMD. Ce point doit être constamment sollicité par une force dont la direction change à chaque instant. Si au bout du temps t cette force cessait d'agir, le mobile prendrait, suivant une certaine droite MT, un mouvement uniforme, et c'est la vitesse de ce mouvement uniforme que nous sommes convenus d'appeler *la vitesse du mobile au point* M (155).

Fig. 77.



La projection M′ du point M sur l'axe Ox se meut d'un mouvement quelconque, qui deviendrait aussi uniforme si la force qui sollicite le point M cessait d'agir.

228. Le mouvement du point M est déterminé par trois équations

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = \psi(t),$$

au moyen desquelles on peut obtenir la vitesse du mobile en fonction du temps. Pour le démontrer, nous distinguerons deux cas.

En premier lieu, si la force P qui sollicite le mobile est constante d'intensité et de direction, la projection de MK sur l'axe des x sera

$$v\Delta t \cos\alpha + \frac{1}{2}\frac{P}{m}\Delta t^2 \cos\lambda,$$

α désignant l'angle que la direction de la vitesse fait avec l'axe des x, et λ l'angle que la force P fait avec ce même axe. On aura donc

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = v\cos\alpha + \frac{1}{2}\frac{P}{m}\Delta t \cos\lambda,$$

et, en passant à la limite,

$$(1)\qquad \frac{dx}{dt} = v\cos\alpha.$$

Si les axes étaient obliques, on aurait, en décomposant la vitesse v en trois autres, p, q, r, et la force P en trois forces X, Y, Z, suivant les axes,

$$\Delta x = p\Delta t + \frac{1}{2}\frac{X}{m}\Delta t^2, \quad \text{d'où} \quad \frac{dx}{dt} = p.$$

Ainsi *les composantes de la vitesse suivant les axes s'obtiendront en prenant les vitesses des projections sur ces axes*, et l'on aura, dans le cas des axes rectangulaires,

$$(2)\qquad \frac{dx}{dt} = v\cos\alpha, \quad \frac{dy}{dt} = v\cos\beta, \quad \frac{dz}{dt} = v\cos\gamma,$$

d'où l'on déduira

$$v^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = \frac{ds^2}{dt^2},$$

d'où

$$(3)\qquad v = \frac{ds}{dt},$$

en désignant par s la longueur d'un arc comptée sur la trajectoire à partir d'un point fixe. Cette formule conviendrait encore si les axes étaient obliques.

229. Quand la force qui agit sur le mobile est variable, on a, en désignant par μ un infiniment petit,

$$(4)\qquad \Delta x = \frac{dx}{dt}\Delta t + \frac{\Delta t^2}{2}\left(\frac{d^2x}{dt^2} + \mu\right).$$

La molécule va de M en K, comme un point qui aurait au bout du temps t la vitesse v suivant la tangente MT et qui serait sollicité par une force d'intensité et de direction constante, dont les composantes seraient

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \mu', \quad \frac{d^2z}{dt^2} + \mu''.$$

Cette force diffère infiniment peu de P, si Δt est très-petit; car si l'on imagine une autre molécule soumise à une force constante P' et arrivant en K, on a

$$\Delta x = v\Delta t \cos\alpha + \frac{\Delta t^2}{2}\frac{P'}{m}\cos\lambda.$$

On déduit de (4)

$$\lim \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{dt} = v\cos\alpha.$$

Les formules sont donc les mêmes que dans le cas où la force est constante.

Dans tous les cas on a

$$\cos\alpha = \frac{\frac{dx}{dt}}{v} = \frac{dx}{dt} : \frac{ds}{dt},$$

ou

$$(5) \qquad \cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds};$$

donc la vitesse est dirigée suivant la tangente MT.

230. Ces formules peuvent encore être obtenues par la méthode des infiniment petits. Pendant le temps infiniment petit dt, le mobile parcourt sur sa trajectoire un espace infiniment petit ds. On peut considérer son mouvement comme rectiligne et uniforme pendant le temps dt, puisque la vitesse ne varie qu'infiniment peu en grandeur et en direction. On aura donc

$$ds = v\,dt, \quad \text{d'où} \quad v = \frac{ds}{dt}.$$

D'ailleurs la direction de la vitesse est celle de l'élément ds ou de la tangente au point M.

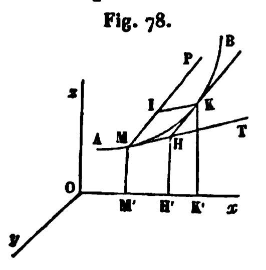
DES FORCES QUI PRODUISENT UN MOUVEMENT DONNÉ.

231. Considérons maintenant la force qui produit le mouvement d'un point matériel dont la masse est m.

Soit v la vitesse du mobile au bout du temps t, lorsqu'il

arrive au point M de la trajectoire AMB. Supposons que la force motrice qui sollicite continuellement ce mobile conserve une intensité constante P et une direction constante parallèle à MP, pendant un certain intervalle de temps θ, qui succède au temps t. Si le point M était en repos au commencement du temps θ, la force constante P lui ferait parcourir dans le temps θ un espace MI égal à $\frac{1}{2}\varphi\theta^2$, φ étant l'accélération due à la force P ou la vitesse que cette force communiquerait à la masse m après l'unité de temps. D'un autre côté, si la force P cessait tout à coup d'agir, au bout du temps t, le mobile suivrait la direction de la tangente MT et parcourrait sur cette direction l'espace $MH = v\theta$, pendant le temps θ, avec la vitesse constante v. Maintenant concevons deux points matériels arrivant en même temps au point M et animés tous deux de la vitesse v suivant la tangente MT, l'un d'eux étant sollicité en outre, pendant le temps θ, par la force constante P. Il résulte du principe général sur les mouvements relatifs, dont nous avons déjà fait usage, que ce point se déplacera par rapport à l'autre, comme si les deux points eussent d'abord été en repos. Le point mobile animé de la vitesse v en M et sollicité par la force constante P arrivera donc, au bout du temps θ, en un point K qu'on déterminera en menant par le point H la droite HK parallèle et égale à MI.

Fig. 78.



La courbe MK décrite ainsi est une parabole; car on a

$$MH = IK = v\theta, \quad MI = \frac{1}{2}\varphi\theta^2,$$

d'où résulte

$$IK^2 = \frac{2v^2}{\varphi} MI,$$

équation d'une parabole, si l'on considère MI et IK comme les coordonnées du point M par rapport aux axes MP et MT.

232. Pendant que le mobile parcourt l'arc de parabole MK, sa projection sur Ox parcourt l'espace M'K' égal à M'H' + H'K', c'est-à-dire à la somme des projections des droites MH et HK. Or on a

$$M'H' = MH\cos\alpha = v\theta\cos\alpha = \frac{dx}{dt}\theta,$$

$$H'K' = HK\cos\lambda = \frac{1}{2}\varphi\theta^2\cos\lambda = \frac{1}{2}\frac{P}{m}\theta^2\cos\lambda,$$

en appelant λ l'angle que la direction constante de la force P fait avec l'axe des x. On a donc

$$M'K' = \frac{dx}{dt}\theta + \frac{P}{m}\cos\lambda\frac{\theta^2}{2}.$$

D'un autre côté, l'espace M'K' étant l'accroissement que prend la variable x, qui est une certaine fonction de t, quand t prend l'accroissement θ, on a, par la formule de Taylor,

$$M'K' = \frac{dx}{dt}\theta + \left(\frac{d^2x}{dt^2} + \mu\right)\frac{\theta^2}{2},$$

μ désignant une quantité qui tend vers zéro, avec θ.

En égalant ces deux valeurs de M'K', supprimant le terme commun $\frac{dx}{dt}\theta$, et divisant ensuite par le facteur commun $\frac{\theta^2}{2}$, on aura

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu = \frac{P}{m}\cos\lambda.$$

Si θ diminue jusqu'à zéro, μ tend vers zéro; mais les autres quantités indépendantes de θ ne changent pas. On aura donc, en passant à la limite,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{P}{m}\cos\lambda,$$

ou

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = P\cos\lambda.$$

Ainsi, dans le cas où la force est constante, $m\frac{d^2x}{dt^2}$ a une valeur constante égale à $P\cos\lambda$, c'est-à-dire à la projection de la force sur l'axe des x.

233. Quand l'intensité et la direction de la force motrice varient à chaque instant, on a encore la formule

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = P\cos\lambda,$$

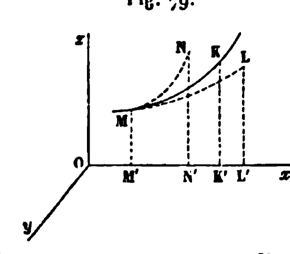
en désignant par P l'intensité de cette force à l'instant considéré, et par λ l'angle qu'elle fait à cet instant avec l'axe des x.

En effet, pendant le temps θ qui succède au temps t, le mobile parcourt une portion MK de sa trajectoire (qui n'est plus une parabole), dont la projection sur l'axe des x est

$$(1) \qquad M'K' = \frac{dx}{dt}\theta + \left(\frac{d^2x}{dt^2} + \mu\right)\frac{\theta^2}{2}.$$

Désignons par P′ la plus grande intensité de la force motrice qui sollicite le point M pendant le temps θ et par λ' le plus petit angle que fait la direction variable de cette force avec l'axe des x. Si le mobile arrivé en M avec la vitesse v était sollicité par une force constante P′ et faisant toujours avec l'axe des x l'angle λ', ce mobile serait transporté, après le temps θ, en un point L au delà du plan KK′ parallèle au plan zOy mené par le point K. En d'autres termes, l'espace M′L′ parcouru par sa projection sur l'axe Ox serait plus grand que l'espace M′K′

Fig. 79.



parcouru par la projection du mobile qui décrit réellement la courbe MK. On a donc

$$M'K' < M'L'$$

ou

$$(2) \qquad \frac{dx}{dt}\theta + \left(\frac{d^2x}{dt^2} + \mu\right)\frac{\theta^2}{2} < \frac{dx}{dt}\theta + \frac{P'}{m}\cos\lambda'\,\frac{\theta^2}{2}.$$

Si la force motrice agissait sur le mobile, animé au point M de la vitesse v, avec sa plus faible intensité P'' et sous une inclinaison constante λ'' égale au plus grand angle qu'elle fasse pendant le temps θ avec l'axe des x, le mobile m arriverait en un point N situé en deçà du plan KK', en sorte que l'espace M'N' décrit par sa projection sur Ox serait moindre que M'K'. On aurait donc

$$M'K' > M'N'$$

ou

$$(3) \qquad \frac{dx}{dt}\theta + \left(\frac{d^2x}{dt^2} + \mu\right)\frac{\theta^2}{2} > \frac{dx}{dt}\theta + \frac{P''}{m}\cos\lambda''\,\frac{\theta^2}{2}.$$

Des deux inégalités précédentes on déduit

$$\frac{P'}{m}\cos\lambda' > \frac{d^2x}{dt^2} + \mu > \frac{P''}{m}\cos\lambda'',$$

et en passant à la limite

$$(4) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{P}{m}\cos\lambda,$$

ou, en posant $P\cos\lambda = X$,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X.$$

Le même raisonnement s'applique aux autres axes : on aura donc, en désignant par Y et Z les composantes de la force P suivant les axes des y et des z,

$$(5) \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z.$$

Ces formules montrent que les projections du point mobile sur chaque axe se meuvent comme des points matériels de même masse sollicités uniquement par la composante de la force motrice suivant cet axe. Elles ne supposent pas les axes rectangulaires.

234. Si X, Y, Z, au lieu de représenter les composantes de la force motrice, représentaient celles de la force accélératrice, on aurait plus simplement

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = Z.$$

235. Si l'on connaît la courbe décrite par un mobile et la loi de son mouvement, c'est-à-dire si les coordonnées x, y, z sont données en fonction du temps par les trois équations

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = \psi(t),$$

une première différentiation fera connaître les composantes de la vitesse parallèles aux axes

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt},$$

et une seconde différentiation fera connaître les composantes de la force accélératrice, savoir :

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2},$$

et, par suite, les composantes de la force motrice.

236. Ordinairement on doit résoudre le problème inverse, c'est-à-dire que la force motrice est donnée à chaque instant de grandeur et de direction. Alors X, Y, Z sont des fonctions connues de t, et l'on a, pour connaître complétement le mouvement du mobile, à intégrer trois équations simultanées.

DIX-NEUVIÈME LEÇON.

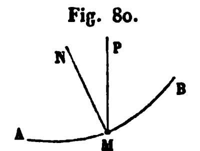
SUITE DU MOUVEMENT CURVILIGNE D'UN POINT MATÉRIEL.

Mouvement d'un point assujetti à se mouvoir sur une courbe ou sur une surface donnée. — Mouvement des projectiles dans le vide.

POINT ASSUJETTI A SE MOUVOIR SUR UNE COURBE DONNÉE.

237. Considérons un point assujetti à se mouvoir sur une ligne courbe donnée AMB et sollicité par la force P. La courbe donnée ou le lien qui force le point matériel à rester sur cette courbe exerce sur lui une certaine action qu'on appelle la *résistance de la courbe*, et le point exerce sur la courbe une réaction ou pression égale et contraire. On peut donc faire abstraction de la courbe donnée et considérer le point mobile comme libre, pourvu qu'on joigne à la force donnée P une force N de grandeur inconnue qui représentera la résistance de la courbe.

Fig. 80.



Cette action ou résistance de la courbe peut être décomposée en deux forces, l'une dirigée suivant la tangente à la courbe, en sens contraire du mouvement, qu'on appelle le *frottement*, l'autre perpendiculaire à la tangente ou normale à la courbe. S'il n'y a pas de frottement, l'action N de la courbe sur le mobile est alors dirigée suivant une normale. En admettant cette hypothèse et désignant par λ, μ, ν les angles que la direction de la force normale N fait avec les axes rectangulaires,

les équations du mouvement du point matériel seront

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X + N\cos\lambda,\\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y + N\cos\mu,\\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z + N\cos\nu.\end{aligned}\right.$$

L'intensité de la force N n'est pas connue *à priori*, et quant à sa direction, on sait seulement qu'elle est perpendiculaire à la tangente; on aura donc

$$(2)\qquad \cos\lambda\, dx + \cos\mu\, dy + \cos\nu\, dz = 0,$$

relation à laquelle il faudra joindre la suivante :

$$(3)\qquad \cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1.$$

238. Si le point matériel est assujetti à demeurer sur une surface donnée

$$(4)\qquad f(x, y, z) = 0,$$

il décrira sur cette surface une certaine courbe inconnue. L'action ou la résistance N que la surface exerce à chaque instant sur le point matériel, égale et contraire à la pression que ce point exerce sur la surface, est dirigée suivant la normale à la surface, s'il n'y a pas de frottement : le point se meut alors comme un point libre qui serait sollicité à la fois par les forces P et N, dont les composantes seraient X, Y, Z, N cos λ, etc., et l'on a encore les équations (1).

On a d'ailleurs

$$\cos\lambda = h\frac{df}{dx},\quad \cos\mu = h\frac{df}{dy},\quad \cos\nu = h\frac{df}{dz},$$

en posant, pour abréger,

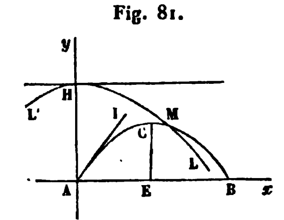
$$h = \pm\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2}};$$

h a le double signe parce qu'on ne sait pas dans quel sens agit la force N qui est dirigée suivant la normale à la surface.

MOUVEMENT DES PROJECTILES DANS LE VIDE.

239. Soit A le point de départ d'un point matériel pesant, lancé avec une vitesse a dans la direction AI.

Fig. 81.



Prenons deux axes, l'un Ay vertical et dirigé en sens inverse de la pesanteur, l'autre horizontal Ax, mené dans le plan IAy. Comme le mobile n'est sollicité, pendant tout son mouvement, que par la pesanteur, il doit se mouvoir dans le plan IAy, car il n'y a pas de raison pour qu'il s'écarte d'un côté de ce plan plutôt que d'un autre. Les équations différentielles du mouvement se réduiront donc, dans ce cas, aux deux suivantes :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g. \tag{2}$$

240. L'intégration de la première équation donne

$$\frac{dx}{dt} = C.$$

La constante C est égale à la composante horizontale de la vitesse, c'est-à-dire à $a\cos\alpha$, α étant l'angle IAx : on a donc

$$\frac{dx}{dt} = a\cos\alpha. \tag{3}$$

La seconde équation du mouvement donne

$$\frac{dy}{dt} = a\sin\alpha - gt, \tag{4}$$

en déterminant la constante par la condition que l'on ait $\frac{dy}{dt} = a \sin\alpha$ pour $t = 0$.

Intégrant de nouveau les équations (3) et (4), et ayant égard à la condition $x = 0$, $y = 0$ pour $t = 0$, on aura enfin

$$x = at\cos\alpha, \tag{5}$$

$$y = at\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}. \tag{6}$$

La première montre que la projection du point mobile sur l'axe Ox se meut d'un mouvement uniforme dont la vitesse est $a\cos\alpha$. La projection sur l'axe Oy se meut d'un mouvement uniformément retardé, comme ferait un mobile lancé de bas en haut avec une vitesse initiale égale à $a\sin\alpha$.

241. En ajoutant les équations (3) et (4) élevées au carré, on trouve

$$v^2 = a^2 - 2agt\sin\alpha + g^2t^2$$

ou

$$v^2 = a^2 - 2gy. \tag{7}$$

242. Pour connaître la courbe que décrit le mobile, il faut éliminer t entre les équations (5) et (6), et l'on aura

$$y = x\,\mathrm{tang}\,\alpha - \frac{gx^2}{2a^2\cos^2\alpha},$$

ou, si l'on pose, pour simplifier, $a^2 = 2gh$,

$$y = x\,\mathrm{tang}\,\alpha - \frac{x^2}{4h\cos^2\alpha}. \tag{8}$$

Cette trajectoire est donc *une parabole, dont l'axe est vertical.*

243. Pour déterminer la position du sommet C, mettons l'équation (8) sous la forme

$$4h\cos^2\alpha\, y - 4hx\sin\alpha\cos\alpha + x^2 = 0,$$

ou, en complétant le carré et transposant,

$$(x - 2h \sin\alpha \cos\alpha)^2 = 4h \cos^2\alpha\, (h \sin^2\alpha - y).$$

Donc si l'on pose

$$h \sin^2\alpha - y = y',$$
$$x - 2h \sin\alpha \cos\alpha = x',$$

l'équation de la parabole prend la forme

$$(9) \qquad x'^2 = 4h \cos\alpha\, y',$$

et la courbe se trouve rapportée à son axe de figure comme axe des ordonnées et à la tangente au sommet comme axe des abscisses. Les coordonnées du sommet sont donc

$$AE = 2h \sin\alpha \cos\alpha,$$
$$EC = h \sin^2\alpha.$$

244. Si dans l'équation (8) on fait $y = 0$, on obtient

$$x = AB = 4h \sin\alpha \cos\alpha,$$

ce qui fait connaître le point B où le projectile rencontre de nouveau l'horizontale Ax. La longueur AB est ce qu'on appelle l'*amplitude du jet*. Elle est double de l'abscisse du sommet, et c'est ce qui devait être, puisque la parabole est symétrique par rapport à son axe CE.

On peut écrire

$$AB = 2h \sin 2\alpha :$$

il en résulte que l'*amplitude du jet a sa plus grande valeur, quand* $\sin 2\alpha = 1$, *c'est-à-dire quand* $\alpha = 45^\circ$, *la vitesse initiale restant la même.*

245. Proposons-nous de trouver sous quel angle il faut lancer un projectile du point A, pour qu'il atteigne un point donné (X, Y). Ici l'inconnue est $\tang\alpha$, et si l'on pose

$$\tang\alpha = u, \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + u^2,$$

l'équation (8) devient, en y remplaçant $\tang\alpha$, x, y par u, X, Y,

$$Y = Xu - \frac{X^2(1+u^2)}{4h},$$

d'où l'on tire

$$u = \frac{2h}{X} \pm \frac{1}{X}\sqrt{4h^2 - 4hY - X^2}.$$

Donc si l'on a

$$4h^2 - 4hY - X^2 > 0,$$

on aura deux valeurs réelles de u, toutes deux positives dans le cas où X est > 0, et par conséquent le projectile pourra être lancé dans deux directions différentes pour atteindre le point M. Si l'on a

$$4h^2 - 4hY - X^2 = 0,$$

il n'existe plus qu'une seule direction donnée par la formule

$$\tang\alpha = \frac{2h}{X},$$

et enfin le problème est impossible quand on a

$$4h^2 - 4hY - X^2 < 0$$

246. La courbe dont l'équation est

$$4h^2 - 4hy - x^2 = 0$$

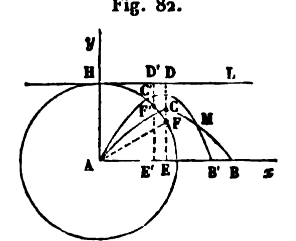
ou

$$x^2 = 4h(h-y)$$

est une parabole L'HL (*fig.* 81, n° 239), dont l'axe est dirigé suivant Ay, et dont le sommet H est situé à la hauteur AH $= h$. Les résultats précédents peuvent s'énoncer ainsi : Quand le point que l'on veut atteindre est dans l'intérieur de cette parabole, le mobile peut être lancé suivant deux directions différentes; il n'y a plus qu'une seule direction convenable, si le point est sur la parabole même; enfin quand ce point est hors de la courbe, le problème n'est plus possible.

247. Si, laissant l'intensité de la vitesse initiale constante, on fait varier sa direction, on obtiendra une infinité de paraboles ACB, AC′B′,.... Toutes ces paraboles ont pour directrice commune l'horizontale HL menée à la hauteur $AH = h$. En effet, soit

Fig. 82.



$$y = x \tang\alpha - \frac{x^2}{4h\cos^2\alpha}$$

l'une des paraboles ACB dont C est le sommet : on a

$$CE = h\sin^2\alpha,$$

et $4h\cos^2\alpha$ étant le paramètre, $h\cos^2\alpha$ est la distance du sommet à la directrice, et par suite $h\sin^2\alpha + h\cos^2\alpha = h$ est la distance de la directrice, qui est horizontale, à l'axe Ax.

HL étant la directrice de l'une quelconque des paraboles, si F en est le foyer, on a $AF = AH$. Donc les foyers de toutes les paraboles sont sur une circonférence décrite du point A comme centre avec $AH = h$ pour rayon. On trouvera facilement que les sommets C et C′ sont sur une ellipse.

248. Représentons par

$$f(x, y, u) = 0$$

l'équation

$$y - xu + \frac{x^2(1+u^2)}{4h} = 0$$

de l'une quelconque des paraboles. Une autre de ces courbes aura pour équation

$$f(x, y, u + \Delta u) = 0.$$

Si M (x,y) est un point commun à ces deux courbes, on aura donc à la fois

$$f(x, y, u) = 0,$$
$$f(x, y, u + \Delta u) = 0,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{f(x, y, u + \Delta u) - f(x, y, u)}{\Delta u} = 0.$$

Si maintenant on suppose $\Delta u = 0$, on a, pour déterminer le point d'intersection de deux paraboles infiniment voisines, les équations

$$f(x, y, u) = 0, \quad \frac{df}{du} = 0$$

ou

$$y = xu - \frac{x^2(1 + u^2)}{4h},$$
$$u = \frac{2h}{x}.$$

L'élimination de u entre ces deux équations donnera

$$4h(h - y) - x^2 = 0$$

pour l'équation du lieu des points M, c'est-à-dire pour l'enveloppe de toutes les paraboles.

Or cette équation est précisément celle que nous avons trouvée pour la parabole HLM, lieu des points que le projectile ne peut atteindre que dans une seule direction. Ce résultat pouvait être prévu, car l'équation $\frac{df}{du} = 0$ exprime que pour un système quelconque de valeurs attribuées à x et y, u considérée comme inconnue a deux valeurs égales.

VINGTIÈME LEÇON.

DES COMPOSANTES DE LA FORCE MOTRICE.

Décomposition de la force motrice en force tangentielle et force centripète. — Cas d'un point assujetti à décrire une courbe donnée. — Force centrifuge. — Cas d'un point assujetti à demeurer sur une surface donnée. — Méthode d'Huyghens. — Application au mouvement de rotation de la terre.

DÉCOMPOSITION DE LA FORCE MOTRICE EN FORCE TANGENTIELLE ET FORCE CENTRIPÈTE.

219. Soit M un point entièrement libre dans l'espace et sollicité par plusieurs forces dont la résultante est P.

Fig. 83.

On sait que si X désigne la composante de cette force parallèle à l'axe des x, on a

$$(1) \qquad X = m\frac{d^2x}{dt^2};$$

mais si α est l'angle que la tangente à la trajectoire fait avec l'axe des x, et v la vitesse, on a

$$\frac{dx}{dt} = v\cos\alpha,$$

d'où

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d(v\cos\alpha)}{dt} = \frac{dv}{dt}\cos\alpha + v\frac{d\cos\alpha}{dt}.$$

or

$$\frac{d\cos\alpha}{dt} = \frac{d\frac{dx}{ds}}{dt} = v\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds} = \frac{v}{\rho}\cos\lambda,$$

λ étant l'angle que fait avec l'axe des x la droite qui va du point M au centre du cercle osculateur à la courbe en

ce point, et ρ le rayon du cercle osculateur : donc

$$(2) \qquad X = m\frac{dv}{dt}\cos\alpha + \frac{mv^2}{\rho}\cos\lambda.$$

Cette équation exprime que la projection de la force P sur un axe quelconque est égale à la somme des projections sur cet axe : 1° d'une force $m\frac{dv}{dt}$, dirigée suivant la tangente à la courbe; 2° d'une force $\frac{mv^2}{\rho}$, dirigée suivant la normale qui passe par le centre de courbure. Donc P est la résultante de ces deux dernières forces.

Ainsi, dans le mouvement d'un point en ligne courbe, la force motrice P se décompose à chaque instant en deux forces : l'une, dirigée suivant la tangente, est nommée la *force tangentielle;* l'autre, dirigée suivant le rayon de courbure, se nomme la *force centripète.* En désignant la première par T, la deuxième par Q, on aura donc

$$(3) \qquad T = \frac{mdv}{dt}, \quad Q = \frac{mv^2}{\rho}.$$

C'est cette dernière force qui produit la courbure de la trajectoire en écartant le mobile de la tangente.

Il résulte de là que le plan qui passe par la force motrice et par la tangente est le plan osculateur au point M, puisqu'il renferme le centre de courbure.

250. Quand le point matériel est sollicité par plusieurs forces dont P est la résultante, on peut décomposer chacune des premières forces en deux autres dirigées l'une suivant la tangente et l'autre perpendiculairement à cette tangente, et par conséquent dans le plan normal à la courbe. Les forces tangentielles se composeront en une seule T, égale à leur somme algébrique, et les forces normales se composeront aussi en une seule Q, nécessairement dirigée suivant le centre de courbure. Il résulte de

là que si une des forces appliquées au point M est normale à la trajectoire, elle ne donnera pas de composante suivant la tangente et n'entrera pas dans la valeur de $m\frac{dv}{dt}$: en d'autres termes, elle n'influera pas sur l'accélération du mobile. De même une force dirigée suivant la tangente à la trajectoire n'aura aucune influence sur la valeur de $\frac{mv^2}{\rho}$, et par suite ne tendra pas à changer la direction du mobile.

POINT ASSUJETTI A SE MOUVOIR SUR UNE COURBE DONNÉE. FORCE CENTRIFUGE.

251. Supposons en premier lieu qu'un point M (*fig.* 83, p. 180), qui n'est actuellement sollicité par aucune force et qui ne se meut qu'en vertu de sa vitesse acquise, soit assujetti à demeurer sur la courbe AMB. Son mouvement doit être celui d'un point libre sollicité par une certaine force N qui représente la résistance de la courbe, action égale et contraire à celle qu'exerce le mobile sur la courbe. En supposant qu'il n'y ait pas de frottement, cette résistance est normale à la courbe, et par conséquent elle n'a pas de composante tangentielle. Donc on a

$$m\frac{dv}{dt} = 0, \quad \text{d'où} \quad v = a,$$

a étant la vitesse initiale. Ainsi la vitesse est constante, et comme de l'équation v ou $\frac{ds}{dt} = a$ on déduit $s = at$, le mobile parcourt sur la trajectoire des espaces égaux en temps égaux. La force normale N doit alors être dirigée suivant le rayon de courbure MK, et l'on a

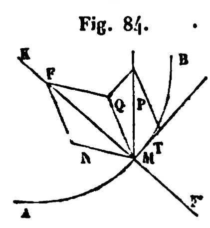
$$\frac{mv^2}{\rho} = \text{N}.$$

La pression exercée par le mobile M sur la courbe ou

sur le lien qui l'oblige à parcourir cette courbe est égale et contraire à la résistance N de la courbe et par conséquent son expression est $\frac{mv^2}{\rho}$. Cette force, égale et contraire à la force centripète, est ce qu'on appelle la *force centrifuge*.

252. Supposons en second lieu que le point M soit sollicité par une certaine force motrice P. On peut faire abstraction de la courbe, si l'on joint à la force P une certaine force N, normale à la courbe, force égale et contraire à la pression que le point M exerce sur elle. Décomposons la force P en deux autres T et Q, la première dirigée suivant la tangente, et la seconde située dans le plan normal de la courbe. Soit F la résultante des deux forces Q et N, situées toutes les deux dans le plan normal. La force F agira suivant le rayon de courbure (251), et l'on aura

Fig. 84.



$$m\frac{dv}{dt} = \text{T}, \quad \frac{mv^2}{\rho} = \text{F}.$$

La force F, dirigée suivant le rayon du cercle osculateur et qui agit à chaque instant pour empêcher le mobile de s'écarter de la courbe suivant la tangente, est la *force centripète*. Une force F', égale et contraire à la force F, qui la détruit à chaque instant, est appelée la *force centrifuge*. La force N étant égale et contraire à la pression exercée à chaque instant par le mobile sur la courbe, cette pression s'obtiendra en cherchant la résultante des deux forces Q et F' qui font équilibre à la force N. On aura

$$\text{F} : \text{Q} = \sin \text{QMN} : \sin \text{FMN},$$

ce qui donne la position de MN.

253. Dans le cas général, la force centrifuge en chaque

point est proportionnelle au carré de la vitesse du mobile et en raison inverse du rayon de courbure de la courbe en ce point.

Si la force motrice était normale à la courbe, on aurait

$$T = o, \quad \text{ou} \quad m\frac{dv}{dt} = o;$$

par suite

$$v = \text{constante}:$$

le mouvement serait uniforme.

Si la force motrice était dirigée suivant la tangente à la courbe, on aurait $Q = o$. Alors la force N se confondrait en grandeur et en direction avec la force centripète F, et la pression exercée sur la courbe par le mobile avec la force centrifuge F′.

MOUVEMENT D'UN POINT SUR UNE SURFACE.

254. Supposons que le mobile soit assujetti à rester sur une surface donnée, et soit AMB (*fig.* 84, p. 183) la courbe qu'il y décrit. On peut faire abstraction de la surface, pourvu que l'on joigne à la force motrice P du mobile, à l'instant considéré, une force N, nécessairement normale à la surface, égale et contraire à la pression que le mobile exerce sur elle. Décomposons encore la force P en deux autres T et Q, l'une tangente et l'autre normale à la trajectoire AMB. Les deux forces Q et N normales à la trajectoire se composent en une seule F dirigée suivant le rayon du cercle osculateur de la trajectoire au point M, et l'on a

$$m\frac{dv}{dt} = T, \quad \frac{mv^2}{\rho} = F;$$

on aura aussi

$$F : Q = \sin QMN : \sin FMN,$$

ce qui détermine la position de MF ou du plan osculateur quand on connaît v, ρ, Q et l'angle QMN.

On aura encore dans ce cas la pression exercée par le point mobile sur la surface, en cherchant la résultante égale et contraire à N, de la force Q et d'une force F', égale et contraire à F.

255. Si la force motrice était nulle, on aurait

$$\frac{mdv}{dt} = 0, \quad \text{d'où} \quad v = \text{constante},$$

et N serait à la fois la mesure de la force centripète et de la force centrifuge.

Si la force P était dirigée suivant la tangente à la trajectoire, on aurait

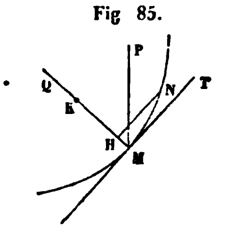
$$Q = 0, \quad \frac{mdv}{dt} = P.$$

La résistance de la surface serait la force centripète. Dans ce cas, MN se confondant avec MF, le plan osculateur PMF contient la normale N à la surface. Alors la courbe que décrit le mobile est telle, que tous ses plans osculateurs sont normaux à la surface. Cette propriété appartient, comme on sait, à la ligne la plus courte tracée sur la surface entre deux points. On peut donc dire que dans ce cas la trajectoire est la ligne la plus courte que l'on puisse tracer sur la surface entre deux quelconques de ses points.

AUTRE MANIÈRE D'OBTENIR LES RÉSULTATS PRÉCÉDENTS.

256. Huyghens trouve à peu près de la manière suivante les composantes de la force motrice. Le mobile arrivant au point M de sa trajectoire, au bout du temps t, décomposons la force motrice P en deux forces T et Q : l'une dirigée suivant la tangente MT, et l'autre perpendiculaire à cette tangente. Dans le temps infiniment petit

Fig 85.



dt, le mobile parcourt l'arc MN $= ds$. Si l'on considère la force motrice P comme constante en grandeur et en direction pendant le temps infiniment petit dt, l'élément MN ou ds peut être considéré comme situé dans le plan PMT qui passe par la tangente MT au point M et par la direction de la force P. C'est donc le plan osculateur de la trajectoire, et la direction de la force Q passe par le centre de courbure K. Pendant que le mobile parcourt l'arc MN, sa projection sur la droite MK parcourt l'espace MH, projection de MN, en se mouvant comme un point de même masse qui, n'ayant pas de vitesse initiale suivant MG, serait sollicité par la composante de la force P parallèle à MK, composante qui conserve pendant le temps dt la valeur Q qu'elle a au point M. On aura donc

(1) $$\mathrm{MH} = \frac{1}{2}\frac{Q}{m}dt^2.$$

Décrivons dans le plan PMT le cercle osculateur au point M, qui touche la tangente MT en M et passe par le point N infiniment voisin du point M : le carré de la corde MN est égal au diamètre multiplié par la projection MH de MN sur le diamètre MK. On a donc

$$\mathrm{MH} = \frac{\overline{\mathrm{MN}}^2}{2\mathrm{MK}}$$

ou

(2) $$\mathrm{MH} = \frac{ds^2}{2\rho},$$

en substituant l'arc infiniment petit ds à sa corde MN et désignant par ρ le rayon de courbure MK.

En égalant les valeurs (1) et (2) de MH, on aura

$$\frac{1}{2}\frac{Q}{m}dt^2 = \frac{ds^2}{2\rho},$$

d'où

$$(3)\qquad Q = \frac{m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{\rho} = \frac{mv^2}{\rho}.$$

Pendant que le mobile parcourt l'arc MN, la projection sur la tangente MT se meut comme un point de masse m sollicité par la force constante T; on a donc

$$T = m\frac{d(v\cos\alpha)}{dt},$$

α désignant l'angle que la vitesse variable v du mobile sur l'arc MN fait avec MT. En effectuant la différentiation,

$$T = m\frac{dv}{dt}\cos\alpha - mv\sin\alpha\frac{d\alpha}{dt}.$$

Mais au point M l'angle α est nul, ce qui donne pour ce point

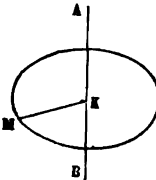
$$(4)\qquad T = m\frac{dv}{dt}$$

Ces considérations s'étendraient au cas d'un point assujetti à se mouvoir sur une courbe ou sur une surface.

REMARQUES SUR LA FORCE CENTRIFUGE.

257. Quand un corps solide tourne uniformément autour d'un axe fixe AB, chaque point M de ce corps possède une force centrifuge particulière F, qui pour l'unité de masse est égale à $\frac{v^2}{\rho}$, v étant la vitesse du point M et ρ le rayon KM du cercle qu'il décrit. En appelant T le temps d'une révolution entière, on a

Fig. 86.



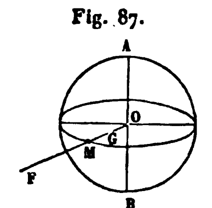
$$v = \frac{2\pi\rho}{T},\quad \text{d'où}\quad F = \frac{4\pi^2\rho}{T^2}.$$

Les forces centrifuges des différents points sont donc proportionnelles à leur distance à l'axe.

238. Ces remarques sont applicables à la terre. Outre son mouvement de translation dans l'espace, elle a un mouvement de rotation autour d'un axe passant par son centre.

Comme la force centrifuge tend à éloigner tous les corps de l'axe de rotation de la terre, elle doit modifier l'intensité de la pesanteur à la surface du globe. Pour apprécier son influence, considérons d'abord un point M situé sur l'équateur. Appelons G l'intensité de l'attraction de la terre sur l'unité de masse au point M, force dirigée suivant MO; F la force centrifuge du point M, rapportée à l'unité de masse, force dirigée suivant MF, prolongement de OM; enfin g le poids apparent de l'unité de masse ou la pression sur l'appui qui soutient la masse m. On aura $g = G - F$. Si l'on appelle ρ le rayon terrestre et T le temps que la terre emploie à faire une révolution, on a (237)

Fig. 87.



$$F = \frac{4\pi^2\rho}{T^2};$$

donc on aura

$$g = G - \frac{4\pi^2\rho}{T^2}.$$

Pour se faire une idée plus exacte de la diminution que la force centrifuge fait subir au poids du corps, observons que la circonférence d'un grand cercle de la terre est égale à 40 000 000 de mètres. L'observation donne pour g très-sensiblement la même valeur dans les différents lieux de la terre. En prenant la valeur $g = 9^m,80896$, à Paris,

on aura à peu près

$$\frac{4\pi^2\rho}{T^2} = \frac{g}{289},$$

d'où

$$g = G - \frac{g}{289}:$$

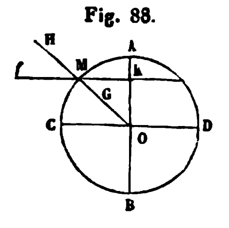
g diffère donc très-peu de G, et l'on a à peu près

$$g = G\left(1 - \frac{1}{289}\right).$$

Donc la pesanteur à l'équateur est diminuée d'environ sa 289e partie. D'ailleurs la formule $F = \frac{4\pi^2\rho}{T^2}$ fait voir que si le mouvement de rotation devenait 17 fois plus rapide, la force F deviendrait 17^2 ou 289 fois plus grande, et alors la pesanteur serait à peu près nulle à l'équateur.

259. Supposons maintenant le point M placé sur un certain parallèle dont le rayon $MK = r$. Soient $\lambda = MOC$ la latitude du point M, G l'intensité de la pesanteur en ce point, f l'intensité, rapportée à l'unité de masse, de la force centrifuge dirigée suivant Mf. On a

Fig. 88.



$$g = G - f\cos\lambda;$$

d'ailleurs

$$f = \frac{4\pi^2 r}{T^2},$$

et à cause de $r = \rho\cos\lambda$,

$$f = \frac{4\pi^2\rho\cos\lambda}{T^2};$$

donc

$$f\cos\lambda = \frac{4\pi^2\rho\cos^2\lambda}{T^2} = \frac{G}{289}\cos^2\lambda,$$

à peu près; donc enfin

$$g = G\left(1 - \frac{\cos^2\lambda}{289}\right).$$

A l'équateur $\cos\lambda = 1$, $g = G\left(1 - \frac{1}{289}\right)$; au pôle $\cos\lambda = 0$, $g = G$.

L'attraction de la terre sur l'unité de masse des corps placés à sa surface doit encore subir une correction qui est due à ce que la terre n'est pas parfaitement sphérique et homogène. En tenant compte de sa forme réelle, on trouve que g est donné par la formule

$$g = G\left(1 - \frac{\cos^2\lambda}{200}\right).$$

VINGT ET UNIÈME LEÇON.

DES FORCES VIVES ET DU TRAVAIL DANS LE MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL.

Différentielle de la force vive. — Formes diverses de $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$. — Définition du travail. — Relation entre le travail et la force vive. — Conséquences du principe des forces vives. — Cas où il y a frottement ou résistance d'un milieu. — Cas où le mobile est sollicité par des forces dirigées vers des centres fixes.

DIFFÉRENTIELLE DE LA FORCE VIVE.

260. P désignant la force motrice qui sollicite un mobile M et X, Y, Z ses composantes, on a

$$(1)\qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = X,\quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y,\quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z.$$

On tire de ces trois équations

$$m\left(\frac{2\,dx\,d^2x + 2\,dy\,d^2y + 2\,dz\,d^2z}{dt^2}\right) = 2(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

Mais la quantité entre parenthèses dans le premier membre est égale à $d.v^2$; on a donc

$$(2)\qquad d.mv^2 = 2(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

261. Cette équation subsiste, lorsque le point mobile est assujetti à rester sur une courbe ou sur une surface donnée. En effet, si N est la force qui représente la résistance de la courbe ou de la surface, on a

$$(3)\qquad \begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = X + N\cos\lambda, \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = Y + N\cos\mu, \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2} = Z + N\cos\nu, \end{cases}$$

λ, μ, ν étant les angles que la normale suivant laquelle la force N est dirigée fait avec les axes. On tire de ces équations

$$d m v^2 = 2(X dx + Y dy + Z dz) + 2N(\cos\lambda\, dx + \cos\mu\, dy + \cos\nu\, dz);$$

mais puisque N est normale à la trajectoire, la dernière parenthèse est nulle. Cette équation se réduit donc à l'équation (2).

262. La quantité mv^2, ou le produit de la masse d'un mobile par le carré de sa vitesse, est ce qu'on appelle la *force vive* du mobile. On a dans tous les cas

$$(4) \qquad d\frac{1}{2}mv^2 = X dx + Y dy + Z dz,$$

X, Y, Z étant les composantes de la force motrice.

AUTRES FORMES DE $X dx + Y dy + Z dz$.

263. Soit ω l'angle PMT que la force motrice P fait avec la tangente. On

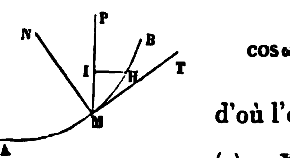


Fig. 89.

$$\cos\omega = \frac{X}{P}\frac{dx}{ds} + \frac{Y}{P}\frac{dy}{ds} + \frac{Z}{P}\frac{dz}{ds},$$

d'où l'on tire

$$(1) \qquad X dx + Y dy + Z dz = P\cos\omega\, ds.$$

Si l'on décompose la force P en une force tangentielle T et une force normale Q, on a $T = P\cos\omega$. Donc

$$(2) \qquad X dx + Y dy + Z dz = T ds.$$

Enfin, si l'on appelle dp la projection MI de l'arc MH $= ds$ sur la direction de la force motrice, on a

$$\cos\omega\, ds = dp,$$

et par suite

$$(3) \qquad X dx + Y dy + Z dz = P dp.$$

Ainsi l'expression $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ est égale : 1° au produit de la force motrice P multipliée par l'élément de la trajectoire et par le cosinus de l'angle que cette force fait avec la tangente; 2° au produit de l'élément de l'arc multiplié par la force motrice estimée suivant la tangente; 3° au produit de cette force motrice multipliée par la projection de l'élément de l'arc sur sa direction.

DÉFINITION DU TRAVAIL.

264. Le produit $T\,ds$ que l'on obtient en multipliant la composante tangentielle de la force P par l'élément de l'arc parcouru dans l'instant dt se nomme *travail élémentaire* ou *élément de travail* de cette force. L'élément de travail est considéré comme positif lorsque la force tangentielle agit dans le sens du mouvement, et comme négatif dans le cas contraire, ou, ce qui revient au même, suivant que l'angle ω est aigu ou obtus. Le signe du travail élémentaire sera donné par l'expression $P\cos\omega\,ds$, en considérant P et ds comme positifs.

Si l'on considère $P\cos\omega\,ds$ comme le produit de P par $\cos\omega\,ds$, on peut dire encore que le travail élémentaire est égal au produit de la force par la projection de l'élément du chemin parcouru sur la direction de cette force.

265. Dans tous les cas, la projection d'une résultante sur une droite étant égale à la somme des projections de ses composantes, on voit que le travail élémentaire de la résultante de plusieurs forces est égal à la somme algébrique des travaux élémentaires de ces dernières forces.

266. On nomme *travail total* d'une force P pour un chemin déterminé AB l'intégrale $\int T\,ds$, prise entre les limites qui correspondent aux extrémités de l'arc parcouru. Les forces normales à la trajectoire n'ayant aucune influence sur la composante tangentielle, n'influent pas sur le travail total.

Pour donner un exemple de travail total, considérons un poids P descendant sous l'action de la pesanteur, soit librement, soit en demeurant sur une courbe quelconque : on aura $P\,ds \cos\omega = P\,dz$, en appelant dz la projection de l'arc ds sur la verticale. Le travail total sera $\int P\,dz$ ou Pz, lorsque le mobile sera descendu de la hauteur verticale z. Ce travail serait $-Pz$ si le mobile montait de la hauteur z.

RELATION ENTRE LE TRAVAIL ET LA FORCE VIVE.

267. Si dans l'équation (2) du n° 260 on remplace $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ par $T\,ds$, on aura

$$(1) \qquad d\,mv^2 = 2T\,ds,$$

d'où

$$(2) \qquad mv^2 = C + 2\int_{s_0}^{s_1} T\,ds.$$

Si k est la vitesse lorsque $s = s_0$, on aura $C = mk^2$, et par suite

$$(3) \qquad (mv^2 - mk^2) = 2\int_{s_0}^{s_1} T\,ds.$$

Ainsi l'accroissement de force vive du mobile, lorsqu'il passe d'une position à une autre, est égal au double du travail de la force motrice.

268. Si la force P est la résultante de plusieurs forces P_1, P_2, ..., dont les composantes tangentielles sont T_1, T_2, T_3, ..., on aura

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + \ldots,$$

d'où

$$\int T\,ds = \int T_1\,ds + \int T_2\,ds + \ldots.$$

On aura donc

$$(1) \qquad mv^2 - mk^2 = 2\left(\int T_1\, ds + \int T_2\, ds + \ldots\right).$$

Donc, si l'on appelle *forces mouvantes* celles qui font un angle aigu avec la tangente, et *forces résistantes* celles qui font un angle obtus et dont l'effet est de retenir le mobile dans son mouvement sur la courbe, on pourra dire que :

L'accroissement de force vive d'un mobile, lorsqu'il passe d'une position à une autre, est égal au double de l'excès du travail des forces mouvantes sur le travail des forces résistantes.

Ce principe est ce que l'on nomme le *principe des forces vives* ou de la transmission du travail, pour le cas d'un simple point matériel. Nous l'étendrons plus tard au cas d'un nombre quelconque de points.

CONSÉQUENCES DU PRINCIPE DES FORCES VIVES.

269. Quand le mobile n'est sollicité par aucune force ou qu'il l'est seulement par des forces toujours normales à la trajectoire, on a $T = 0$, et par suite $v = k$. Ainsi le mouvement est uniforme, ce qu'on a déjà trouvé par une autre méthode.

270. Supposons que $X dx + Y dy + Z dz$ soit la différentielle exacte d'une fonction $f(x, y, z)$ de trois coordonnées x, y, z considérées comme des variables indépendantes, ce qui exige que l'on ait

$$(1) \qquad X = \frac{df}{dx}, \quad Y = \frac{df}{dy}, \quad Z = \frac{df}{dz}.$$

Il résulte des lois de la différentiation que x, y, z étant regardées comme des fonctions quelconques du temps, on aura

$$X\, dx + Y\, dy + Z\, dz = T\, ds = d f(x, y, z).$$

Par conséquent, l'équation des forces vives se réduira à

$$mv^2 = C + 2f(x, y, z);$$

et si l'on désigne par a, b, c les coordonnées du mobile, lorsque $v = k$, on aura

$$(2) \qquad mv^2 - mk^2 = 2f(x, y, z) - 2f(a, b, c).$$

Il résulte de là que l'accroissement de force vive, lorsque le mobile passe de la position (a, b, c) à la position (x, y, z), ne dépend pas de la trajectoire dans l'intervalle, ni du temps qui s'est écoulé entre les deux positions extrêmes, mais seulement des coordonnées de ces deux positions.

271. Plus généralement, si l'on imagine les deux surfaces

$$(3) \qquad f(x, y, z) = C', \quad f(x, y, z) = C'',$$

et que le mobile rencontre la première au point (a, b, c) avec une vitesse k, et la seconde au point (x, y, z) avec la vitesse v, on aura

$$(4) \qquad mv^2 - mk^2 = 2C' - 2C''.$$

L'accroissement de force vive est donc constant et indépendant de la forme de la trajectoire entre les deux surfaces, des points où cette courbe rencontre ces deux surfaces et du temps qui s'est écoulé.

On trouve un résultat de ce genre dans le mouvement d'un mobile sollicité seulement par la pesanteur. Si l'on prend l'axe des z vertical et dirigé dans le sens de la pesanteur, on aura $X = 0$, $Y = 0$, $Z = mg$, et par conséquent

$$d\,mv^2 = 2\,mg\,dz.$$

Ici $f(x, y, z) = mgz$: par suite les deux surfaces $f(x, y, z) = C'$, $f(x, y, z) = C''$ seront deux plans horizontaux, et l'accroissement de force vive, quand on

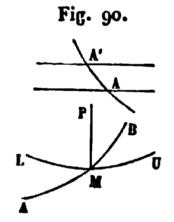
passera de l'un à l'autre, sera indépendant de la trajectoire AA' (*fig.* 90).

272. Dans le cas général, l'équation

$$f(x, y, z) = C$$

représentera une infinité de surfaces différentes, passant par les divers points de la trajectoire AMB. Nous allons démontrer que si LMU est l'une de ces surfaces, la force motrice P au point M lui est normale. En effet, la normale à la surface LMU au point M fait avec les axes des angles dont les cosinus sont proportionnels à $\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, \frac{df}{dz}$; or ces quantités sont elles-mêmes proportionnelles à X, Y, Z, ou aux cosinus des angles que la force P fait avec les axes. Donc la force motrice est normale à la surface LMU.

Fig. 90.



C'est ce que l'on vérifie dans l'exemple précédent où les surfaces analogues à $f(x, y, z) = C$ sont des plans horizontaux perpendiculaires à la force motrice qui agit suivant la verticale.

Si la surface $f(x, y, z) = C$ offrait une résistance indéfinie, et si le point mobile se trouvait placé sur cette surface sans vitesse acquise, il y demeurerait en repos, puisque la force motrice serait normale en ce point à la surface. C'est ce qui arriverait pour un point matériel placé sans vitesse sur un plan horizontal.

CAS OU IL Y A UNE RÉSISTANCE.

273. Quand un mobile éprouve un frottement ou se meut dans un milieu résistant, l'expression $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ n'est plus une différentielle exacte. En effet, s'il y a frottement, cette force s'exerce suivant la tangente à la

trajectoire et en sens inverse du mouvement du mobile; elle est proportionnelle à la pression normale N du mobile sur la courbe qu'il décrit. Le frottement est donc représenté par $-f\mathrm{N}$, f étant un coefficient constant. Ses composantes seront

$$-f\mathrm{N}\frac{dx}{ds},\quad -f\mathrm{N}\frac{dy}{ds},\quad -f\mathrm{N}\frac{dz}{ds}$$

et l'expression

$$-f\mathrm{N}\left(dx\frac{dx}{ds}+dy\frac{dy}{ds}+dz\frac{dz}{ds}\right)=-f\mathrm{N}\,ds$$

sera la partie de $\mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy+\mathrm{Z}dz$ provenant du frottement. Or la pression N est inconnue au point considéré et ne dépend pas uniquement de l'arc parcouru. On ne peut donc pas dire que $-f\mathrm{N}\,ds$, et par suite que $\mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy+\mathrm{Z}dz$, soit, dans ce cas, la différentielle exacte d'une fonction de x, y, z.

274. Quand le mobile se meut dans un milieu résistant, la résistance de ce milieu est une certaine fonction $f(v)$ de la vitesse, et la partie de cette force qui entre dans $\mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy+\mathrm{Z}dz$ est, par un calcul analogue à celui que nous venons de faire, $-f(v)\,ds$. Or la vitesse v, et par suite $f(v)$, ne dépendent pas des différentielles de x, y, z, et par conséquent $-f(v)\,ds$ n'est pas une différentielle exacte, non plus que $\mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy+\mathrm{Z}dz$.

Dans ce cas, si le point se meut sur une courbe connue, il faudra prendre l'équation

$$m\frac{dv}{dt}=\mathrm{T}\quad\text{ou}\quad m\frac{d^2x}{dt^2}=\mathrm{T},$$

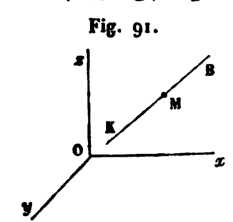
T désignant la composante de la force motrice (y compris les résistances) suivant la tangente. Au moyen des équations de la courbe on pourra exprimer T en fonction de s, et alors la détermination du mouvement sera ramenée à l'intégration d'une équation différentielle du second ordre, tandis que si $\mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy+\mathrm{Z}dz$ était une diffé-

rentielle exacte, on n'aurait à intégrer qu'une équation différentielle du premier ordre.

CAS OU LE MOBILE EST SOLLICITÉ PAR DES FORCES DIRIGÉES VERS DES CENTRES FIXES.

275. Il est un cas important dans lequel l'expression $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ est toujours une différentielle exacte, c'est celui où un point matériel est sollicité par des forces dirigées vers des centres fixes et dont les intensités sont des fonctions des distances du mobile à ces différents centres. Supposons qu'une force dirigée vers le centre fixe K (e, f, g) repousse un point M (x, y, z), avec une énergie R, fonction seulement de la distance $MK = r$. Les composantes de la force R étant $R\frac{x-e}{r}$, $R\frac{y-f}{r}$, $R\frac{z-g}{r}$, la partie de $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ provenant de cette force sera

Fig. 91.



$$\frac{R}{r}[(x-e)\,dx + (y-f)\,dy + (z-g)\,dz]$$

ou $R\,dr$, puisque l'on a

$$r^2 = (x-e)^2 + (y-f)^2 + (z-g)^2,$$
$$r\,dr = (x-e)\,dx + (y-f)\,dy + (z-g)\,dz.$$

Donc R étant une fonction de r, et par conséquent de x, y, z, il en sera de même de $R\,dr$.

Si la force était attractive, le même calcul donnerait $-R\,dr$ pour le terme provenant de cette force dans $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$.

Donc si le mobile est sollicité par un certain nombre de forces $R, R', R'', \ldots$, dirigées à chaque instant vers des centres fixes $K, K', K'', \ldots$, on aura

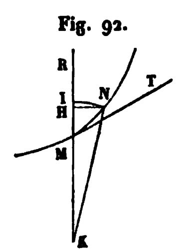
$$d\,mv^2 = 2\,(\pm R\,dr \pm R'\,dr' \ldots),$$

et chaque terme du second membre étant une différentielle exacte, il en sera de même de leur somme.

La même conséquence aura lieu si l'un des centres s'éloigne à l'infini, c'est-à-dire si la force correspondante est perpendiculaire à un plan donné et fonction de la distance du point à ce plan.

276. Il est une autre manière de faire voir que la partie de $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ provenant de la force R ou la quantité de travail élémentaire de cette force est $R\,dr$. En effet, si le point mobile décrit dans l'instant dt l'espace infiniment petit $MN = ds$, dont la projection sur la direction de la force R soit MH, on aura $MH = dr$, en négligeant un infiniment petit du second ordre. Car si l'on décrit du point K comme centre, avec un rayon égal à KN ou $r + dr$, l'arc NI, on a $MI = dr$, et l'on voit que le rapport de MH à MI ayant pour limite l'unité, la quantité de travail de la force R sera $R \times MH$ ou $R\,dr$ en substituant MI à MH.

Fig. 92.



VINGT-DEUXIÈME LEÇON.

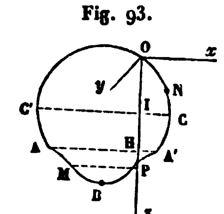
MOUVEMENT D'UN POINT PESANT SUR UNE COURBE. PENDULE SIMPLE.

Mouvement d'un point pesant sur une courbe. — Cas où il y a une vitesse initiale. — Pendule. — Équation du mouvement. — Cas où cette équation peut s'intégrer. — Cas des petites oscillations.

MOUVEMENT D'UN POINT PESANT SUR UNE COURBE.

277. Lorsqu'un point pesant se meut sur une courbe donnée AMA′, la seule force qui le sollicite est la pesanteur, dont l'intensité constante est désignée par g. Le travail de cette force est mgz, et le principe des forces vives donne immédiatement

Fig. 93.



$$v^2 = k^2 + 2g(z - h), \tag{1}$$

en supposant que $v = k$ pour $z = \mathrm{OH} = h$.

Supposons $k = 0$, c'est-à-dire que le mobile parte du point A sans vitesse acquise, l'équation deviendra

$$v^2 = 2g(z - h). \tag{2}$$

Si le mobile est en M, on aura

$$\mathrm{HP} = z - h, \quad v^2 = 2g\,\mathrm{HP}:$$

donc la vitesse acquise par le mobile au point M sera la même que s'il était tombé librement de la hauteur HP.

Si B est le point le plus bas de la courbe, le mobile aura la plus grande vitesse en ce point. Parvenu là, il continuera sa route en vertu de la vitesse acquise, et

s'élevant sur la partie BC avec un vitesse décroissante, comme le montre la formule (2), il s'arrêtera au point A', pour lequel $z = h$. Mais aussitôt, sollicité par la pesanteur, il descendra de nouveau sur la courbe pour revenir au point A, et ainsi de suite; c'est-à-dire qu'il parcourra continuellement le même arc ABA', tantôt dans un sens, tantôt dans un autre.

278. Le temps employé par le mobile pour parcourir l'arc AM est le même, soit qu'il descende, soit qu'il monte, car si l'on considère un élément rectiligne ds de cet arc, comme la vitesse du mobile est la même en valeur absolue, quand il est placé à la même hauteur, le temps employé pour parcourir le petit plan incliné ds sera aussi le même, soit que le mobile descende, soit qu'il monte.

CAS OU LE MOBILE A UNE VITESSE INITIALE.

279. Si au point A, pour lequel $z = h$, le mobile a une vitesse k, on a

$$(1) \qquad v^2 = k^2 + 2g(z - h).$$

La vitesse du mobile va en croissant avec z et est la plus grande possible au point B. Le mobile se meut ensuite sur l'arc BCO et s'y élève plus haut que le point A'.

Prenons pour origine des coordonnées le point O le plus élevé de la courbe. Nous aurons trois cas à examiner.

Premier cas : $k^2 < 2gh$. — Dans ce cas la vitesse du mobile au point A est moindre que celle qu'il acquerrait en tombant verticalement de la hauteur $OH = h$. Le mobile s'élèvera jusqu'à un point C plus haut que A' et qui sera déterminé par l'équation

$$z = OI = h - \frac{k^2}{2g} = \frac{2gh - k^2}{2g},$$

valeur positive. En ce point C la vitesse sera nulle; le mobile s'arrêtera pour revenir sur l'arc CBC′ jusqu'au point C′ situé à la même hauteur que C. De C′ il reviendra en C, et ainsi de suite; de sorte qu'il fera une infinité d'oscillations isochrones.

Deuxième cas : $k > \sqrt{2gh}$. — La vitesse du mobile ne sera jamais nulle, car on aura

$$v^2 = 2gz + (k^2 - 2gh),$$

équation dont le second membre est composé de deux quantités positives. Le mobile reviendra au point O avec la vitesse $\sqrt{k^2 - 2gh}$, dépassera ce point et parcourra la courbe une infinité de fois, toujours dans le même sens.

Troisième cas : $k = \sqrt{2gh}$. — On aura $z = 0$ pour $v = 0$; le mobile ne s'arrêtera qu'au point O, mais il lui faudra un temps infini pour arriver à ce point. En effet, en désignant par s l'arc ON, on a

$$(2) \qquad \frac{ds}{dt} + \sqrt{2gz} = 0.$$

ν étant l'angle que la normale au point N fait avec la verticale et ρ le rayon de courbure en ce point, on a

$$\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds} = \frac{\cos\nu}{\rho}.$$

Soit α une constante, telle que

$$\alpha < \frac{\rho}{\cos\nu},$$

on aura

$$\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds} < \frac{1}{\alpha},$$

d'où

$$\frac{dz}{ds} < \frac{s}{\alpha}, \quad z < \frac{s^2}{2\alpha}.$$

Par conséquent l'équation (2) donne l'inégalité

$$\frac{ds}{s} + dt\sqrt{\frac{g}{\alpha}} > 0,$$

d'où, en intégrant,

$$l s - l s' + (t - t')\sqrt{\frac{g}{\alpha}} > 0,$$

ou enfin

$$t - t' > \sqrt{\frac{\alpha}{g}}\, l \frac{s'}{s},$$

d'où l'on conclut que t augmente indéfiniment quand s tend vers zéro.

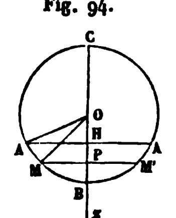
PENDULE. — ÉQUATION DU MOUVEMENT.

280. On appelle *pendule* un corps solide pesant qui peut osciller autour d'un axe horizontal. Pour simplifier la théorie du pendule, on a considéré le cas idéal d'un point matériel suspendu à l'extrémité d'une tige ou d'un fil inextensible et sans masse et dont l'autre extrémité est fixe. C'est ce qu'on nomme un *pendule simple*.

On voit d'abord que la pesanteur ne peut faire parcourir à ce pendule écarté de la verticale qu'un arc de cercle situé dans un plan vertical.

Plaçons l'origine des coordonnées au point de suspension O : prenons l'axe des z vertical et dirigé dans le sens de la pesanteur. Soit k la vitesse du point matériel alors que la direction du fil fait avec la verticale un angle $AOz = \alpha$. L'équation du mouvement sera

Fig. 94.



$$(1) \qquad v^2 = k^2 + 2g(z - h),$$

h étant le z du point A, ou bien

$$(2) \qquad \frac{ds}{dt} = \pm\sqrt{k^2 + 2g(z - h)}.$$

Si l'on compte les arcs parcourus sur la courbe à partir du point A, s croît avec t, quand le mobile se meut dans le sens ABA', et il faut alors prendre le signe +. On prendra le signe — dans le cas contraire.

Supposons le mobile arrivé en M. Soient $\mathrm{OM} = a$ le rayon du cercle, $\mathrm{MOB} = \theta$, on a

$$s = a(\alpha - \theta),$$

et par suite

$$ds = -a\,d\theta;$$

donc

$$-\frac{a\,d\theta}{dt} = \sqrt{k^2 + 2g(z-h)};$$

mais $\mathrm{OP} = z = a\cos\theta$, $\mathrm{OH} = h = a\cos\alpha$; donc l'équation du mouvement sera

$$(3)\qquad dt = -\frac{a\,d\theta}{\sqrt{k^2 + 2ga(\cos\theta - \cos\alpha)}}.$$

CAS OU L'ÉQUATION PEUT S'INTÉGRER.

281. On peut intégrer l'équation (3) dans le cas où l'on a

$$(1)\qquad k^2 = 2ga(1+\cos\alpha).$$

Cette égalité a lieu lorsque la vitesse du mobile au point A est celle qu'il acquiert en descendant sans vitesse initiale du point C le plus haut du cercle; car dans cette hypothèse le carré de la vitesse du mobile, parvenu au point A, est $2g\,\mathrm{CH}$. Or

$$\mathrm{CH} = \mathrm{CO} + \mathrm{OH} = a + a\cos\alpha;$$

on a donc alors

$$k^2 = 2ga(1+\cos\alpha).$$

L'équation (3) se réduit à

$$(2)\qquad dt = -\frac{a\,d\theta}{\sqrt{2ga(1+\cos\theta)}}.$$

ou

$$dt = \sqrt{\frac{a}{g}} \frac{d\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\theta\right)}.$$

Posons

$$\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\theta = 2x,$$

d'où

$$dt = \sqrt{\frac{a}{g}} \frac{dx}{\sin x \cos x},$$

et par conséquent

$$dt = \sqrt{\frac{a}{g}}\, d\,\mathrm{l} \tan x.$$

On aura donc, en intégrant,

$$t = \sqrt{\frac{a}{g}}\, \mathrm{l} \tan x + C,$$

ou bien

$$t = \sqrt{\frac{a}{g}}\, \mathrm{l} \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{4}\right) + C;$$

mais on doit avoir $\theta = \alpha$ pour $t = 0$, ce qui détermine la constante C. On aura donc définitivement

$$(3) \qquad t = \sqrt{\frac{a}{g}}\, \mathrm{l} \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{4}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}\right)}.$$

Telle est la formule qui donne le temps que le mobile emploie à parcourir l'arc AM, dans l'hypothèse où il serait parti du point C, sans vitesse initiale.

Si l'on fait $\theta = 0$, on a

$$t = \sqrt{\frac{a}{g}}\, \mathrm{l} \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}\right);$$

c'est le temps que met le mobile à parcourir l'arc AB.

Si l'on veut avoir le temps que le mobile met à revenir au point C, il faut faire $\theta = -\pi$, ce qui donne $t = \infty$. Ainsi il faut un temps infini au mobile pour remonter jusqu'au point C.

CAS DES PETITES OSCILLATIONS.

282. Comme la formule

$$(1) \qquad dt = \frac{-a\,d\theta}{\sqrt{k^2 + 2ga(\cos\theta - \cos\alpha)}}$$

n'est pas intégrable dans tous les cas, il est nécessaire de restreindre un peu la généralité du problème en cherchant seulement la loi du mouvement quand le pendule effectue de très-petites oscillations de part et d'autre de la verticale Oz. En premier lieu on ne diminuera pas la généralité du problème en supposant nulle la vitesse du mobile au point A; car si elle n'était pas nulle en ce point, il suffirait d'augmenter l'angle α d'une certaine quantité pour avoir le point où cette vitesse est nulle, et c'est ce point que l'on prendrait pour le point A. Si donc on fait $k = 0$, la formule (1) se réduira à

$$(2) \qquad dt = -\sqrt{\frac{a}{g}}\frac{d\theta}{\sqrt{2\cos\theta - 2\cos\alpha}}.$$

Remplaçons maintenant $\cos\theta$ et $\cos\alpha$ par leurs développements en séries, et comme les angles α et θ sont très-petits, négligeons les puissances de ces quantités à partir de la quatrième. Il vient alors

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}, \quad \cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2},$$

d'où

$$2\cos\theta - 2\cos\alpha = \alpha^2 - \theta^2$$

et

$$dt = -\sqrt{\frac{a}{g}}\frac{d\theta}{\sqrt{\alpha^2 - \theta^2}},$$

d'où, en intégrant,

$$(3) \qquad t = \sqrt{\frac{a}{g}} \arccos \frac{\theta}{\alpha}.$$

Nous n'ajoutons pas de constante, parce qu'on doit avoir $\theta = \alpha$ pour $t = 0$.

La formule (3) donne

$$(4) \qquad \theta = \alpha \cos\left(t\sqrt{\frac{g}{a}}\right),$$

expression de l'arc décrit pendant le temps t.

283. Pour avoir la durée T de la première oscillation (et l'on sait déjà que les oscillations sont isochrones, quelle que soit leur amplitude), il faut faire dans l'équation (3) $\theta = -\alpha$, d'où il résulte

$$T = \sqrt{\frac{a}{g}} \arccos(-1).$$

Lorsque nous avons supposé que l'équation (3) donnait simultanément $t = 0$, $\theta = \alpha$, nous avons admis tacitement que nous choisissions o pour l'arc dont le cosinus est l'unité. Or, pendant la première oscillation, quand l'angle θ varie d'une manière continue de $\theta = \alpha$ à $\theta = -\alpha$, le temps t croît d'une manière continue, ce qui exige que $\arccos \frac{\theta}{\alpha}$ croisse aussi d'une manière continue; mais au départ cet arc est o : donc, à la fin de l'oscillation, on ne peut le prendre égal à 3π, à $5\pi, \ldots$, arcs qui ont tous -1 pour cosinus, mais à π. On a par conséquent

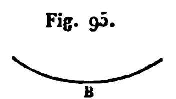
$$(5) \qquad T = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Ce résultat fait voir que le temps de l'oscillation ne dépend pas de α, et par conséquent que la durée d'une oscillation est indépendante de son amplitude, pourvu que celle-ci soit très-petite.

Le temps d'une demi-oscillation se trouve en faisant $\theta = o$ dans la formule (3), on obtient $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}$ ou $\frac{1}{2}$ T, résultat facile à prévoir.

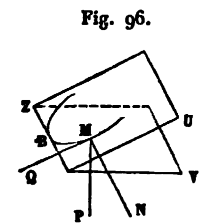
284. Les résultats précédents s'étendent aux oscillations d'un point pesant, écarté très-peu de la verticale et assujetti à se mouvoir sur une courbe dont le plan osculateur au point le plus bas B est vertical. En effet, le cercle osculateur au point B se confondant avec la courbe, dans une étendue très-petite, le mouvement aura lieu, de part et d'autre du point B, comme sur le cercle osculateur de la courbe en ce point. Dès lors la durée commune de chaque oscillation sera $\pi\sqrt{\frac{\rho}{g}}$, ρ étant le rayon du cercle osculateur au point B.

Fig. 95.



285. Si le plan osculateur de la courbe au point B le plus bas faisait un angle i avec le plan horizontal ZV, il faudrait décomposer le poids P en deux forces, l'une normale au plan ZU et qui serait détruite par la résistance de ce plan, l'autre $Q = g \sin i$, située dans ce plan et qui seule ferait mouvoir le mobile, force d'ailleurs constante en grandeur et en direction. On aura donc le temps d'une oscillation en substituant, dans la formule $T = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}$, ρ à a et $g \sin i$ à g, ce qui donne

Fig. 96.



$$T = \pi\sqrt{\frac{a}{g \sin i}}.$$

286. Il est difficile dans la pratique d'apprécier la

durée exacte d'une seule oscillation; alors on compte le nombre n des oscillations pendant un temps τ, et l'on a

$$T = \frac{\tau}{n} = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

On en tire

$$g = \frac{n^2\pi^2 a}{\tau^2}.$$

C'est par cette formule que l'on trouve l'intensité de la pesanteur en différents lieux de la terre.

287. La formule (4)

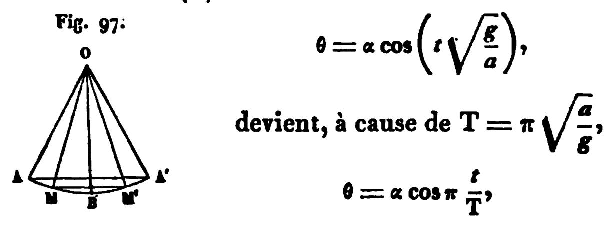


Fig. 97.

$$\theta = \alpha\cos\left(t\sqrt{\frac{g}{a}}\right),$$

devient, à cause de $T = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}$,

$$\theta = \alpha\cos\pi\frac{t}{T},$$

d'où

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\pi\alpha}{T}\sin\pi\frac{t}{T}.$$

On conclut de là :

1° Que θ et $\frac{d\theta}{dt}$ restent les mêmes lorsqu'on augmente t de $2T$, c'est-à-dire que la position du mobile et sa vitesse redeviennent les mêmes après la durée d'une double oscillation;

2° Que si l'on augmente t de T, θ et $\frac{d\theta}{dt}$ changent de signe en conservant leur valeur absolue. Ainsi, à des intervalles de temps qui diffèrent d'une oscillation, le pendule fait des angles égaux avec OB, mais de côtés différents, et ses vitesses, dans ces positions, sont égales et de signes contraires.

VINGT-TROISIÈME LEÇON.

SUITE DE LA MÉTHODE DU PENDULE SIMPLE.

Autre méthode. — Développement en série de la durée d'une oscillation. Pendule cycloïdal. — Tautochrone dans le vide. — Pendule simple dans un milieu resistant.

AUTRE MÉTHODE.

288. Nous allons donner la théorie du pendule par une méthode qui pourra s'appliquer au cas où cet appareil est sollicité par une force quelconque ou lorsqu'il éprouve la résistance d'un milieu.

Fig. 98.

Les mêmes notations (280) étant conservées, soit m la masse du point mobile. L'action de la pesanteur peut se décomposer en deux autres : une force normale détruite par la résistance du point fixe et une force tangentielle. Cette dernière, représentée en général par $m\frac{dv}{dt}$, a pour valeur $mg\sin\theta$. On a donc

$$\frac{dv}{dt} = g\sin\theta. \tag{1}$$

Posons AM $= s$, on aura

$$s = a(\alpha - \theta),\quad \frac{ds}{dt} = v = -\frac{a\,d\theta}{dt},$$

d'où

$$\frac{dv}{dt} = -a\frac{d^2\theta}{dt^2};$$

4.

l'équation du mouvement sera donc

$$-\frac{a\,d^2\theta}{dt^2} = g\sin\theta$$

ou encore

$$(2) \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{a}\sin\theta = 0.$$

Multiplions par $2d\theta$ et intégrons, il vient

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - 2\frac{g}{a}\sin\theta + C = 0;$$

mais on doit avoir en même temps

$$\frac{d\theta}{dt} = 0, \quad \theta = \alpha:$$

donc

$$C = 2\frac{g}{a}\cos\alpha;$$

donc

$$(3) \qquad dt = \mp\sqrt{\frac{a}{g}}\frac{d\theta}{\sqrt{2\cos\theta - 2\cos\alpha}},$$

équation déjà obtenue, et dans laquelle on doit prendre le signe — ou le signe +, selon que le mobile se meut dans le sens ABA' ou dans le sens opposé.

Pour obtenir la durée d'une oscillation, nous changerons de variable. Soient

$$x = 1 - \cos\theta, \quad b = 1 - \cos\alpha$$

on en déduit

$$d\theta = \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}, \quad 2\cos\theta - 2\cos\alpha = 2(b - x),$$

et par conséquent, en prenant le signe — dans la formule (3),

$$(4) \qquad dt = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\frac{dt}{\sqrt{bx - x^2}\sqrt{1 - \frac{x}{2}}};$$

mais le temps T d'une oscillation étant le double du temps que le mobile emploie à parvenir au point le plus bas, on aura, puisque les valeurs de x qui correspondent aux positions A et B sont b et o,

$$\frac{1}{2}\mathrm{T} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\int_b^0 \frac{dx}{\sqrt{bx - x^2}\sqrt{1 - \frac{x}{2}}}$$

ou

$$(5) \qquad \mathrm{T} = \sqrt{\frac{a}{g}}\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{bx - x^2}\sqrt{1 - \frac{x}{2}}}.$$

DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE.

289. L'intégrale précédente ne pouvant pas s'exprimer sous forme finie à l'aide de fonctions algébriques, circulaires ou exponentielles, nous allons la développer en série. On a d'abord

$$\left(1 - \frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{x}{2} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^2}{4} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^3}{8} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\frac{x^4}{16} + \ldots,$$

série convergente, puisque x représentant $1 - \cos\theta$ est moindre que 2.

Par conséquent, on aura

$$\frac{dx}{\sqrt{bx - x^2}\sqrt{1 - \frac{x}{2}}} = \frac{dx}{\sqrt{bx - x^2}} + \frac{1}{2}\frac{x\,dx}{2\sqrt{bx - x^2}} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^2\,dx}{4\sqrt{bx - x^2}} + \ldots.$$

En posant

$$\mathrm{A}_n = \int_0^b \frac{x^n\,dx}{\sqrt{bx - x^2}},$$

on pourra écrire

$$T = \sqrt{\frac{a}{g}}\left(A_0 + \frac{1}{2}\frac{A_1}{2} + \frac{1.3}{2.4}\frac{A_2}{4} + \frac{1.2.3}{2.4.6}\frac{A_3}{8} + \ldots\right).$$

290. On sait, par la théorie des intégrales binômes, que toutes les intégrales définies A_1, A_2,..., se ramènent à A_0. Cette réduction peut se faire directement de la manière suivante. On a

$$d.x^{n-1}\sqrt{bx-x^2} = (n-1)x^{n-2}dx\sqrt{bx-x^2} + \frac{x^{n-1}(b-2x)dx}{2\sqrt{bx-x^2}}$$
$$= \frac{(2n-1)bx^{n-1}dx - 2nx^n dx}{2\sqrt{bx-x^2}};$$

donc

$$d.2x^{n-1}\sqrt{bx-x^2} = (2n-1)b\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{bx-x^2}} - 2n\frac{x^n dx}{\sqrt{bx-x^2}},$$

d'où, en intégrant entre les limites o et b,

$$0 = (2n-1)bA_{n-1} - 2nA_n;$$

donc

$$A_n = \frac{(2n-1)b}{2n}A_{n-1}.$$

On aura de même

$$A_{n-1} = \frac{(2n-3)b}{2(n-1)}A_{n-2}, \quad A_{n-2}\frac{(2n-5)b}{2(n-2)}A_{n-3}; \ldots,$$

et par suite

$$A_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2n}b^n A_0.$$

Il suffit donc de déterminer A_0 ou $\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{bx-x^2}}$. Or

$$\int\frac{dx}{\sqrt{bx-x^2}} = \int\frac{x}{\sqrt{\frac{b^2}{4}-\left(\frac{b}{2}-x\right)^2}}$$

ou

$$\int \frac{dx}{\sqrt{bx - x^2}} = \arc\cos \frac{b - 2x}{b};$$

donc on aura

$$\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{bx - x^2}} = \pi.$$

Par conséquent

$$A_0 = \pi, \quad A_1 = \frac{1}{2} b\pi, \quad A_2 = \frac{1.3}{2.4} b^2\pi, \quad A_3 = \frac{1.3.5}{2.4.6} b^3\pi, \ldots,$$

et par suite

$$T = \pi \sqrt{\frac{a}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{b}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \left(\frac{b}{2}\right)^3 + \ldots \right].$$

Telle est la formule qui donne la durée d'une oscillation pour une amplitude quelconque.

291. Quand l'amplitude est très-petite, $b = 1 - \cos\alpha$ peut être négligé, et l'on retrouve la formule approchée

$$T = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Si, remplaçant b par $1 - \cos\alpha$ ou $\frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{1.2.3.4} + \ldots$, on négligeait dans l'expression les puissances de α supérieures à la seconde, on trouverait

$$T = \pi \sqrt{\frac{a}{g}} \left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right).$$

Ainsi la durée de l'oscillation dépend de l'amplitude et augmente avec cette quantité.

PENDULE CYCLOÏDAL.

292. Considérons le mouvement d'un point pesant sur une cycloïde CBC' renversée, située dans un plan vertical et dont l'axe BD est vertical.

Prenons pour axes de coordonnées l'axe Bx et la tangente By au sommet B. Soit A le point de départ du mobile

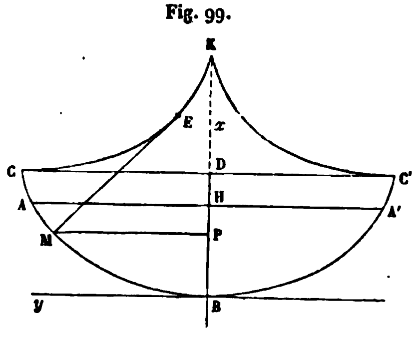


Fig. 99.

où nous supposerons sa vitesse nulle, et soit $M(x, y)$ sa position à une époque quelconque t. Soit a le diamètre BD du cercle générateur. Les composantes de la force accélératrice étant

$$X = -g, \quad Y = 0, \quad Z = 0,$$

l'équation générale du mouvement

$$(1) \qquad dv^2 = -2g\,dx,$$

d'où

$$v^2 = C - 2gx.$$

Si $BH = h$, on doit avoir $v = 0$ pour $x = h$, d'où $0 = C - 2gh$: donc

$$(2) \qquad v^2 = 2g(h - x).$$

Soit maintenant $BM = s$, on a $s^2 = 4ax = 2bx$ en appelant b le rayon de courbure $BK = 2BD$ de la cycloïde au point B. Il en résulte

$$s = \sqrt{2bx}$$

et

$$ds = \sqrt{2b}\,\frac{dx}{2\sqrt{x}}.$$

Comme dans la première oscillation $v = -\frac{ds}{dt}$, on en déduit, à cause de $v = \sqrt{2g(h-x)}$,

$$(3) \qquad dt = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{g}}\,\frac{dx}{\sqrt{hx - x^2}}.$$

Intégrant et déterminant la constante par la condition que l'on ait à la fois $t = 0$ et $x = h$, il vient

$$(4) \qquad t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{g}} \arccos \frac{2x - h}{h}.$$

293. Le temps que le mobile emploie à descendre de A en B s'obtient en faisant $x = 0$ dans cette formule. En appelant T la durée d'une oscillation, on aura

$$\frac{1}{2}T = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{g}} \arccos(-1),$$

d'où

$$(5) \qquad T = \pi\sqrt{\frac{b}{g}}.$$

On obtiendrait encore ce résultat en faisant $x = h$ dans la formule (4) et en prenant 2π pour arc cos (1).

Ainsi, dans la cycloïde, la durée des oscillations est rigoureusement indépendante de leur amplitude, et différents mobiles, partis au même instant, sans vitesse initiale, de divers points de cette courbe, atteindraient au même instant le point le plus bas. Le temps d'une oscillation est $\pi\sqrt{\frac{b}{g}}$; c'est la durée des oscillations très-petites du pendule simple dont la longueur est b, rayon de courbure de la cycloïde au point B, ce qui s'accorde avec ce qu'on a dit des petites oscillations d'un point pesant sur une courbe quelconque.

294. On pourrait imaginer un pendule dans lequel les oscillations s'effectueraient toujours dans le même temps, malgré l'inégalité de leurs amplitudes. Construisons la développée de la cycloïde, composée des deux moitiés KC et KC′ d'une cycloïde égale à la première. Supposons qu'un point pesant soit attaché à l'extrémité d'un fil lié par son autre extrémité au point K. Si le mobile, dans une de ses positions, se trouve sur la cyloïde CBC′, comme le fil, abandonné à lui-même, restera toujours tangent à

CKC′, son extrémité M décrira la cycloïde CBC′. Toutes les oscillations devront s'effectuer dans un même temps égal à $\pi\sqrt{\frac{b}{g}}$; mais ce moyen, proposé par Huyghens, a été abandonné, parce qu'il n'offre aucune précision dans la pratique.

TAUTOCHRONE.

295. On appelle *tautochrone* toute ligne courbe sur laquelle un point pesant abandonné sans vitesse initiale d'un point quelconque de cette courbe parvient dans le même temps au point le plus bas. La cycloïde est donc une courbe tautochrone (293). Nous allons faire voir que c'est la seule courbe tautochrone dans le vide.

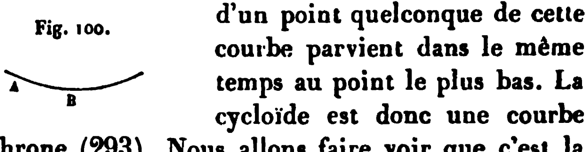


Fig. 100.

Si l'on appelle t' le temps nécessaire pour décrire AB, on a

$$(1) \qquad t'\sqrt{2g} = \int_0^h \frac{\frac{ds}{dx}}{\sqrt{h-x}}dx,$$

et il s'agit de déterminer s en fonction de x, de manière que la valeur de $t'\sqrt{2g}$ soit indépendante de h.

Supposons s développée en série suivant les puissances ascendantes de x :

$$(2) \qquad s = Ax^\alpha + Bx^6 + Cx^\gamma + \ldots.$$

Comme s et x ont leur origine au point B, et qu'on a $s = 0$ pour $x = 0$, il faut que tous les exposants soient positifs et qu'aucun ne soit o. Le plus petit α doit être moindre que l'unité; car en B on a $\frac{dx}{ds} = 0$ ou $\frac{ds}{dx} = \infty$.

Substituant la valeur de s dans (1), on aura

$$t'\sqrt{2g} = A\alpha\int_0^h \frac{x^{\alpha-1}}{\sqrt{h-x}}dx + B6\int_0^h \frac{x^{6-1}}{\sqrt{h-x}}dx + \ldots,$$

et, en faisant $x = hu$,

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} t'\sqrt{2g} &= \mathrm{A}\alpha h^{\alpha-\frac{1}{2}} \int_0^1 \frac{u^{\alpha-1}\,du}{\sqrt{1-u}} \\ &\quad + \mathrm{B}6 h^{6-\frac{1}{2}} \int_0^1 \frac{u^{6-1}\,du}{\sqrt{1-u}} + \ldots . \end{aligned} \right.$$

Cette quantité doit être indépendante de h : il faut donc que le plus petit exposant de h ou $\alpha - \frac{1}{2}$ soit nul, puisque s'il était positif on aurait $\mathrm{T} = 0$ pour $h = 0$, et s'il était négatif on aurait $\mathrm{T} = \infty$ pour la même hypothèse. Les autres termes doivent disparaître; donc

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \mathrm{B} = 0, \quad \mathrm{C} = 0, \ldots,$$

et par suite

$$s = \mathrm{A}x^{\frac{1}{2}}, \quad s^2 = \mathrm{A}^2 x = 2ax,$$

$$t'\sqrt{2g} = \sqrt{\frac{a}{2}} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u-u^2}} = \frac{1}{2}\pi\sqrt{2a}$$

ou

$$t' = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

L'équation $s = \mathrm{A}\sqrt{x}$ appartient à une cycloïde. Donc la cycloïde est la seule courbe tautochrone dans le vide.

296. Autrement, si dans l'équation (1)

$$t'\sqrt{2g} = \int_0^h \frac{ds}{\sqrt{h-x}}$$

on pose

$$t'\sqrt{2g} = \theta, \quad s = \varphi(x), \quad n = \frac{1}{2},$$

on aura

$$\theta = \int_0^h \frac{\varphi'(x)\,dx}{(h-x)^n}.$$

Cette expression devra être indépendante de h. Posons $x = hu$, il en résulte

$$\theta = \int_0^1 \frac{\varphi'(hu)\,h\,du}{h^n(1-u)^n} = \int_0^1 \frac{\varphi'(hu)(hu)^{1-n}\,du}{u^{1-n}(1-u)^n},$$

ou bien

$$\theta = \int_0^1 \psi(hu)\frac{du}{u^{1-n}(1-u)^n}.$$

en posant

$$\varphi'(x)x^{1-n} = \psi(x).$$

Donc

$$\frac{d\theta}{dh} = \int_0^1 \psi'(hu)\frac{u^n\,du}{(1-u)^n}.$$

Or $\frac{d\theta}{dh}$ doit être nul. Il faut donc que $\psi'(hu)$ ou $\psi'(x) = 0$; car autrement on pourrait prendre h assez petit pour que de $x = 0$ à $x = h$, $\psi'(x)$ fût toujours de même signe, et alors l'intégrale, ayant tous ses éléments de même signe, ne serait pas nulle. On a donc

$$\psi'(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \psi(x) = C,$$

d'où

$$\varphi'(x) = \frac{C}{x^{1-n}} = \frac{C}{\sqrt{x}}.$$

Donc

$$\varphi(x) = s = 2C\sqrt{x}$$

ou

$$s = \sqrt{2ax},$$

équation d'une cycloïde.

PENDULE DANS UN MILIEU RÉSISTANT.

297. En désignant par R la résistance du milieu, l'équation du mouvement sera

$$(1)\qquad \frac{d^2s}{dt^2} = g\sin\theta - R.$$

Comme il s'agit de petites vitesses, nous supposerons la résistance proportionnelle à la vitesse, et nous poserons

$$R = \frac{gv}{k} = \frac{g}{k}\frac{ds}{dt}.$$

On a $s = a(\alpha - \theta)$: donc

$$R = -\frac{ga}{k}\frac{d\theta}{dt}.$$

En remplaçant dans l'équation (1) $\frac{d^2s}{dt^2}$ par $-a\frac{d^2\theta}{dt^2}$, $\sin\theta$ par θ et R par la valeur précédente, on aura à intégrer l'équation du second ordre

$$(2)\qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{k}\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{a}\theta = 0.$$

On a une solution particulière de cette équation en prenant

$$\theta = ce^{rt},$$

r étant une racine de l'équation

$$(3)\qquad r^2 + \frac{g}{k}r + \frac{g}{a} = 0.$$

On a donc

$$r = -\frac{g}{2k} \pm \sqrt{\frac{g}{a}}\sqrt{\frac{ga}{4k^2} - 1},$$

ou, en posant $\gamma = \sqrt{1 - \frac{ga}{4k^2}}$,

$$r = -\frac{g}{2k} \pm \gamma\sqrt{\frac{g}{a}}\sqrt{-1}.$$

La solution générale de l'équation (2) sera donc

$$\theta = \left[c\cos\left(t\gamma\sqrt{\frac{g}{a}}\right) + c'\sin\left(t\gamma\sqrt{\frac{g}{a}}\right)\right]e^{-\frac{gt}{2k}}.$$

On déterminera c et c' par les conditions $\theta = \alpha$, $\frac{d\theta}{dt} = 0$, pour $t = 0$, d'où $c = \alpha$, $c' = \frac{\alpha\sqrt{ga}}{2k\gamma}$ et

$$\theta = \alpha\left[\cos\left(t\gamma\sqrt{\frac{g}{a}}\right) + \frac{\sqrt{ga}}{2\gamma k}\sin\left(t\gamma\sqrt{\frac{g}{a}}\right)\right]e^{-\frac{gt}{2k}},$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\alpha\sqrt{\frac{g}{a}}\left(\gamma - \frac{a}{2\gamma k}\right)\sin\left(t\gamma\sqrt{\frac{g}{a}}\right)e^{-\frac{gt}{2k}}.$$

A la fin de chaque oscillation, $\frac{d\theta}{dt} = 0$, ce qui donne

$$T\gamma\sqrt{\frac{g}{a}} = \pi$$

et

$$T = \frac{\pi}{\gamma}\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Les oscillations sont isochrones comme dans le vide, et leur durée est augmentée dans le rapport de 1 à γ. Faisant $t = nT$, on a l'amplitude de la $n^{\text{ième}}$ oscillation,

$$\alpha_n = \alpha e^{-\frac{n\pi\sqrt{ga}}{2\gamma k}} = \alpha p^n;$$

donc les amplitudes successives forment une progression géométrique décroissante dont la raison est $p = e^{-\frac{\pi\sqrt{ga}}{2\gamma k}}$.

298. Lorsque le mouvement a lieu sur une cycloïde, toutes les oscillations se font rigoureusement dans le même temps, en sorte que cette courbe est encore tautochrone dans un milieu qui résiste proportionnellement à la vitesse.

En effet l'équation du mouvement

$$\frac{dv}{dt} = g\frac{dx}{ds} - \frac{gv}{k}$$

devient, en remplaçant v par $-\frac{ds}{dt}$ et $\frac{dx}{ds}$ par $\frac{s}{a}$,

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{g}{k}\frac{ds}{dt} + \frac{g}{a}s = 0.$$

Cette équation, analogue à l'équation (2) obtenue approximativement au n° 297, donnera pour T une valeur indépendante de s.

VINGT-QUATRIÈME LEÇON

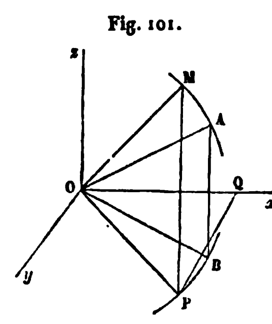
DES FORCES CENTRALES ET DU MOUVEMENT DES PLANÈTES.

Forces centrales. — Principe des aires. — Expression de la vitesse en coordonnées polaires. — Expression de la force accélératrice et de ses composantes. — Lois de Képler. — Conséquences de ces lois.

FORCES CENTRALES. — PRINCIPE DES AIRES.

299. Soit M un point mobile sollicité à chaque instant par une force dont la direction passe constamment par un même point O. Les composantes de la force accélératrice, par rapport à trois axes rectangulaires menés par le point O, seront proportionnelles aux coordonnées du point M. On aura donc

Fig. 101.



$$\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{x} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{y} = \frac{\frac{d^2z}{dt^2}}{z}$$

ou bien

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{x\,d^2y - y\,d^2x}{dt^2} = 0,\\ &\frac{z\,d^2x - x\,d^2z}{dt^2} = 0,\\ &\frac{y\,d^2z - z\,d^2y}{dt^2} = 0,\end{aligned}\right.$$

équations dont chacune est une conséquence des deux

autres. En les intégrant et désignant par c, c', c'' trois constantes arbitraires, on aura

$$(2)\qquad \begin{cases} x\,dy - y\,dx = c\,dt, \\ z\,dx - x\,dz = c'\,dt, \\ y\,dz - z\,dy = c''\,dt. \end{cases}$$

Les constantes c, c', c'' se détermineront quand on connaîtra la position initiale et la vitesse initiale du mobile, en grandeur et en direction, c'est-à-dire les valeurs initiales de x, y, z, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$.

300. Si l'on ajoute les équations après les avoir respectivement multipliées par z, y, x, on a

$$(3)\qquad o = cz + c'y + c''x,$$

équation d'un plan passant par l'origine des coordonnées. Ainsi la trajectoire est une courbe plane. En effet, on voit bien *à priori* que le point mobile ne doit pas sortir du plan mené par le rayon vecteur initial et par la direction de la vitesse initiale.

Interprétons maintenant les équations (2). Soit $\mathrm{OP} = r$ la projection du rayon vecteur OM sur le plan des xy, et soit $\mathrm{PO}x = \theta$, on aura

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{y}{x},$$

d'où, en différentiant par rapport à t,

$$\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = \frac{x\,dy - y\,dx}{r^2\cos^2\theta},$$

d'où l'on tire

$$r^2 d\theta = x\,dy - y\,dx.$$

Mais si l'on appelle λ l'aire BOP parcourue par la projection du rayon vecteur, pendant le temps t, on a

$$d\lambda = \frac{1}{2} r^2 d\theta;$$

donc

$$d\lambda = \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx) \quad \text{ou} \quad d\lambda = \frac{1}{2}c\,dt,$$

d'où l'on tire

$$(4) \qquad \lambda = \frac{1}{2}ct.$$

Il n'y a pas de constante à ajouter : car λ étant la projection de l'aire pendant le temps t, on doit avoir $\lambda = 0$ pour $t = 0$.

On conclut de là que *le secteur engendré par le mouvement de la projection du rayon vecteur sur un plan quelconque est proportionnel au temps.* La constante c est le double du secteur parcouru, pendant l'unité de temps, par la projection du rayon vecteur sur le plan des xy. On aura des résultats analogues pour les deux autres axes. On aura donc

$$(5) \qquad \lambda = \frac{1}{2}ct, \quad \lambda' = \frac{1}{2}c't, \quad \lambda'' = \frac{1}{2}c''t,$$

λ' et λ'' désignant des quantités qui se définissent de la même manière que λ. Si l'on projette le rayon vecteur sur le plan même de la courbe, on en conclut que l'aire engendrée par le rayon vecteur lui-même est proportionnelle au temps.

301. Réciproquement, si la trajectoire d'un point mobile est plane et telle, que les aires engendrées par le rayon vecteur, partant de l'origine des coordonnées, soient proportionnelles aux temps, la force motrice passera constamment par l'origine des coordonnées. En effet, dans cette hypothèse, le secteur OAM est proportionnel au temps; par suite il en est de même de sa projection λ, sur le plan des xy. Donc, en appelant c le double de l'aire parcourue par la projection du rayon vecteur sur le plan des (x, y) pendant l'unité de temps, on a $\lambda = \frac{1}{2}ct$. Or

$$d\lambda = \frac{1}{2}r^2\,d\theta = \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx),$$

donc

$$xdy - ydx = c\,dt.$$

Différentiant cette équation par rapport à t, considérée comme variable indépendante, on en déduit

$$\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{x} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{y};$$

on a de même

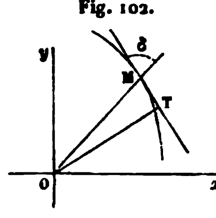
$$\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{x} = \frac{\frac{d^2z}{dt^2}}{z}.$$

On conclut de là que les composantes de la force motrice parallèles aux axes, savoir : $m\frac{d^2x}{dt^2}$, $m\frac{d^2y}{dt^2}$ et $m\frac{d^2z}{dt^2}$, en appelant m la masse du point mobile, sont proportionnelles aux coordonnées de son point d'application. Par conséquent, le parallélipipède dont les coordonnées x, y, z sont les trois côtés contigus est semblable à celui qui a pour côtés les composantes de la force motrice, d'où il suit que la diagonale du second, suivant laquelle est dirigée la force motrice, coïncide en direction avec la diagonale du premier, qui aboutit en O. Donc la force motrice passera constamment par ce dernier point.

EXPRESSION DE LA VITESSE EN COORDONNÉES POLAIRES.

302. Prenons pour pôle le point O, par lequel passe constamment la direction de la force motrice, et pour axe polaire, une droite quelconque Ox, située dans le plan de la courbe. Soient $OM = r$ et $MOx = \theta$. En appelant ds la différentielle de l'arc de la trajectoire, terminé au point M, on sait que $v^2 = \frac{ds^2}{dt^2}$; or, quelle

Fig. 102.



que soit la variable indépendante, $ds^2 = dt^2 + r^2 d\theta^2$; donc

(1) $$v^2 = \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{dt^2}.$$

303. On a souvent besoin de connaître les composantes de la vitesse au point M, suivant OM et suivant une perpendiculaire à OM. Or, si δ est l'angle OMT formé par OM avec la tangente MT à la trajectoire, $v\cos\delta$ et $v\sin\delta$ sont les deux composantes. On a

$$\cos\delta = \frac{dr}{ds}, \quad \sin\delta = \frac{rd\theta}{ds};$$

d'ailleurs

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

Donc

(2) $$v\cos\delta = \frac{dr}{dt}, \quad v\sin\delta = \frac{rd\theta}{dt}.$$

304. Considérons la force accélératrice R qui agit suivant MO. Supposons-la attractive; si elle était répulsive, il suffirait de changer R en $-$R, dans ce qui va suivre. Alors $R\frac{x}{r}$ et $R\frac{y}{r}$ seront les composantes de R parallèles aux deux axes rectangulaires Ox et Oy et, comme elles agissent dans le sens des x et des y négatifs, on aura

(3) $$\frac{d^2x}{dt^2} = -R\frac{x}{r}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -R\frac{y}{r}.$$

En ajoutant ces deux équations respectivement multipliées par y et par x, on a, comme plus haut,

$$\frac{xd^2y - yd^2x}{dt^2} = 0.$$

On en déduit

$$xdy - ydx = cdt,$$

et comme $x\,dy - y\,dx = r^2 d\theta$ (300), il vient

(4) $$r^2 d\theta = c\,dt;$$

Si l'on multiplie respectivement par $2\,dx$ et $2\,dy$ les deux équations (3) et qu'on les ajoute membre à membre, il vient

$$\frac{2dx\,d^2x + 2dy\,d^2y}{dt^2} = -2\mathrm{R}\,\frac{x\,dx + y\,dr}{r}.$$

Or

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \frac{ds^2}{dt^2} = v^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2};$$

d'où résulte

$$r\,dr = x\,dx + y\,dy, \quad dv^2 = \frac{2dx\,d^2x + 2dy\,d^2y}{dt^2}.$$

Donc

(5) $$dv^2 = -2\mathrm{R}\,dr.$$

305. On peut obtenir une expression de la vitesse, qui ne contienne ni t, ni ses différentielles. On a

$$v^2 = \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{dt^2}.$$

D'ailleurs l'équation (4) donne $dt^2 = \frac{r^4 d\theta^2}{c^2}$. Substituant cette valeur dans l'équation précédente, il vient

$$v^2 = c^2\,\frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{r^4 d\theta^2} = c^2\left[\frac{1}{r^2} + \frac{\left(\frac{dr}{r^2}\right)^2}{d\theta^2}\right]$$

ou enfin

(6) $$v^2 = c^2\left[\frac{1}{r^2} + \frac{\left(d\frac{1}{r}\right)^2}{d\theta^2}\right].$$

Donc, si on connaît la nature de la trajectoire, on pourra,

au moyen de cette formule, calculer la vitesse en un point quelconque.

306. Quant aux composantes de la vitesse suivant OM et suivant une perpendiculaire à cette droite, il est facile d'en avoir des expressions indépendantes du temps. En effet, si dans les équations (2) on remplace dt par $\frac{r^2 d\theta}{c}$, on a

$$v\cos\delta = \frac{cdr}{r^2 d\theta}, \quad v\sin\delta = \frac{crd\theta}{r^2 d\theta}.$$

ou

$$(7) \qquad v\cos\delta = -\frac{cd\frac{1}{r}}{d\theta}, \quad v\sin\delta = \frac{c}{r}.$$

On tire de la dernière

$$(8) \qquad v = \frac{c}{p},$$

p étant la longueur de la perpendiculaire $OT = r\sin\delta$, abaissée du point O sur la tangente MT, d'où l'on conclut que *la vitesse en un point de la courbe est en raison inverse de la perpendiculaire abaissée du point* O *sur la tangente à la trajectoire, au point considéré.*

EXPRESSION DE LA FORCE ACCÉLÉRATRICE EN FONCTION DES COORDONNÉES DU POINT MOBILE.

307. Reprenons l'équation (305)

$$(1) \qquad -2Rdr = dv^2.$$

Différentions l'équation (6) du n° 305 et, comme t n'entre plus dans cette équation, prenons θ au lieu de t pour variable indépendante, nous aurons

$$dv^2 = c^2\left[-\frac{2dr}{r^3} - \frac{2dr}{r^2}\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2}\right].$$

Portant cette expression de dv^2 dans l'équation (5) $dv^2 = -2R\,dr$, il en résulte

$$R = c^2\left[\frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2}\right]$$

ou

$$(2)\qquad R = \frac{c^2}{r^2}\left[\frac{1}{r} + \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2}\right].$$

Ainsi, quand on connaîtra la trajectoire, on aura la force motrice en un point quelconque de la courbe. Réciproquement, quand on connaîtra la loi suivant laquelle varie la force R, l'équation (2) pourra servir à déterminer la trajectoire.

LOIS DE KÉPLER.

308. Les lois du mouvement des planètes ont été déduites de l'observation par Képler. Elles sont au nombre de trois :

1° *Les trajectoires de toutes les planètes sont des courbes planes, et pour chacune d'elles l'aire engendrée par le rayon vecteur parti du soleil et aboutissant à la planète est proportionnelle au temps.*

2° *Ces courbes sont des ellipses dont l'un des foyers est au soleil.*

3° *Les carrés des temps employés par les différentes planètes pour accomplir une de leurs révolutions sont entre eux comme les cubes des grands axes de ces ellipses.*

Ces lois se rapportent au centre de gravité de chaque planète, ainsi qu'à celui du soleil.

CONSÉQUENCES DES LOIS DE KÉPLER.

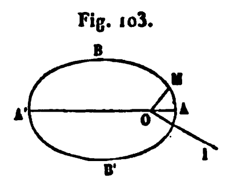
309. Il résulte de la première loi que la *force motrice qui sollicite une planète est constamment dirigée vers*

le centre du soleil, et comme la trajectoire elliptique tourne toujours sa concavité vers le soleil, il faut en conclure que *cette force est attractive*, puisqu'elle éloigne à chaque instant la planète de la tangente à son orbite en tendant à la rapprocher du soleil.

310. Au moyen de la seconde loi, nous allons déterminer la loi suivant laquelle varie l'intensité de cette force avec les diverses positions de la planète sur son orbite.

Soit O la position du soleil dont le centre de gravité est un foyer de l'ellipse. Soient OI l'axe polaire, $AA' = 2a$ le grand axe de cette ellipse, l'angle $AOI = \omega$. Soient $OM = r$, $MOI = \theta$ les coordonnées polaires de la position actuelle de la planète

Fig. 103.



L'équation polaire de l'ellipse est

$$(1) \qquad r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\theta-\omega)},$$

en appelant e l'excentricité ou le rapport de la distance focale au grand axe; on déduit de là

$$\frac{1}{r} = \frac{1+e\cos(\theta-\omega)}{a(1-e^2)}, \qquad \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta} = \frac{-e\sin(\theta-\omega)}{a(1-e^2)}.$$

Par conséquent, en substituant dans la formule (305)

$$v^2 = c^2\left[\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2\right],$$

on a

$$v^2 = c^2\left[\frac{1+2e\cos(\theta-\omega)+e^2}{a^2(1-e^2)^2}\right].$$

Remplaçant dans le numérateur 1 par 2 — 1, puis

$$2+2e\cos(\theta-\omega) = 2[1+e\cos(\theta-\omega)]$$

par sa valeur $\frac{2a(1-e^2)}{r}$, tirée de l'équation de la courbe, il vient, en divisant haut et bas par $1-e^2$,

$$v^2 = \frac{c^2}{a^2(1-e^2)}\left(\frac{2a}{r}-1\right). \tag{2}$$

En différentiant, on en déduit

$$dv^2 = -\frac{2c^2}{a(1-e^2)}\frac{dr}{r^2}.$$

Or on a obtenu l'équation

$$-2\mathrm{R}\,dr = dv^2,$$

d'où résulte

$$-2\mathrm{R}\,dr = -\frac{2c^2}{a(1-e^2)}\frac{dr}{r^2}$$

et

$$\mathrm{R} = \frac{c^2}{a(1-e^2)}\frac{1}{r^2}$$

ou

$$\mathrm{R} = \frac{\mu}{r^2}, \tag{3}$$

en posant

$$\mu = \frac{c^2}{a(1-e^2)}.$$

Ainsi *la force* R *est en raison inverse du carré de la distance du centre de gravité de la planète à celui du soleil.* Le calcul donne $\mathrm{R} > 0$, ce qui montre bien que la force motrice est attractive, comme on l'avait déjà vu.

311. On peut encore trouver la valeur de R de la manière suivante. On a

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e\cos(\theta - \omega)}{a(1-e^2)},$$

d'où résulte

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} = \frac{-e\cos(\theta-\omega)}{a(1-e^2)}.$$

Par conséquent, à cause de l'équation (2), n° 307, on a

$$R = \frac{c^2}{r^2}\left[\frac{1 + e\cos(\theta - \omega)}{a(1 - e^2)} - \frac{e\cos(\theta - \omega)}{a(1 - e^2)}\right]$$

ou simplement

$$R = \frac{c^2}{a(1 - e^2)}\frac{1}{r^2} = \frac{\mu}{r^2}.$$

312. Si $r = 1$, on a $R = \mu$. Nous allons démontrer que cette quantité μ, qui représente la force accélératrice rapportée à l'unité de distance, est la même pour toutes les planètes. La constante c représente, pour une orbite quelconque, le double de l'espace parcouru par le rayon vecteur, dans l'unité de temps. Donc, si l'on appelle T le temps de la révolution complète de la planète considérée, on a

$$\frac{1}{2}cT = \pi ab,$$

b étant le demi petit axe de l'ellipse; on tire de là

$$\frac{1}{2}cT = \pi a^2\sqrt{1 - e^2};$$

donc

$$c = \frac{2\pi a^2\sqrt{1 - e^2}}{T}, \quad c^2 = \frac{4\pi^2 a^4(1 - e^2)}{T^2},$$

d'où enfin

$$\mu = 4\pi^2\frac{a^3}{T^2}.$$

Or, d'après la troisième loi de Képler, le quotient $\frac{a^3}{T^2}$ est le même pour toutes les planètes; donc μ est constant, ce qui démontre le théorème énoncé.

VINGT-CINQUIÈME LEÇON.

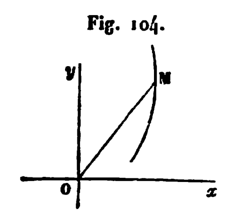
SUITE DU MOUVEMENT DES PLANÈTES

Mouvement d'un point attiré par un centre fixe en raison inverse du carré de la distance. — Cas d'une orbite elliptique. — Cas d'une orbite circulaire ou presque circulaire. — Cas d'une orbite parabolique.

MOUVEMENT D'UN POINT ATTIRÉ PAR UN CENTRE FIXE EN RAISON INVERSE DU CARRÉ DE LA DISTANCE.

313. Supposons toute la masse d'une planète réunie à son centre de gravité, et cherchons le mouvement que prendra ce point, sollicité à chaque instant par une force dont la direction passe constamment par un point fixe O, et dont l'intensité varie en raison inverse du carré de la distance $OM = r$.

Fig. 104.



En premier lieu, la trajectoire est plane et située dans le plan qui passe par le point fixe et par la direction de la vitesse initiale. Prenons le point O pour pôle et Ox pour axe polaire, et soient r et θ les coordonnées du point M, au bout du temps t : on aura, par le principe des aires,

$$(1) \qquad r^2 d\theta = c dt.$$

Or (303)

$$\frac{r^2 d\theta}{dt} = r \times \frac{r d\theta}{dt} = r \times v \sin\delta;$$

en appelant v la vitesse du mobile et δ l'angle que forme

le rayon vecteur avec la tangente à la trajectoire. Donc

$$(2) \qquad c = v \times r \sin \delta.$$

Ainsi on peut dire que la constante c, qui représentait déjà le double du secteur engendré par le rayon vecteur, pendant l'unité de temps, la trajectoire étant supposée connue, sera pour nous, dans la question actuelle, le produit de la vitesse du mobile par la perpendiculaire abaissée du point fixe sur la tangente, à un instant quelconque, par exemple à l'origine du temps.

Soit maintenant R la force accélératrice à l'instant que l'on considère. On a

$$(3) \qquad dv^2 = -2R\,dr,$$

et comme ici $R = \frac{\mu}{r^2}$, en appelant μ la force accélératrice à l'unité de distance, il vient

$$dv^2 = -\frac{2\mu\,dr}{r^2}$$

et, par suite, en intégrant,

$$(4) \qquad v^2 = \frac{2\mu}{r} - b.$$

La valeur de la constante arbitraire b se déterminerait en cherchant la valeur de $\frac{2\mu}{r} - v^2$, à une époque quelconque du mouvement, par exemple à l'origine du temps. D'ailleurs, puisque

$$v^2 = c^2\left[\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2\right],$$

l'équation différentielle de la trajectoire est

$$(5) \qquad c^2\left[\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2\right] = \frac{2\mu}{r} - b.$$

314. Pour intégrer plus facilement, posons $\frac{1}{r} = z$, d'où résulte

$$d\theta = \frac{\mp c\,dz}{\sqrt{-b + 2\mu z - c^2 z^2}}.$$

On voit que $\frac{dz}{d\theta}$ devant être < 0 ou > 0, suivant que r croît ou décroît lorsque θ augmente, il faudra prendre au numérateur le signe $-$ ou le signe $+$, suivant que le premier ou le second cas aura lieu. Si donc nous supposons que r croisse en même temps que θ, on aura

$$d\theta = \frac{-c\,dz}{\sqrt{-b + 2\mu z - c^2 z^2}} = \frac{-c^2 dz}{\sqrt{\mu^2 - bc^2 - (c^2 z - \mu)^2}}$$

ou bien

$$d\theta = \frac{-c^2 dz}{\sqrt{\mu^2 - bc^2}\sqrt{1 - \frac{(c^2 z - \mu)^2}{\mu^2 - bc^2}}}.$$

On a toujours $\mu^2 - bc^2 > 0$, sans quoi $\frac{d\theta}{dz}$ serait imaginaire pour toutes les valeurs possibles de θ. Donc si l'on pose

(6) $$\frac{c^2 z - \mu}{\sqrt{\mu^2 - bc^2}} = q,$$

il vient

$$\frac{c^2 dz}{\sqrt{\mu^2 - bc^2}} = dq, \quad d\theta = \frac{-dq}{\sqrt{1 - q^2}};$$

d'où, en intégrant et appelant ω un angle constant, on a enfin

$$\theta = \omega + \operatorname{arc}\cos q$$

ou

(7) $$\cos(\theta - \omega) = \frac{c^2 z - \mu}{\sqrt{\mu^2 - bc^2}}.$$

Quoique cette formule ait été établie dans l'hypo-

thèse où r et θ croissent simultanément, elle convient également, alors même que r diminue lorsque θ croît. En effet, lorsque ce dernier cas a lieu, $\frac{dz}{d\theta}$ doit être plus grand que o; donc il en est de même de $\frac{dq}{d\theta}$; car, à cause de $dq = \frac{c^2 dz}{\sqrt{\mu^2 - bc^2}}$, dq et dz, et par suite $\frac{dq}{d\theta}$ et $\frac{dz}{d\theta}$, sont toujours de même signe. Or l'équation $q = \cos(\theta - \omega)$, donnant $\frac{dq}{d\theta} = -\sin(\theta - \omega)$, fait voir qu'en prenant la formule $\theta - \omega = \text{arc}\cos q$, $\frac{dq}{d\theta}$, et par suite $\frac{dz}{d\theta}$, changent de signe en s'évanouissant lorsque $\theta - \omega$ devient égal à un multiple quelconque de π, ce qui correspond aux positions du mobile où z, et par suite r, est un maximum ou un minimum.

315. En remplaçant z par $\frac{1}{r}$, dans l'équation (7), il vient, pour l'équation de la trajectoire,

$$(8)\qquad r = \frac{\frac{c^2}{\mu}}{1 + \sqrt{1 - \frac{bc^2}{\mu^2}}\cos(\theta - \omega)}.$$

On voit que cette courbe est toujours une section conique, car l'équation générale d'une section conique, rapportée à un foyer et à un axe polaire, faisant un angle ω avec l'axe qui passe par ce foyer, est

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \omega)}.$$

La courbe est une ellipse, si $e < 1$; une parabole, si $e = 1$, et une hyperbole, si $e > 1$. Par conséquent, en se rappelant que b est égal à la valeur initiale de $\frac{2\mu}{r} - v^2$,

on voit que, si à une époque quelconque du mouvement on a

$$v^2 < \frac{2\mu}{r}, \text{ la courbe est une ellipse;}$$

$$v^2 = \frac{2\mu}{r}, \text{ elle est une parabole;}$$

$$v^2 > \frac{2\mu}{r}, \text{ elle est une hyperbole.}$$

Ainsi l'espèce de la courbe dépend uniquement de la grandeur de la vitesse à l'origine du temps, mais nullement de sa direction, en sorte que différents mobiles, lancés successivement du même point de l'espace, avec des vitesses égales, mais de directions différentes, parcourraient tous des courbes de même espèce.

CAS OU LA COURBE EST UNE ELLIPSE.

316. En appelant $2a$ le grand axe et e l'excentricité, l'équation de l'ellipse est

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos(\theta - \omega)}.$$

Identifiant avec l'équation (8) du n° 315, on a

$$(1) \qquad e = \sqrt{1 - \frac{bc^2}{\mu^2}}, \quad a = \frac{\mu}{b},$$

formules qui déterminent les éléments de l'ellipse, en fonction des données du problème.

317. Il reste encore à déterminer v, r et θ en fonction du temps t, afin de connaître la vitesse et la position du mobile à une époque donnée. On a d'abord (313)

$$(2) \qquad v^2 = \frac{2\mu}{r} - b,$$

d'où, à cause de

$$v^2 = \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{dt^2},$$

on a

$$\frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{dt^2} = \frac{2\mu}{r} - b.$$

En éliminant $d\theta$ entre cette équation et l'équation $r^2 d\theta = c\,dt$, il vient

$$dt = \frac{\mp r dr}{\sqrt{-br^2 + 2\mu r - c^2}}$$

ou

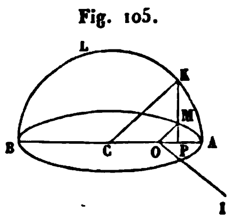
(3) $$dt = \frac{r dr}{\sqrt{-br^2 + 2\mu r - c^2}},$$

en supposant d'abord que r croisse avec t. En remplaçant b par $\frac{\mu}{a}$ et c^2 par $\mu a(1 - e^2)$, cette différentielle peut se mettre sous la forme

(4) $$dt = \frac{r dr}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}\sqrt{a^2 e^2 - (a - r)^2}}.$$

Si AMB est l'ellipse parcourue, le mobile est le plus près du point O, pôle et foyer de l'ellipse, à l'extrémité A du grand axe nommé *périhélie* de la planète, et il est le plus loin de O, à l'autre extrémité B, qu'on appelle *aphélie* de la planète. Par conséquent le rayon vecteur r varie de $OA = a(1 - e)$ à $OB = a(1 + e)$.

Fig. 105.



Il est donc permis, pour la commodité de l'intégration, d'introduire une variable auxiliaire u, telle que

(5) $$r = a(1 - e\cos u).$$

On en tire

$$dr = ae\sin u\,du,$$

et l'équation (4) devient

$$\frac{\sqrt{\mu}}{a\sqrt{a}}\,dt = (1 - e\cos u)\,du$$

ou

$$(6)\qquad n\,dt = (1 - e\cos u)\,du,$$

en posant, pour abréger,

$$n = \frac{\sqrt{\mu}}{a\sqrt{a}}.$$

En intégrant, on a l'équation

$$(7)\qquad nt = u - e\sin u.$$

il n'y a pas de constante à ajouter, si l'on compte le temps à partir du moment où la planète est à son périhélie; car alors $r = a(1 - e)$, et par conséquent $\cos u = 1$, d'où $u = 0$ en même temps que $t = 0$.

318. Pour construire l'angle auxiliaire u, sur BA comme diamètre décrivons une circonférence de cercle. Soient M la position actuelle du mobile et C le centre de l'ellipse. Prolongeons l'ordonnée MP jusqu'au point K où elle rencontre la circonférence. Je dis que l'angle $\mathrm{KCA} = u$. En effet, on a, en vertu d'une propriété connue des rayons vecteurs de l'ellipse,

$$r = a - e \times \mathrm{CP} = a - e \times a\cos\mathrm{KCA} = a(1 - e\cos\mathrm{KCA});$$

mais

$$(8)\qquad r = a(1 - e\cos u),$$

d'où

$$\cos\mathrm{KCA} = \cos u \quad \text{et} \quad \mathrm{KCA} = u.$$

L'angle u est appelé l'*anomalie excentrique* de la planète, tandis que l'angle $\mathrm{MOA} = \theta - \omega$ se nomme l'*anomalie vraie*. On pourrait maintenant éliminer u entre les équations (7), (8); mais il vaut mieux conserver ces deux équations avec la variable auxiliaire u. En donnant

à cette variable toutes les valeurs possibles, on en déduira ensuite les valeurs correspondantes de r et de t.

319. On peut trouver une équation entre l'anomalie vraie et l'anomalie excentrique. On a

$$r = a(1 - e\cos u) = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos(\theta - \omega)};$$

d'où résulte

$$e\cos u = 1 - \frac{1-e^2}{1+e\cos(\theta-\omega)} = \frac{e\cos(\theta-\omega)+e^2}{1+e\cos(\theta-\omega)},$$

$$1 + \cos u = \frac{(1+e)[1+\cos(\theta-\omega)]}{1+e\cos(\theta-\omega)},$$

$$1 - \cos u = \frac{(1-e)[1-\cos(\theta-\omega)]}{1+e\cos(\theta-\omega)}.$$

En divisant ces deux équations l'une par l'autre, on obtient

$$\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} u = \frac{1-e}{1+e} \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}(\theta - \omega)$$

ou

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\theta - \omega) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tang} \frac{1}{2} u.$$

320. La durée T de la révolution entière de la planète se déduit de la formule $nt = u - e\sin u$, en y faisant $u = 2\pi$, ce qui donne

$$n\mathrm{T} = 2\pi$$

ou

$$\mathrm{T} = \frac{2\pi a\sqrt{a}}{\sqrt{\mu}},$$

en remplaçant n par $\frac{\sqrt{\mu}}{a\sqrt{a}}$. On en déduit, pour la valeur de la force accélératrice, à l'unité de distance, commune à toutes les planètes

$$\mu = \frac{4\pi^2 a^3}{\mathrm{T}^2}.$$

Il est bon d'observer que l'excentricité de toutes les orbites planétaires est très-petite, car pour la planète Mars, dont l'excentricité est la plus grande, on a $e = \frac{1}{60}$.

CAS D'UNE ORBITE CIRCULAIRE OU PRESQUE CIRCULAIRE.

321. La théorie indique que l'ellipse peut se réduire à un cercle. Dans ce cas $e = 0$, $r = a$ et le carré de la vitesse $v^2 = \frac{\mu}{a}$ devient constant. En même temps, la force accélératrice

$$\frac{\mu}{r^2} = \frac{\mu}{a^2} = \frac{av^2}{a^2} = \frac{v^2}{a}$$

est aussi constante et égale à la force centripète $\frac{v^2}{a}$.

322. Quand le nombre e est très-petit, on peut déterminer approximativement l'anomalie excentrique u, le rayon vecteur r et l'anomalie vraie $\theta - \omega$, en fonction du temps t. De l'équation

$$nt = u - e \sin u,$$

on déduit

$$u = nt + e \sin(nt + e \sin u)$$

ou

$$u = nt + e \sin nt \cos(e \sin u) + e \sin(e \sin u) \cos nt.$$

Maintenant, comme e est supposé très-petit, convenons de ne conserver, dans ce qui va suivre, aucun terme qui contiendrait e à une puissance supérieure à la première. Alors on devra simplement prendre 1 pour $\cos(e \sin u)$, $e \sin u$ pour $\sin(e \sin u)$, et négliger $e \sin(e \sin u)$. L'équation précédente devient

$$u = nt + e \sin nt. \tag{1}$$

En remplaçant u par cette valeur dans l'équation $r = a(1 - e \cos u)$ et négligeant, comme ci-dessus, les

puissances de e supérieures à la première, on obtient de même

(2) $$r = a(1 - e\cos nt).$$

Enfin, pour avoir la relation entre θ et t, on part de l'équation $r^2 d\theta = cdt$. On a

$$c = na^2\sqrt{1-e^2}$$

et

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\theta-\omega)} = a(1-e^2)\frac{1}{1+e\cos(\theta-\omega)},$$

c'est-à-dire

$$r = a(1-e^2)[1 - e\cos(\theta-\omega) + e^2\cos^2(\theta-\omega) - \ldots]$$

ou simplement

$$r = a[1 - e\cos(\theta-\omega)],$$

en négligeant les puissances de e, supérieures à la première. On en déduit au moyen de la même simplification

$$r^2 d\theta = a^2[1 - 2e\cos(\theta-\omega)]d\theta$$

et par suite, à cause de

$$r^2 d\theta = cdt = na^2\sqrt{1-e^2}dt,$$

on a

$$[1 - 2e\cos(\theta-\omega)]d\theta = ndt,$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$\theta - \omega = nt + 2e\sin(\theta-\omega).$$

Enfin si l'on remplace $\sin(\theta-\omega)$ par

$$\sin[nt + 2e\sin(\theta-\omega)] = \sin nt\cos[2e\sin(\theta-\omega)] + \cos nt\sin[2e\sin(\theta-\omega)],$$

il vient, en développant et négligeant comme précédem-

ment les termes qui contiennent en facteur une puissance de e supérieure à la première,

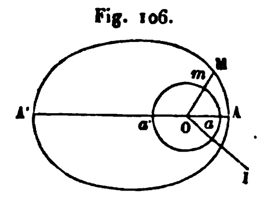
$$\theta - \omega = nt + 2e \sin nt. \tag{3}$$

Les équations (1), (2) et (3) sont celles auxquelles on voulait parvenir.

323. Quand $e = 0$, la formule (2) donne $r = a$ et fait voir que la trajectoire est un cercle. En même temps, l'équation (3) montre que l'angle θ augmente proportionnellement au temps; donc la vitesse est constante, comme on l'avait déjà conclu d'autres formules.

D'après cela, AMA′ étant l'orbite d'une planète, décrivons du point O comme centre, avec un rayon arbitraire Oa, une circonférence de cercle. Imaginons maintenant qu'un mobile quelconque m se meuve sur cette circonférence avec une vitesse constante, de telle sorte que ce mobile et la planète se trouvent au même instant en a et en A sur le grand axe de l'ellipse, et qu'ils accomplissent tous deux une révolution entière dans le même temps. La formule $\theta - \omega = nt + 2e \sin nt$ fait voir que, dans la première moitié du mouvement, c'est-à-dire de A en A′, le rayon vecteur OM précédera Om et que l'inverse aura lieu dans la seconde période du mouvement

Fig. 106.



CAS D'UNE PARABOLE.

324. La courbe

$$r = \frac{\frac{c^2}{\mu}}{1 + \sqrt{1 - \frac{bc^2}{\mu^2}} \cos(\theta - \omega)} \tag{1}$$

devient une parabole si $b = 0$, et son équation prend la forme

$$r = \frac{\frac{c^2}{\mu}}{1 + \cos(\theta - \omega)}.$$

En la comparant à l'équation générale

$$r = \frac{p}{1 + \cos(\theta - \omega)}$$

d'une parabole rapportée à son foyer et à une droite faisant un angle ω avec l'axe de la parabole, on voit que le demi-paramètre de la trajectoire parabolique est

$$p = \frac{c^2}{\mu}.$$

Pour avoir la position du mobile sur la parabole, à un instant déterminé, reprenons l'équation $r^2 d\theta = cdt$. Remplaçons-y le rayon vecteur r par $\frac{p}{1 + \cos(\theta - \omega)}$ et la constante c par $\sqrt{p\mu}$, il vient alors

$$dt = \frac{p\sqrt{p}}{\sqrt{\mu}} \frac{d\theta}{[1 + \cos(\theta - \omega)]^2}.$$

Afin d'intégrer, posons $\theta - \omega = 2\psi$; il en résulte

$$1 + \cos(\theta - \omega) = 2\cos^2\psi$$

et

$$\frac{d\theta}{[1 + \cos(\theta - \omega)]^2} = \frac{1}{2}\frac{d\psi}{\cos^4\psi} = \frac{1}{2}\frac{\frac{d\psi}{\cos^2\psi}}{\cos^2\psi}$$

$$= \frac{1}{2}(1 + \operatorname{tang}^2\psi)\, d.\operatorname{tang}\psi.$$

Par conséquent

$$dt = \frac{1}{2}\frac{p\sqrt{p}}{\sqrt{\mu}}(1 + \operatorname{tang}^2\psi)\, d\operatorname{tang}\psi$$

et

$$(2) \qquad t = \frac{p\sqrt{p}}{2\sqrt{\mu}}\left[\tang\frac{1}{2}(\theta-\omega) + \frac{1}{3}\tang^3\frac{1}{2}(\theta-\omega)\right].$$

Il n'y a pas de constante à ajouter, si l'on compte le temps à partir du moment où le mobile est au sommet de la parabole.

Les formules (1) et (2) qui déterminent la trajectoire et la position du mobile à une époque assignée, sont appliquées au mouvement des comètes dont les orbites sont des ellipses très-allongées qu'on peut regarder, sans erreur sensible, comme des paraboles.

VINGT-SIXIÈME LEÇON.

ATTRACTION UNIVERSELLE ET MASSE DES PLANÈTES.

Lois de l'attraction universelle. — Vérification de la loi de l'attraction. — Mouvement absolu et relatif de deux corps qui s'attirent. — Masse des planètes accompagnées de satellites. — Masse de la terre. — Masse des planètes dépourvues de satellites.

LOIS DE L'ATTRACTION UNIVERSELLE.

325. Il résulte des lois de Képler que toutes les planètes sont constamment sollicitées par une force qui passe à chaque instant par le centre du soleil et qui varie, pour chaque planète, en raison inverse du carré de la distance de son centre de gravité à celui du soleil. Quand une planète a des satellites, les mouvements de ces corps, tels qu'on pourrait les observer de cette planète, sont encore assujettis aux lois de Képler. Ils doivent donc être attirés par la planète autour de laquelle ils tournent, par une force passant constamment par le centre de celle-ci et variant en raison inverse du carré de la distance du centre de gravité du satellite à celui de la planète. Les satellites sont aussi attirés par le soleil; mais comme leur distance à la planète est très-petite par rapport à celle de la planète au soleil, la force accélératrice résultant de l'attraction du soleil sur un satellite peut être regardée comme identique avec celle qui résulte de l'attraction du soleil sur la planète, et, par conséquent, cette dernière force n'altère pas le mouvement relatif du satellite autour de la planète.

326. Réciproquement, les planètes attirent le soleil.

En effet, pour toutes les forces que nous voyons agir à la surface de la terre, l'action produite est toujours accompagnée d'une réaction égale et contraire. Ainsi, un aimant fixe jouit de la propriété d'attirer un morceau de fer doux, parfaitement libre; réciproquement, si le fer est fixe et l'aimant libre, il viendra s'appliquer sur le fer. L'expérience prouve que ces deux attractions dirigées en sens inverses sont égales, car si l'aimant et le morceau de fer doux étaient unis entre eux par une tige rigide et inextensible, le système ne prendrait aucun mouvement dans l'espace. On a d'ailleurs un très-grand nombre d'exemples de ce fait, de sorte qu'en étendant, par analogie, cette loi aux mouvements des corps célestes, on en conclut que les planètes, étant attirées par le soleil, celui-ci, réciproquement, est attiré par elles suivant la même loi.

327. Cette attraction réciproque est proportionnelle à la masse de chacun des deux corps qui s'attirent. Il résulte, en effet, de la troisième loi de Képler, que, si deux planètes étaient placées, sans vitesse initiale, à la même distance du centre du soleil, elles parcourraient, en ligne droite, des espaces égaux pendant le même temps. On conclut de là que les forces motrices des planètes sont proportionnelles à leurs masses. Par conséquent, si on suppose la masse d'une planète partagée en une infinité de molécules égales en masse, toutes ces molécules seront attirées vers le soleil, par des forces que l'on pourra regarder comme égales et parallèles, en raison des petites dimensions de la planète, comparées à la distance qui sépare cette dernière du soleil. Réciproquement, les molécules du soleil, égales en masse, sont attirées, suivant la même loi, par celles des planètes, et l'on est ainsi conduit à cette loi générale de la nature : *Deux molécules matérielles quelconques s'attirent, en raison directe de leurs masses et en raison inverse du carré de leur distance.*

En admettant ce principe, si l'on appelle f l'attraction réciproque de deux molécules matérielles, placées à l'unité de distance l'une de l'autre, $\frac{fmm'}{r^2}$ sera l'attraction qu'exerceront l'une sur l'autre deux molécules matérielles ayant des masses m et m' et dont la distance est r. Il suit de là que l'expression $\frac{fmm'}{r^2}$ pourra aussi être appliquée à l'attraction exercée par le soleil sur une planète et réciproquement : d'abord, parce que les dimensions de chacun de ces corps étant très-petites, par rapport à la distance qui les sépare, une molécule de la planète et une du soleil peuvent toujours être regardées comme placées aux extrémités de droites égales et parallèles; et ensuite parce que le soleil et une planète quelconque peuvent être avec une approximation suffisante considérés comme formés de couches sphériques homogènes, ce qui fait que l'attraction totale exercée par un de ces corps sur l'autre est la même que si la masse de chaque corps était réunie à son centre de gravité.

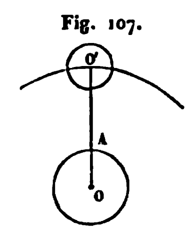
VÉRIFICATION DE LA LOI DE L'ATTRACTION

328. La pesanteur des corps, à la surface de la terre, doit être regardée comme un cas particulier de la gravitation universelle, puisqu'elle résulte de l'attraction exercée par toute la masse du globe sur les différents points matériels d'un corps quelconque. De plus on remarque que le poids d'un corps dépend de sa position et de sa masse, mais nullement de sa nature, propriété commune à la pesanteur et à l'attraction universelle.

Quand un corps pesant s'éloigne de plus en plus du centre O de la terre, au delà de sa surface, l'attraction de la terre sur ce corps doit diminuer en raison inverse du carré de la distance du centre O' de ce corps au centre O de la terre. Si le point O' est le centre de la lune, par

exemple, la pesanteur diminuée dans le rapport du carré de la distance OO′ au carré de OA devra être la force motrice de notre satellite, à chaque instant. Admettons, pour plus de simplicité, que l'orbite lunaire soit une circonférence de cercle. Dans cette hypothèse, on doit regarder la vitesse de la lune comme constante. Il faut donc que la force centrifuge de la lune soit précisément égale à la pesanteur diminuée dans le rapport de $\overline{OA}^2 = r^2$ à $\overline{OO'}^2 = \rho^2$. Dans ce calcul approximatif, on a $\rho = 60r$. Appelons F la force centrifuge de l'unité de masse de la lune. On aura $F = \frac{4\pi^2\rho}{T^2}$, T étant le temps qu'elle met à faire une révolution autour de la terre. Par conséquent,

Fig. 107.



$$F = \frac{4\pi^2 \times 60r}{T^2} = \frac{120\pi \times 2\pi r}{T^2} = \frac{120\pi \times 40\,000\,000^m}{T^2};$$

d'ailleurs,

$$T = 39\,343 \times 60''.$$

Donc enfin

$$F = \frac{g}{(60)^2} \times \frac{120\pi \times 40\,000\,000}{(39\,343)^2}.$$

Calculant par logarithmes le coefficient $\frac{120\pi \times 40\,000\,000}{(39\,343)^2}$, on trouve, en s'arrêtant aux centièmes, qu'il est égal à 9,81, c'est-à-dire à très-peu près égal à g. On peut donc écrire

$$F = \frac{g}{(60)^2} \quad \text{ou} \quad F : g = r^2 : \rho^2.$$

ce qu'il s'agissait de vérifier.

MOUVEMENT ABSOLU ET RELATIF DE DEUX CORPS QUI S'ATTIRENT.

329. Il résulte du principe de l'attraction ou gravitation universelle, que si M et m sont les masses respectives du soleil et d'une planète, r la distance de leurs centres de gravité, et f le coefficient de l'attraction universelle, $\frac{fMm}{r^2}$ est la mesure de l'attraction qu'un de ces deux corps exerce sur l'autre. Par suite, abstraction faite de toute autre cause, $\frac{fM}{r^2}$ et $\frac{fm}{r^2}$ sont respectivement les forces accélératrices de la planète et du soleil, et, comme elles sont en raison inverse des masses de ces deux corps, on en conclut que, s'ils n'avaient aucune vitesse initiale, ils viendraient se réunir sur la droite qui joint leurs centres au centre de gravité du système de ces deux corps, lequel point partage cette droite en deux parties réciproquement proportionnelles à leurs masses. Pour le faire voir plus clairement, appelons S et s les espaces rectilignes parcourus par le soleil et par la planète, jusqu'à leur point de rencontre. On aura

$$M\frac{d^2S}{dt^2}=\frac{fMm}{r^2},\quad m\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{fMm}{r^2};$$

d'où résulte

$$M\frac{d^2S}{dt^2}=m\frac{d^2s}{dt^2}.$$

Par suite

$$M\frac{dS}{dt}=m\frac{ds}{dt},$$

et enfin

$$MS=ms.$$

Il n'y a pas de constante à ajouter, car on suppose que

le soleil et la planète partent en même temps, sans vitesse initiale. De l'équation $MS = ms$, on déduit

$$S : s = m : M,$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

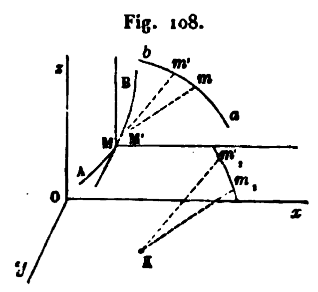
330. Si l'on veut obtenir le mouvement relatif d'une planète autour du soleil, c'est-à-dire le mouvement apparent de cette planète pour un observateur placé à la surface du soleil, il faudra supposer appliquée au centre de gravité du soleil une force égale et contraire à celle qui le fait mouvoir dans l'espace, afin de pouvoir le considérer comme fixe; mais, en même temps, afin de ne pas altérer le mouvement de la planète par rapport au soleil, il faudra aussi regarder une force égale et parallèle à cette dernière comme appliquée au centre de gravité de la planète. Par conséquent, ce dernier point sera constamment sollicité par une force dirigée vers le centre du soleil, et égale à

$$\frac{fM}{r^2} + \frac{fm}{r^2} \quad \text{ou à} \quad \frac{f(M+m)}{r^2} = \frac{\mu}{r^2},$$

en appelant μ le coefficient $f(M+m)$ constant pour toutes les positions de la planète. Ce fait est encore une conséquence du calcul, comme nous allons l'établir.

Supposons les masses du soleil et de la planète concentrées à leurs centres de gravité, $M(x_1, y_1, z_1)$ et $m(x, y, z)$ ces deux points étant rapportés à trois axes rectangulaires quelconques, mais fixes dans l'espace. Le point M décrira dans son mouvement une certaine courbe AMB, et le point m une courbe amb. Menons maintenant par le point M, à

Fig. 108.



l'instant considéré, trois axes rectangulaires parallèles à Ox, Oy et Oz, et supposons que le point M, dans son mouvement, emporte ces axes parallèlement à eux-mêmes avec lui. Appelons ξ, η et ζ les coordonnées variables du point M, par rapport à ces axes dont la position varie à chaque instant.

En concevant que le point M et par suite les axes qui passent par ce point soient fixes, ξ, η et ζ se rapporteront à la trajectoire apparente du point m. Or on a d'abord

$$(1)\qquad x = x_1 + \xi,\quad y = y_1 + \eta,\quad z = z_1 + \zeta.$$

A l'aide de ces équations, si l'on connaît le mouvement absolu de M et le mouvement relatif de m, on a le mouvement absolu de m, et *vice versâ*, si l'on connaît les mouvements absolus de M et de m, on aura le mouvement relatif de m autour de M.

Afin de bien concevoir ce mouvement apparent de la planète, imaginons que d'un point fixe K de l'espace on mène des droites Km_1, Km'_1,..., égales et parallèles aux droites Mm, $M'm'$,..., qui joignent les positions simultanées successives des points M et m, sur les courbes que ces deux points décrivent. Il est clair que m_1, m'_1,..., seront les positions apparentes de m, telles qu'on les observerait du point fixe M, si M était en K et que $m_1\, m'_1$ sera la courbe apparente que décrira le point m.

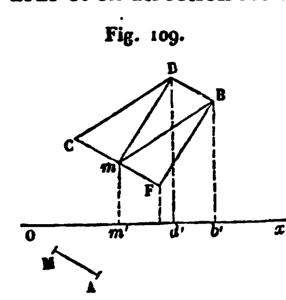
331 Revenons maintenant aux équations (1) pour en déduire la vitesse de m sur la trajectoire apparente. En les différentiant, on a

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dx_1}{dt} + \frac{d\xi}{dt},\\ \frac{dy}{dt} &= \frac{dy_1}{dt} + \frac{d\eta}{dt},\\ \frac{dz}{dt} &= \frac{dz_1}{dt} + \frac{d\zeta}{dt}; \end{aligned}\right.$$

$\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ et $\frac{dz}{dt}$ d'une part, $\frac{dx_1}{dt}$, $\frac{dy_1}{dt}$ et $\frac{dz_1}{dt}$ de l'autre, sont les composantes parallèles aux axes des vitesses des points M et m, à l'instant considéré sur les courbes AMB et amb, $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$ et $\frac{d\zeta}{dt}$ sont aussi les composantes parallèles aux axes de la vitesse du point m sur la trajectoire apparente. Donc cette dernière vitesse pourra être déterminée par ses composantes, au moyen des équations (2), lorsque les mouvements absolus des points M et m seront connus. On peut aussi l'obtenir par la construction suivante.

Soient MA et mB des droites, représentant en grandeur et en direction les vitesses absolues des points M et m à l'instant en question. Menons la droite mC, égale et parallèle à MA, mais dirigée en sens contraire. Je dis que la diagonale mD du parallélogramme mBDC représentera la vitesse apparente en grandeur et en direction. En effet, projetons les trois points m, D, B en m', d' et b' sur l'axe Ox. La projection $m'd'$ de mD est égale à la somme algébrique des projections des deux autres côtés, en supposant qu'on parcoure le triangle mBD dans le sens mBD, et regardant comme positives les projections allant de O vers x et comme négatives celles qui vont dans le sens opposé. Or

Fig. 109.



$$m'b' = \frac{dx}{dt}, \quad b'd' = \frac{dx_1}{dt}.$$

Donc

$$m'd' = \frac{dx}{dt} - \frac{dx_1}{dt} = \frac{d\xi}{dt}.$$

Il suit de là que, sur un axe quelconque, mD a même

projection que la vitesse apparente : donc mD représente cette vitesse en grandeur et en direction.

En différentiant les équations (2) par rapport à t, on a

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}=\dfrac{d^2x_1}{dt^2}+\dfrac{d^2\xi}{dt^2}, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2}=\dfrac{d^2y_1}{dt^2}+\dfrac{d^2\eta}{dt^2}, \\ \dfrac{d^2z}{dt^2}=\dfrac{d^2z_1}{dt^2}+\dfrac{d^2\zeta}{dt^2}. \end{cases}$$

A l'aide de ces équations, on démontre comme précédemment que si les forces accélératrices des points M et m sont représentées en grandeur et en direction par MA et par mB, et si l'on mène mC égale et parallèle à MA, mais dirigée en sens contraire, la force accélératrice, répondant au mouvement apparent, et qui a pour composantes $\dfrac{d^2\xi}{dt^2}$, $\dfrac{d^2\eta}{dt^2}$, $\dfrac{d^2\zeta}{dt^2}$, sera représentée, en grandeur et en direction, par la diagonale mD du parallélogramme mBDC.

Réciproquement, si l'on connaissait le mouvement absolu du point M et le mouvement apparent de m, on verrait aisément que la droite mF étant égale et parallèle à MA, la diagonale mB du parallélogramme mFBD représenterait en grandeur et en direction la vitesse ou la force accélératrice du mouvement absolu du point m.

332. Le centre de gravité du soleil et celui d'une planète sont sollicités par des forces motrices appliquées en sens contraires, suivant la droite qui unit ces deux points, et égales chacune à $\dfrac{fMm}{r^2}$, en appelant, comme précédemment, M et m les masses du soleil et de la planète. Donc $\dfrac{fm}{r^2}$ et $\dfrac{fM}{r^2}$ seront leurs forces accélératrices, et il

résulte de la construction géométrique (331) que

$$\frac{fm}{r^2}+\frac{fM}{r^2}=\frac{f(M+m)}{r^2}$$

sera, à chaque instant, la force accélératrice qui produirait le mouvement apparent de la planète autour du soleil supposé fixe. On voit que cette force

$$\frac{f(M+m)}{r^2}=\frac{\mu}{r^2},$$

en posant

$$f(M+m)=\mu,$$

varie en raison inverse du carré de la distance. Par conséquent, *la trajectoire apparente de la planète est une section conique* et par suite une ellipse, puisqu'elle ne s'éloigne jamais indéfiniment du soleil.

333. Nous avons obtenu la formule (320)

$$\mu=\frac{4\pi^2a^3}{T^2},$$

a étant le demi grand axe de cette ellipse, et T la durée d'une révolution entière. Par conséquent

$$\frac{4\pi^2a^3}{T^2}=f(M+m).$$

La masse m variant d'une planète à l'autre, on voit que $\frac{a^3}{T^2}$ n'est réellement pas constant pour toutes les planètes. Toutefois, comme l'observation démontre que la troisième loi de Képler est extrêmement approchée, on doit en conclure que m est très-petit par rapport à M, ou que les masses des planètes sont très-petites, comparées à celle du soleil. En effet, la masse de Jupiter, qui est la plus considérable de toutes les planètes, n'est pas $\frac{1}{1000}$ de celle du soleil.

Le mouvement elliptique n'est pas non plus rigoureusement celui des planètes autour du soleil. Toutes les planètes, en vertu de l'attraction universelle, agissant les unes sur les autres, il en résulte des perturbations dans leurs mouvements apparents, tels qu'on les avait calculés d'abord, en ne tenant pas compte de l'influence de ces astres les uns sur les autres. Cependant, comme les masses des planètes sont extrêmement petites relativement à celle du soleil, et comme elles sont toujours placées à des distances considérables les unes des autres, il en résulte que le mouvement elliptique n'en est troublé que d'une manière très-faible et souvent insensible. Le calcul de ces variations fait, en grande partie, l'objet de la *mécanique céleste.*

MASSES DES PLANÈTES ACCOMPAGNÉES DE SATELLITES.

334. La formule

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{f(M+m)}{4\pi^2}$$

peut servir à calculer les masses des planètes qui sont accompagnées de satellites. En effet, soient M, m et m' les masses respectives du soleil, de la planète et du satellite de cette dernière; soient a le demi grand axe de l'orbite de la planète dans son mouvement relatif autour du soleil, et T la durée d'une révolution complète; et soient a' et T′ les données analogues, répondant au mouvement apparent du satellite autour de la planète. On aura

$$\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = f(M+m), \quad \frac{4\pi^2 a'^3}{T'^2} = f(m+m').$$

Divisant ces deux équations l'une par l'autre, il vient

$$\frac{m+m'}{M+m} = \frac{a'^3}{a^3} \cdot \frac{T^2}{T'^2};$$

Les masses des satellites étant extrêmement petites par

rapport à celle de la planète, excepté la masse de la lune comparée à celle de la terre, on peut négliger m' devant m, et pour la même raison m devant M; d'où résulte enfin

$$\frac{m}{M} = \frac{a'^3}{a^3} \cdot \frac{T^2}{T'^2},$$

formule qui peut servir à calculer le rapport de la masse de la planète à celle du soleil. Cette méthode donne $\frac{1}{1067}$ pour le rapport de la masse de Jupiter à celle du soleil; mais on a trouvé plus tard que ce nombre était un peu trop grand et devait être changé en $\frac{1}{1070}$

MASSE DE LA TERRE.

335. La méthode qui vient d'être exposée ne peut pas servir à déterminer la masse de la terre, comparée à celle du soleil. Voici comment on peut résoudre ce problème.

Soit m la masse de la terre. Si elle était parfaitement sphérique, en appelant r son rayon, $\frac{fm}{r^2}$ serait l'attraction totale qu'elle exercerait sur l'unité de masse d'un corps placé à sa surface. Or, comme elle a la forme d'un sphéroïde différant très-peu d'une sphère, quoique cette attraction ne soit pas la même en tous les points de la surface, il existe un certain parallèle sur lequel l'attraction terrestre a précisément pour mesure $\frac{fm}{r^2}$, et il résulte du calcul de l'attraction des sphéroïdes que pour ce parallèle $\sin^2\lambda = \frac{1}{3}$, en appelant λ sa latitude. L'observation démontre d'ailleurs que la pesanteur sur ce parallèle a pour mesure $g = 9^m,79386$. De plus la composante verticale de la force centrifuge a pour mesure sur le même parallèle une fraction $\frac{\cos^2\lambda}{289} = \frac{2}{3}\frac{1}{289}$ de la gravité. Il faut ajou-

ter cette composante à g, ce qui donne pour l'attraction du sphéroïde terrestre sur l'unité de masse d'un corps placé sur ce parallèle, $G = 9^m,81645$. Or on a

$$G = \frac{fm}{r^2}, \quad \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = f(M + m),$$

d'où l'on tire, en négligeant m vis-à-vis de M,

$$\frac{M}{m} = \frac{4\pi^2 a^3}{G r^2 T^2} - 1,$$

en appelant M la masse du soleil, a le demi grand axe de l'orbite apparent de la terre autour du soleil et T le nombre de secondes contenu dans une année. En substituant dans cette dernière formule

$$G = 9^m,81645,$$
$$r = 6364551^m,$$
$$a = 23984\,r$$

et

$$T = 86400'' \times 365,2563\ldots,$$

on trouve

$$\frac{M}{m} = 354592$$

pour le rapport de la masse du soleil à celle de la terre.

336. On conclut de là le rapport de la densité moyenne du soleil à celle de la terre. En effet, le volume du soleil est 1331000 fois celui de la terre. Si donc on divise le rapport de leurs masses, ou 354592, par le rapport de leurs volumes, ou 1331000, le quotient, environ $\frac{1}{4}$, sera le rapport de la densité moyenne du soleil à celle de la terre.

337. On peut déduire, de ce qui précède, l'attraction que la masse du soleil exerce sur l'unité de masse d'un corps placé à sa surface, ou la pesanteur à la surface du soleil. Elle est exprimée par $\frac{fM}{R^2}$, M étant la masse et R le rayon du soleil. Or $G = \frac{fm}{r^2}$, G étant l'attraction de la

terre sur l'unité de masse d'un corps à sa surface, m la masse de la terre et r son rayon. Donc, en négligeant la force centrifuge, qui est faible à la surface du soleil, $G\frac{R^2}{r^2}\frac{M}{m}$ est la pesanteur à la surface du soleil. Si dans cette expression on remplace $\frac{r}{R}$ par $\frac{1}{110}$ et $\frac{M}{m}$ par 354592, on trouve que la pesanteur à la surface du soleil est à peu près $29 \times G$, c'est-à-dire environ 29 fois plus considérable qu'à la surface de la terre. Ainsi un corps à la surface du soleil parcourrait, dans la première seconde de sa chute, environ $29 \times 4^m,9$, ou de 140 à 145 mètres.

MASSE D'UNE PLANÈTE DÉPOURVUE DE SATELLITES.

338. Ayant déterminé la masse de la terre, il devient possible de déterminer celle d'une planète quelconque, même dépourvue de satellites. En conservant les mêmes notations (334), on a pour la planète en question

$$\frac{4\pi^2 a'^3}{T'^2} = f(M + m').$$

Or on a pour la terre

$$G = \frac{fm}{r^2},$$

ce qui permet d'éliminer f, et de là résulte

$$\frac{4\pi^2 a'^3}{T'^2} = Gr^2\left(\frac{M}{m} + \frac{m'}{m}\right).$$

Remplaçant $\frac{M}{m}$ par 354592, on tire de cette équation $\frac{m'}{m}$, ou le rapport de la masse de la planète à celle de la terre.

TABLE

DES DÉFINITIONS, DES PROPOSITIONS ET DES FORMULES PRINCIPALES

CONTENUES

DANS LE PREMIER VOLUME DU COURS DE MÉCANIQUE.

PREMIÈRE LEÇON.

DES FORCES APPLIQUÉES A UN MÊME POINT.

1. Définitions. — On appelle *corps* ou *matière* tout ce qui affecte nos sens d'une manière quelconque.

2. On appelle *force* toute cause qui met un corps en mouvement ou qui tend à le mouvoir.

3. Un point ou un système de points sollicité par plusieurs forces est en *équilibre*, quand ce point ou ce système est dans le même état de repos ou de mouvement que si ces forces n'existaient pas.

4, 5. Comparaison des forces. — Deux forces sont *égales* quand, appliquées au même point, suivant la même direction et en sens contraires, elles se font équilibre.

6. Le point d'application d'une force peut être transporté en un point quelconque de sa direction, pourvu que ce dernier point soit lié au premier d'une manière invariable.

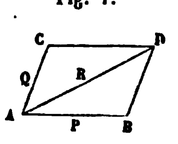
7. Résultante de plusieurs forces. — Quand une force unique peut faire équilibre à un système de forces, une force R égale et contraire à la première force est dite la *résultante* du système de forces.

8. Un système de forces ne peut avoir deux résultantes.

9. Composition des forces dirigées suivant la même droite. — Plusieurs forces, appliquées suivant la même droite, se composent en une seule, égale à l'excès de la somme de celles qui tirent dans un sens, sur la somme de celles qui tirent dans l'autre sens, et cette résultante agit dans le sens des forces qui composent la plus grande somme.

10, 11, 12. Règle du parallélogramme des forces. — Si deux forces P et Q sont représentées en grandeur et en direction par les deux côtés contigus AB et AC du parallélogramme ABCD, la résultante R de ces deux forces sera représentée par la diagonale AD de ce parallélogramme.

Fig. 1.



13. Composition de plusieurs forces concourantes. — La résultante R des forces P, P′, P″, P‴, appliquées au même point A, est la droite AN qui ferme le contour polygonal ABLMN, dont les côtés successifs sont parallèles à la direction des forces données et proportionnels à leurs intensités.

Fig. 5.

14. Si le contour se ferme de lui-même, les forces données se font équilibre, et réciproquement.

15. Quand les forces se réduisent à trois, non situées dans un même plan, leur résultante R est représentée par la diagonale du parallélipipède construit sur les droites qui représentent ces forces.

16. Réciproquement, une force AG = R peut se décomposer en trois autres dirigées suivant les arêtes d'un parallélipipède.

17, 18. Relations entre une force et ses composantes suivant trois axes rectangulaires. X, Y, Z étant trois forces appliquées au point A et dirigées suivant trois axes rectangulaires, si a, b, c représentent les angles que leur résultante R fait avec ces axes, on a les formules

$$X = R\cos a, \quad Y = R\cos b, \quad Z = R\cos c,$$

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

$$\cos a = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},$$

$$\cos b = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},$$

$$\cos c = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}.$$

DEUXIÈME LEÇON.

SUITE DE LA COMPOSITION DES FORCES CONCOURANTES.

19. Calcul de la résultante d'un nombre quelconque de forces appliquées a un même point. P, P′, P″,... sont des forces appliquées à un même point; α, β, γ, α', β', γ',..., les angles que leurs directions font avec trois axes rectangulaires; R leur résultante; a, b, c, les angles que cette résultante fait avec les mêmes axes; X, Y, Z les composantes de R parallèles aux axes : on a

$$X = P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + \ldots,$$
$$Y = P\cos\beta + P'\cos\beta' + P''\cos\beta'' + \ldots,$$
$$Z = P\cos\gamma + P'\cos\gamma' + P''\cos\gamma'' + \ldots,$$
$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$
$$\cos a = \frac{X}{R}, \quad \cos b = \frac{Y}{R}, \quad \cos c = \frac{Z}{R}.$$

20. On a encore

$$R^2 = P^2 + P'^2 + P''^2 + \ldots + 2PP'\cos(P, P') + 2PP''\cos(P, P'') + \ldots.$$

21. Lorsqu'on décompose une force P en deux autres, l'une dirigée suivant un axe, l'autre située dans un plan perpendiculaire à cet axe, la première représente ce qu'on appelle la force P estimée suivant cet axe.

La résultante de plusieurs forces, estimée suivant un axe quelconque, est égale à la somme de ces forces estimées suivant le même axe.

22, 23. Conditions d'équilibre de plusieurs forces concourantes. — Pour que les forces P, P′, P″,... appliquées à un point entièrement libre se fassent équilibre, il faut que l'on ait (notations du nº 19)

$$P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + \ldots = 0,$$
$$P\cos\beta + P'\cos\beta' + P''\cos\beta'' + \ldots = 0,$$
$$P\cos\gamma + P'\cos\gamma' + P''\cos\gamma'' + \ldots = 0.$$

24 à 28. Équilibre d'un point assujetti a se mouvoir sur une surface ou sur une courbe donnée. — Pour que les forces P, P′, P″,... appliquées à un point qui est assujetti à demeurer sur une surface

$$f(x, y, z) = 0,$$

soient en équilibre, on doit avoir (notations du n° 19)

$$\frac{X}{\frac{df}{dx}} = \frac{Y}{\frac{df}{dy}} = \frac{Z}{\frac{df}{dz}}.$$

29, 30. Quand le point A est assujetti à demeurer sur une courbe, on a pour seule condition d'équilibre

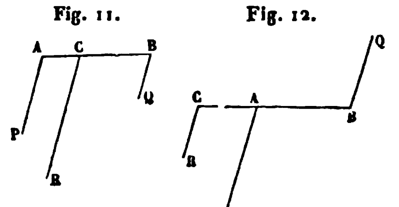
$$X dx + Y dy + Z dz = 0.$$

TROISIÈME LEÇON.

COMPOSITION ET ÉQUILIBRE DES FORCES PARALLÈLES.

31. Composition de deux forces parallèles. Couple. — La résultante R de deux forces parallèles P et Q leur est parallèle; si l'on appelle C son point d'application, on a

Fig. 11. Fig. 12.



$$R = P + Q$$

ou

$$R = Q - P,$$

suivant que les forces données agissent dans le même sens ou en sens contraires. On a dans les deux cas

$$\frac{P}{BC} = \frac{Q}{CA} = \frac{R}{AB}.$$

32, 33. Un couple est l'ensemble de deux forces égales, parallèles et de sens contraires, mais non directement opposées. Un couple n'a pas de résultante.

34. Composition d'un nombre quelconque de forces parallèles. — La résultante de plusieurs forces parallèles est égale à l'excès de la somme des forces qui agissent dans un sens, sur la somme des forces qui agissent dans le sens contraire, et agit dans le sens de la plus grande.

35. Un système de plusieurs forces parallèles peut se réduire à un couple.

36. Centre des forces parallèles. — Si l'on change simultanément les directions et les intensités de toutes les forces, de ma-

nière que, passant toujours par les mêmes points d'application, elles conservent les mêmes rapports de grandeur et leur parallélisme, la résultante de toutes ces forces passera toujours par le même point. Ce point est appelé le centre des forces parallèles.

37 à 42. Théorème des moments. — Le moment d'une force par rapport à un plan est le produit de l'intensité de cette force par la distance du point d'application de la force au plan.

Le moment de la résultante d'un nombre quelconque de forces parallèles, par rapport à un plan, est égal à la somme algébrique des moments des composantes par rapport à ce plan.

43 à 46. Calcul des coordonnées du centre de plusieurs forces parallèles. P, P', P'',... désignant des forces parallèles, $x, y, z, x', y', z',\ldots$ les coordonnées de leurs points d'application, R leur résultante et x_1, y_1, z_1, les coordonnées du point d'application de cette dernière force :

$$
\begin{aligned}
R &= P + P' + P'' + \ldots,\\
Rx_1 &= Px + P'x' + P''x'' + \ldots,\\
Ry_1 &= Py + P'y' + P''y'' + \ldots,\\
Rz_1 &= Pz + P'z' + P''z'' + \ldots.
\end{aligned}
$$

47 à 49. Équilibre des forces parallèles. — Si l'on prend l'axe des z parallèle à la direction des forces, on aura, dans le cas de l'équilibre,

$$
\begin{aligned}
P + P' + P'' + \ldots &= 0,\\
Px + P'x' + P''x'' + \ldots &= 0,\\
Py + P'y' + P''y'' + \ldots &= 0.
\end{aligned}
$$

50. Quand le point O est fixe, les conditions d'équilibre se réduisent à deux :

$$
\begin{aligned}
Px + P'x' + P''x'' + \ldots &= 0,\\
Py + P'y' + P''y'' + \ldots &= 0.
\end{aligned}
$$

QUATRIÈME LEÇON.

DU CENTRE DE GRAVITÉ.

51. Notions sur la pesanteur. — On appelle *pesanteur* ou *gravité* la force qui sollicite tous les corps vers la surface de la terre; cette force agit suivant la verticale. Toutes les verticales d'un même lieu peuvent être regardées comme parallèles.

52. Poids. — Le poids d'un corps est la résultante de toutes les actions de la pesanteur sur les diverses molécules de ce corps. Le centre de ces forces, considérées comme parallèles, est le centre de gravité du corps.

53. Centre de gravité. — Le centre de gravité d'un corps peut s'obtenir expérimentalement en suspendant le corps à un fil dans deux positions différentes.

54. Poids spécifique. — Densité. — Le poids spécifique ϖ, d'un corps homogène, est le poids de ce corps sous l'unité de volume. P étant le poids du corps et V le volume, on a

$$P = \varpi V.$$

55. La densité moyenne d'un corps est le rapport du poids de ce corps à son volume ou $\frac{V}{P}$. La densité d'un corps en un point M est la limite vers laquelle tend la densité moyenne d'un volume de matière pris autour du point M quand ce volume tend vers zéro.

56. Centre de gravité d'un assemblage de corps. $p, p', p'', \ldots$ étant des poids appliqués en des points (x, y, z), (x', y', z'), ..., P la somme de tous ces poids, et x_1, y_1, z_1 les coordonnées du centre de gravité, on a

$$P = p + p' + p'' + \ldots,$$
$$Px_1 = px + p'x' + p''x'' + \ldots,$$
$$Py_1 = py + p'y' + p''y'' + \ldots,$$
$$Pz_1 = pz + p'z' + p''z'' + \ldots.$$

57. La somme des moments des poids par rapport à tout plan passant par le centre de gravité de leur système est égale à zéro.

58 à 62. Propriétés du centre de gravité.

63. Centre de gravité des lignes. — Le centre de gravité d'une ligne ou d'une surface est le centre d'une infinité de forces parallèles appliquées à leurs différents points.

Une ligne ou une surface sont homogènes, lorsque des portions égales de cette ligne ou de cette surface ont des résultantes égales ou des poids égaux.

64 à 66. Le centre de gravité (x_1, y_1, z_1) d'une ligne homogène est donné par les formules

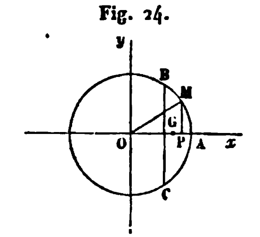
$$lx_1 = \int x\,ds, \quad ly_1 = \int y\,ds, \quad lz_1 = \int z\,ds.$$

CINQUIÈME LEÇON.

CENTRE DE GRAVITÉ DES LIGNES ET DES SURFACES.

67. Ligne droite. — Le centre de gravité d'une ligne droite est au milieu de sa longueur.

Fig. 24.



68. Arc de cercle. — Posant

$$OA = a,$$
$$BAC = l,$$
$$BC = c,$$

on a

$$OG = \frac{ac}{l}.$$

69, 70, 71. Centres de gravité de la cycloïde et de la parabole.

72, 73. Centre de gravité des surfaces. λ étant l'aire de la surface; posant

$$p = \frac{dz}{dx}, \quad q = \frac{dz}{dy}, \quad \omega = \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy,$$

on a

$$\lambda x_1 = \iint x\omega, \quad \lambda y_1 = \iint y\omega, \quad \lambda z_1 = \iint z\omega.$$

74, 75. Centre de gravité des figures planes. — Quand la surface est plane, on a, en posant $OA = a$, $OB = b$, appelant y et y' les ordonnées des courbes CD et C'D',

Fig. 28.

$$\lambda = \int_a^b (y - y')\, dx,$$

$$\lambda x_1 = \int_a^b (y - y')\, x dx,$$

$$\lambda y_1 = \frac{1}{2}\int_a^b (y^2 - y'^2)\, dx.$$

76. Applications. Triangle. — Le centre de gravité d'un triangle est sur une médiane, aux deux tiers de cette ligne à partir du sommet.

77. Parabole. $y^2 = 2px$,

$$x_1 = \frac{3}{5}x, \quad y_1 = \frac{3}{8}y.$$

78. SECTEUR CIRCULAIRE.

$$x_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{\text{rayon} \times \text{corde}}{\text{arc}},$$

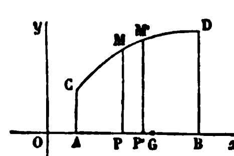
79 à 82. CYCLOÏDE.

SIXIÈME LEÇON.

CENTRE DE GRAVITÉ DES SURFACES (SUITE).

83, 84. CENTRE DE GRAVITÉ DES SURFACES DE RÉVOLUTION. S surface engendrée par CD, $x_1 = OG$, $CM = s$.

Fig. 33.



$$S = 2\pi \int y\,ds,$$

$$Sx_1 = 2\pi \int xy\,ds.$$

85. ZONE SPHÉRIQUE. — Le centre de gravité d'une zone sphérique est sur le diamètre perpendiculaire aux deux bases et à égale distance de ces bases.

86, 87. ZONE CYCLOÏDALE.

88, 89. THÉORÈMES DE GULDIN. — La surface engendrée par la révolution d'une courbe plane a pour mesure la longueur de la courbe multipliée par l'arc de cercle que décrit le centre de gravité de l'arc de courbe.

90, 91, 92. Le volume engendré par la révolution d'une aire plane est égal à l'aire génératrice multipliée par l'arc de cercle que décrit le centre de gravité de cette aire.

93. Si une surface plane se transporte dans l'espace de telle sorte qu'un de ses points restant toujours sur une courbe, son plan demeure constamment normal à cette courbe, le solide engendré par le mouvement de cette surface aura pour mesure l'aire génératrice multipliée par la courbe que décrit son centre de gravité.

94 à 96. VOLUME DU CYLINDRE. Le volume d'un cylindre quelconque est égal à l'aire d'une section droite multipliée par la distance des centres de gravité des deux bases.

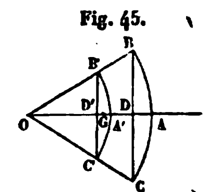
SEPTIÈME LEÇON.

CENTRE DE GRAVITÉ DES VOLUMES.

97, 98. CÔNE. — Le centre de gravité du cône est sur la droite qui joint le sommet au centre de gravité de la base et aux trois quarts de cette droite à partir du sommet.

99. SECTEUR SPHÉRIQUE. $BOA = \alpha$, $OA = r$,

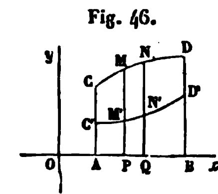
Fig. 45.



$$OG = \frac{3}{4} r \cos^2 \frac{1}{2} \alpha.$$

100. SOLIDES DE RÉVOLUTION. $PM = y$, $PM' = y'$, V volume, (x_1, y_1) centre de gravité; $OA = a$, $OB = b$:

Fig. 46.



$$V = \pi \int_a^b (y^2 - y'^2)\,dx,$$

$$y_1 = 0,$$

$$Vx_1 = \pi \int_a^b (y^2 - y'^2)\,x\,dx.$$

101. CORPS DONT LE CENTRE DE GRAVITÉ S'OBTIENT PAR UNE SEULE INTÉGRATION. — Lorsqu'un corps est décomposable en tranches parallèles ayant leurs centres de gravité en ligne droite, on peut en général trouver le centre de gravité de ce corps par une seule intégration.

102, 103. CENTRE DE GRAVITÉ D'UN CORPS QUELCONQUE. V volume, P poids, ρ densité, (x_1, y_1, z_1) centre de gravité :

$$P = \iiint \rho\, dx\, dy\, dz,$$

$$Px_1 = \iiint x\rho\, dV,$$

$$Py_1 = \iiint y\rho\, dV,$$

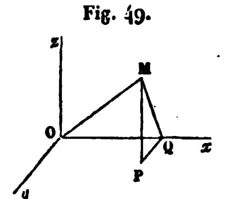
$$Pz_1 = \iiint z\rho\, dV.$$

HUITIÈME LEÇON.

VOLUME ET CENTRE DE GRAVITÉ DES CORPS RAPPORTÉS A DES COORDONNÉES POLAIRES.

104. Coordonnées polaires.

Fig. 49.



$$\mathrm{OM} = r,$$
$$\mathrm{MO}x = \theta,$$
$$\mathrm{MQP} = \psi.$$

105, 106. Formules pour passer des coordonnées rectangulaires à des coordonnées polaires, et réciproquement :

$$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta\cos\psi,\quad z = r\sin\theta\sin\psi.$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2},\quad \operatorname{tang}\psi = \frac{z}{y},\quad \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

107 à 111. Volume, poids, centre de gravité d'un corps rapporté a des coordonnées polaires.

$$\mathrm{V} = \int\int\int r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\psi,$$

$$\mathrm{P} = \int\int\int \rho r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\psi,$$

$$\mathrm{P}x_1 = \int\int\int \rho r^3\sin\theta\cos\theta\, dr\, d\theta\, d\psi,$$

$$\mathrm{P}y_1 = \int\int\int \rho r^3\sin^2\theta\cos\psi\, dr\, d\theta\, d\psi,$$

$$\mathrm{P}z_1 = \int\int\int \rho r^3\sin^2\theta\sin\psi\, dr\, d\theta\, d\psi.$$

NEUVIÈME LEÇON.

ATTRACTION DES CORPS.

112. Loi de l'attraction. μ et μ' étant les masses de deux molécules, u leur distance, f un coefficient constant : l'attraction mutuelle de ces deux molécules est représentée par $\frac{f\mu\mu'}{u^2}$.

113 à 116. Attraction des sphères. — L'attraction d'une couche sphérique homogène sur un point matériel placé dans son intérieur est nulle.

117. L'attraction d'une couche sphérique homogène sur un point extérieur est la même que si toute la masse de la couche était réunie à son centre.

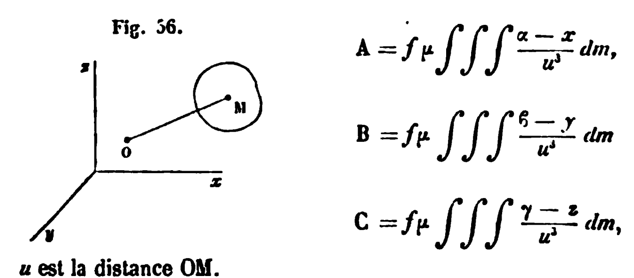
118, 119. Les résultats précédents s'étendent au cas d'une enceinte composée de couches sphériques dont la densité varie de l'une à l'autre, mais reste la même dans toute l'étendue d'une même couche.

120, 121. L'attraction exercée par une sphère sur un point intérieur est proportionnelle à la distance de ce point au centre. — Si le point est extérieur, l'attraction est la même que si toute la masse de la sphère était réunie à son centre.

122. Deux sphères s'attirent comme si la masse de chacune était réunie à son centre.

123, 124. Formules générales. A, B, C composantes de l'attraction exercée sur un point $O(\alpha, 6, \gamma)$ dont la masse est μ par un corps quelconque dont l'élément de masse est dm.

Fig. 56.



$$A = f\mu \int\int\int \frac{\alpha - x}{u^3} dm,$$

$$B = f\mu \int\int\int \frac{6 - y}{u^3} dm$$

$$C = f\mu \int\int\int \frac{\gamma - z}{u^3} dm,$$

u est la distance OM.

125. Réduction des intégrales a une seule. — Si l'on pose

$$V = \int \frac{dm}{u},$$

on a

$$A = -f\mu \frac{dV}{d\alpha}, \quad B = -f\mu \frac{dV}{d6}, \quad C = -f\mu \frac{dV}{d\gamma}.$$

126, 127. Propriétés de la fonction V. — Si le point attiré est extérieur, on a

$$\frac{d^2V}{d\alpha^2} + \frac{d^2V}{d6^2} + \frac{d^2V}{d\gamma^2} = 0;$$

si le point attiré est intérieur,

$$\frac{d^2V}{d\alpha^2}+\frac{d^2V}{d\beta^2}+\frac{d^2V}{d\gamma^2}=-4\pi\rho_1,$$

ρ_1 étant la densité du corps attirant au point où est placée la molécule attirée.

DIXIÈME LEÇON.

ATTRACTION D'UN ELLIPSOÏDE SUR UN POINT INTÉRIEUR.

128 à 136. Formules relatives a l'ellipsoïde.

ONZIÈME LEÇON.

SUITE DE L'ATTRACTION DES ELLIPSOÏDES.

137 à 141. Réduction aux fonctions elliptiques des composantes de l'attraction.

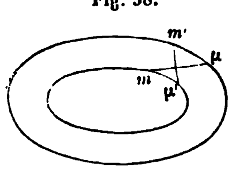
142, 143, 144. Démonstration synthétique de ce théorème de Newton : *Une couche homogène d'une épaisseur quelconque comprise entre deux surfaces ellipsoïdales semblables et semblablement placées n'exerce aucune action sur un point intérieur.*

145. Théorème d'Ivory. — Deux ellipsoïdes ayant leurs axes a, b, c et a', b', c' dirigés suivant les trois mêmes axes rectangulaires et leurs sections principales décrites des mêmes foyers, on appelle points *correspondants* deux points dont les coordonnées sont proportionnelles aux demi-axes auxquels elles sont parallèles.

Si l'un de ces points est sur la surface du premier ellipsoïde, l'autre sera évidemment sur la surface du second.

Si l'on prend sur les deux ellipsoïdes deux points quelconques m (x, y, z), μ (α, β, γ) *et leurs correspondants* m' (x', y', z'), μ' $(\alpha', \beta', \gamma')$, *les distances* μm *et* $\mu' m'$, *sont égales.*

Fig. 58.



146. Appelons A, B, C les composantes de l'attraction du premier ellipsoïde sur le point μ.

Nommons A′, B′, C′ les composantes de l'attraction que le second

ellipsoïde exerce sur le point μ' correspondant de μ, on aura

$$A' = \frac{b'c'}{bc} A, \quad B' = \frac{a'c'}{ac} B, \quad C' = \frac{a'b'}{ab} C.$$

Donc *l'attraction d'un ellipsoïde sur un point extérieur μ est ramenée à l'attraction d'un ellipsoïde homofocal sur le point μ' correspondant.*

Ce théorème subsiste quelle que soit la loi d'attraction.

147. Pour faire usage de ce théorème, il faut calculer les valeurs des demi-axes a', b', c' du second ellipsoïde, connaissant ceux du premier et les coordonnées α, 6, γ, du point μ. On a

$$\frac{\alpha^2}{a'^2} + \frac{6^2}{a'^2 + h} + \frac{\gamma^2}{a'^2 + k} = 1.$$

Cette équation donne une valeur positive pour a'^2 et une seule. Le demi-axe a' étant déterminé, on aura les deux autres par les équations

$$b'^2 = a'^2 + h, \quad c'^2 = a'^2 + k,$$
$$a^2 = a^2 + h, \quad c^2 = a^2 + k.$$

DOUZIÈME LEÇON.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES SUR LE MOUVEMENT.

148. Définitions. — La *dynamique* a pour objet l'étude des lois du mouvement des corps. On considère, dans cette partie de la Mécanique, une quantité dont on n'a pas eu à s'occuper en statique, le *temps*. L'idée du temps est une idée simple, qu'on ne définit pas.

Deux intervalles de temps sont égaux, quand deux corps identiques, placés dans les mêmes circonstances, parcourent des espaces égaux dans ces deux intervalles de temps, quelle que soit la loi de leur mouvement commun. La notion d'une suite d'intervalles de temps égaux conduit à celle du rapport commensurable ou incommensurable de deux temps quelconques. L'unité de temps généralement adoptée est la *seconde*.

149. Mouvement uniforme. — Le mouvement le plus simple que puisse prendre un point matériel est celui dans lequel ce point décrit une ligne droite, sur laquelle il parcourt des espaces égaux dans des temps égaux. Ce mouvement est dit *uniforme*. On appelle mouvement *varié* tout mouvement qui n'est pas uniforme.

150. Quand un point M se meut en ligne droite, l'espace parcouru par ce point, ou plus généralement sa distance x à un point fixe O pris sur cette droite, est une fonction du temps t écoulé depuis une époque convenue, en sorte qu'on a

Fig. 59.

O B M x

$$x = f(t);$$

cette équation est ce qu'on appelle *l'équation du mouvement.*

151. La vitesse d'un mouvement uniforme est l'espace constant que le mobile parcourt dans l'unité de temps.

On peut encore définir la vitesse, le rapport de l'espace parcouru au temps employé à le parcourir.

Si l'on rapporte la position du mobile à un point O fixe pris sur la droite parcourue et que l'on désigne par b sa distance OB à cette origine,

$$x = at + b$$

sera l'équation la plus générale du mouvement uniforme.

152. L'équation du mouvement uniforme suppose qu'on ait adopté deux unités, l'unité de longueur et l'unité de temps. Le nombre qui exprime la vitesse dépend de chacune d'elles.

153. De l'inertie. — Un point matériel en repos ne peut se mettre en mouvement de lui-même et sans une cause extérieure. Si un point matériel a été mis en mouvement par des causes quelconques, et qu'ensuite il ne soit plus sollicité par aucune force, il devra se mouvoir suivant une certaine ligne droite, en conservant toujours la même vitesse, c'est-à-dire en parcourant sur cette ligne droite des espaces égaux en temps égaux.

154. Ces propriétés constituent ce qu'on appelle l'*inertie* de la matière.

Le mot inertie ne signifie pas que la matière soit incapable d'agir.

155. Vitesse dans le mouvement varié. — On appelle vitesse d'un mobile au bout du temps t, la vitesse du mouvement uniforme qui succéderait au mouvement varié si, à cet instant, la force motrice cessait d'agir.

156. Quand un mouvement n'est pas uniforme et rectiligne, la vitesse varie à chaque instant et d'une manière continue soit en grandeur, soit en direction. Il n'existe pas de force qui puisse, dans un instant indivisible, changer brusquement la grandeur ou la direction de la vitesse d'un corps ou imprimer subitement une vitesse finie à un corps en repos.

157 à 159. Soit M un point matériel qui se meut, d'un mouvement varié, sur une droite Ox. Appelons x la distance OM de ce mobile à un point quelconque de la direction Ox, et t le temps compté à partir d'une époque quelconque, temps au bout duquel le mobile est en M; soit v la vitesse inconnue qu'il possède à cet instant. La formule

Fig. 60.

$$v = \frac{dx}{dt}$$

donne la vitesse du mobile, pourvu que l'on convienne de regarder comme positive la vitesse du mobile lorsqu'il va dans le sens des abscisses positives, et de la regarder comme négative dans le cas contraire.

160. Si

$$x = f(t)$$

est l'équation du mouvement, on aura

$$v = f'(t).$$

Si l'équation du mouvement était de la forme

$$\varphi(x, t) = 0,$$

on aurait

$$v = -\frac{\frac{d\varphi}{dt}}{\frac{d\varphi}{dx}}.$$

161. Réciproquement, si l'on donne l'équation

$$v = \varphi(t),$$

on aura

$$x = \int \varphi(t)\, dt + c.$$

TREIZIÈME LEÇON.

DE L'ACCÉLÉRATION.

162. Du mouvement uniformément varié. — Soit un point matériel M qui se meut sur une droite Ox de telle sorte que sa vitesse v croisse proportionnellement au temps t, à partir du moment où le mobile était en un point donné A. Soit g l'accroisse-

Fig. 61.

ment constant de la vitesse pour chaque unité de temps. Soient $OA = b$ l'abscisse du mobile à l'époque initiale, $OM = x$ son abscisse après le temps t, a sa vitesse au point A, on aura

$$v = a + gt, \quad x = b + at + \frac{gt^2}{2}.$$

Le mouvement représenté par cette équation est dit uniformément varié ou accéléré.

163. Si l'on place le point O en A; si de plus on suppose $a = 0$, on aura

$$v = gt, \quad x = \frac{gt^2}{2}.$$

164. Principe des mouvements relatifs. — *Si des points matériels* M, N, P... *se meuvent dans l'espace suivant des droites parallèles, avec une vitesse constante ou variable, mais qui soit la même pour tous à chaque instant, de sorte qu'ils paraissent ne pas se déplacer les uns par rapport aux autres, si l'un des points,* M *par exemple, vient à être sollicité par une certaine force, le mouvement relatif du point* M *à l'égard des autres points sera le même que le mouvement absolu qu'aurait ce point* M *si le mouvement commun n'existait pas et que le point* M *partant du repos fût encore sollicité par la même force.*

Fig. 62.

Cette loi de la nature est vérifiée par l'accord des conséquences qu'on en tire avec les faits observés, surtout en astronomie

165. Il résulte de ce principe que si un point matériel animé d'une vitesse acquise vient à être sollicité par une force dirigée dans le sens même de son mouvement ou en sens contraire, cette force lui communiquera, après un temps quelconque, un accroissement ou une diminution de vitesse précisément égal à la vitesse qu'elle lui imprimerait s'il partait de l'état de repos.

166. Effet d'une force constante sur un point matériel. — Une force P, d'intensité constante, agissant d'une manière continue sur un mobile, animé d'une certaine vitesse, dans la direction de la force, lui imprime un mouvement uniformément varié.

167. Comparaison des forces. — *Le changement de vitesse produit sur un mobile par l'action simultanée de deux forces qui agissent dans la direction du mouvement déjà imprimé au mobile, est indépendant de la vitesse acquise et est égal à la somme des vitesses qu'aurait eues séparément le mobile si, pris à l'état de repos, il avait été tour à tour soumis à l'action de chacune des forces* P *et* P'.

168. ***Deux forces d'intensités constantes sont entre elles comme les changements de vitesses qu'elles peuvent produire séparément pendant le même temps sur un même point matériel.***

169. Ce fait est confirmé par l'expérience.

170, 171. De l'accélération. — Une force d'intensité variable sollicite un point matériel M suivant une certaine droite Ox. Soient $OM = x$ et v la vitesse que possède le point matériel au point M, au bout du temps t.

Fig. 64.

A ce moment la force présente une certaine intensité P, et si elle agissait constamment avec cette intensité, elle ferait éprouver à la vitesse, pendant l'unité de temps, une certaine variation φ. Cette quantité φ est ce qu'on nomme l'*accélération*, et l'on a

$$\varphi = \frac{dv}{dt}.$$

172. L'accélération φ sera positive ou négative selon que la force P tirera dans le sens des x positifs ou dans le sens contraire.

QUATORZIÈME LEÇON.

DE LA MASSE DES CORPS.

173. Masse des points matériels. — Si l'on agit sur un corps pour le mettre en mouvement, une réaction en sens inverse s'exerce contre l'agent ou l'organe qui donne le mouvement, et cette réaction est la cause de la sensation que nous éprouvons. En général un corps ne peut agir sur un autre sans éprouver de la part de cet autre une réaction égale et contraire.

174. De ce qu'il faut des efforts plus ou moins considérables pour donner le même mouvement à des corps différents, on doit conclure que ces corps ne contiennent pas des quantités égales de matière.
On dit que *deux points matériels ont des masses égales, quand deux forces égales, appliquées pendant le même temps à ces deux points, leur donnent le même mouvement.*

175. Si l'on conçoit une multitude de points matériels ayant des masses égales et qu'on réunisse plusieurs de ces points en un seul, on formera des molécules dont les masses auront entre elles des rapports quelconques.

176. Masse des corps. — Des forces égales et parallèles, appli-

quées à différents points de même masse, peuvent être remplacées par leur résultante qui est parallèle aux forces considérées, égale à leur somme et passe toujours par le même point, quelle que soit d'ailleurs la direction commune de ces forces. Ce point est dit *le centre de masse* du corps. *Quand un corps de figure invariable est sollicité par une force qui passe par le centre de masse, tous ses points décrivent des droites parallèles et égales, dans le même temps.*

Les masses de deux corps sont égales, lorsqu'en appliquant des forces égales à leur centre de masse tous les points de ces corps décrivent des droites parallèles avec la même vitesse. Les masses m et m' de deux corps sont dans le rapport de n à n' lorsqu'on peut les partager l'un en n parties, l'autre en n' parties ayant la même masse μ.

177. Relation entre les forces, les masses et les vitesses. — *Si des forces constantes* P *et* P' *appliquées aux masses m et m' leur impriment la même vitesse u, elles seront entre elles comme ces masses.*

178. Supposons que deux forces d'intensité constante P et P, appliquées à deux corps quelconques dont les masses sont m et m', leur fassent acquérir des vitesses u et u' au bout d'un même temps t. On aura

$$\frac{P}{P'} = \frac{mu}{m'u'}.$$

179. De la quantité de mouvement. — Le produit mu de la masse d'un corps m par la vitesse u commune à tous ses points est ce qu'on appelle la *quantité de mouvement* du corps.

Les intensités de deux forces appliquées à deux corps quelconques, à leurs centres de masse, sont proportionnelles aux quantités de mouvement qu'elles donnent à ces deux corps. On peut prendre pour mesure de l'intensité d'une force P la quantité de mouvement mu qu'elle communique à une masse m dans un temps déterminé, par exemple dans l'unité de temps. On a

$$P = mu,$$

en prenant pour unité de masse la masse d'un corps qui, sollicité par l'unité de force, acquerrait dans l'unité de temps une vitesse égale à l'unité de longueur.

180. Force motrice. — Force accélératrice. — Supposons qu'une force appliquée au centre de masse d'un corps dont la masse est m, ait, à l'instant considéré, une intensité P. Soit φ la vitesse que cette force ferait acquérir au mobile au bout de l'unité de temps, si pendant ce temps elle conservait une intensité constante égale à P.

La force P, appelée *force motrice*, est donnée par la relation

$$P = m\varphi = m\frac{dv}{dt}.$$

181. Le nombre p, qui représente la force motrice de l'unité de masse, est le même que celui qui exprime l'accélération φ. La force motrice qui produit le mouvement de l'unité de masse est dite la force accélératrice du mobile, et la quantité φ est nommée indifféremment l'*accélération* ou la *force accélératrice*.

182. Relation entre le poids et la masse. — L'observation prouve que deux corps pesants, quelles que soient leur substance et leur forme, acquièrent la même vitesse, au bout du même temps, quand ils tombent dans le vide. Si les choses ne semblent pas se passer ainsi dans la nature, la cause en est due à la résistance de l'air, milieu dans lequel s'opère la chute du corps.

Il résulte de ce fait que *les poids de deux corps sont proportionnels à leurs masses.*

Le centre de masse d'un corps n'est autre chose que son centre de gravité.

183. Des unités employées en mécanique. — On prend ordinairement pour unité de temps la seconde, pour celle de longueur le mètre. L'unité de force est le gramme ou le kilogramme : le gramme est le poids de 1 centimètre cube d'eau distillée à son maximum de densité.

On doit prendre pour unité de masse la masse du poids $9^{gr},80896$.

184. Le nombre $\frac{P}{g}$, qui exprime la masse d'un corps, reste le même, en quelque endroit qu'on le détermine.

185. Soient V le volume d'un corps supposé homogène et D sa densité ou sa masse sous l'unité de volume. En appelant m la masse de tout le corps, on aura

$$m = VD, \quad P = VDg.$$

QUINZIÈME LEÇON.

MOUVEMENT DES CORPS PESANTS.

186. Mouvement vertical des corps pesants dans le vide. — En appelant g l'accélération due à la pesanteur, on a

$$v = a + gt,$$

a représentant la vitesse possédée par le mobile à l'origine du temps, et

$$x = b + at + \frac{gt^2}{2},$$

b étant l'abscisse du mobile à l'origine du temps.

187. Si l'on compte les espaces et le temps à partir du point où la vitesse est nulle, on a

$$v = gt, \quad x = \frac{gt^2}{2}, \quad v = \sqrt{2gx}, \quad x = \frac{v^2}{2g}.$$

On appelle $\sqrt{2gx}$ *la vitesse due à la hauteur* x, et $\frac{v^2}{2g}$ est dite *la hauteur due à la vitesse* v.

188. Quand un corps est lancé de bas en haut suivant la verticale, on a

$$v = a - gt,$$

et si l'on compte les espaces à partir du point où se trouve le mobile à l'origine du temps,

$$x = at - \frac{gt^2}{2}.$$

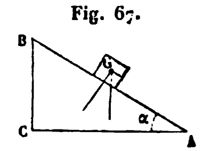
En appelant θ le temps au bout duquel le mobile cesse de monter, et h la hauteur à laquelle il s'élève, on a

$$\theta = \frac{a}{g}, \quad h = \frac{a^2}{2g}.$$

Quand le corps est revenu au point de départ, sa vitesse redevient égale à sa vitesse initiale, mais elle est de sens contraire.

189, 190. Mouvement d'un corps pesant sur un plan incliné. — Soit G le centre de gravité d'un corps pesant, placé sur un plan incliné. En appelant α l'angle BAC de ce plan avec l'horizon, on aura

Fig. 67.



$$v = g \sin \alpha . t,$$

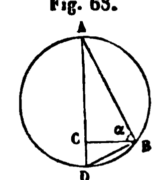
$$x = \frac{g \sin \alpha . t^2}{2},$$

$$v^2 = 2gx \sin \alpha.$$

La vitesse acquise par un mobile qui a parcouru toute la longueur BA *du plan incliné est égale à celle qu'il aurait acquise en tombant de la hauteur* BC.

191. Soit ABD une circonférence dont le diamètre AD est verti-

Fig. 68.



cal. *Le temps employé par un corps pour descendre le long de* AB *est le même, quelle que soit cette corde, et égal au temps que le corps emploierait à descendre de la hauteur* AD.

192 à 194. DÉTERMINATION DE LA CONSTANTE g; MACHINE D'ATWOOD.

195. CHUTE D'UN CORPS PESANT DANS UN MILIEU QUI RÉSISTE COMME LE CARRÉ DE LA VITESSE. — Supposons que le corps qui tombe soit symétrique autour d'un axe vertical. Soit R la résultante des résistances partielles qu'oppose l'air à la chute du corps, aux différents points de sa surface; la résistance R, lorsque le mouvement du corps n'est ni très-lent, ni très-rapide, peut être regardée comme proportionnelle à la densité du milieu et au carré de la vitesse du mobile. On peut donc poser

$$R = a\rho v^2,$$

ρ désignant la densité de l'air, v la vitesse du corps et a un coefficient que l'on peut déterminer pour le corps pesant considéré par une expérience.

196. Si le corps est une sphère, en appelant D sa densité, r son rayon, on aura

$$\frac{R}{m} = \frac{3b}{4\pi}\cdot\frac{\rho v^2}{Dr} = \frac{\gamma\rho v^2}{Dr}.$$

Enfin, pour la même sphère et pour le même milieu, γ, ρ, D, r étant des constantes, on peut poser

$$\frac{Dr}{\gamma\rho} = \frac{k^2}{g},\quad \text{d'où}\quad \frac{R}{m} = \frac{gv^2}{k^2}.$$

La constante k désigne la vitesse que devrait avoir le mobile pour que la résistance de l'air fût précisément égale au poids du corps.

197. Vitesse en fonction du temps :

$$v = k\frac{e^{\frac{gt}{k}} - e^{-\frac{gt}{k}}}{e^{\frac{gt}{k}} + e^{-\frac{gt}{k}}},$$

198. Espace en fonction du temps :

$$x = \frac{k^2}{g}\,\mathrm{l}\,\frac{1}{2}\left(e^{\frac{gt}{k}} + e^{-\frac{gt}{k}}\right).$$

199. Relation entre l'espace parcouru et la vitesse :

$$x = \frac{k^2}{2g} \, \mathrm{l} \, \frac{k^2}{k^2 - v^2}.$$

200. Quand on suppose t très-grand, le mouvement devient sensiblement uniforme.

Le carré de la vitesse du mouvement uniforme vers lequel tend le mouvement varié est proportionnel à la densité du corps et au rayon de la sphère, et en raison inverse de la densité du milieu résistant.

Le temps au bout duquel le mouvement devient sensiblement uniforme est d'autant plus grand que la valeur de k est plus grande.

201. Cas particulier où la résistance du milieu devient nulle. — Cette hypothèse fait retrouver les lois de la chute des corps pesants dans le vide.

SEIZIÈME LEÇON.

SUITE DU MOUVEMENT DES CORPS PESANTS.

202. Mouvement d'un corps pesant lancé de bas en haut. — En conservant les mêmes notations, a étant la vitesse initiale du mobile, on a

$$\frac{gt}{k} = \text{arc tang} \frac{a}{k} - \text{arc tang} \frac{v}{k}.$$

203. Vitesse en fonction du temps :

$$v = k \cdot \frac{a \cos \frac{gt}{k} - k \sin \frac{gt}{k}}{a \sin \frac{gt}{k} + k \cos \frac{gt}{k}}.$$

204. Espace parcouru au bout du temps t :

$$x = \frac{k^2}{g} \, \mathrm{l} \left(\frac{a}{k} \sin \frac{gt}{k} + \cos \frac{gt}{k} \right).$$

205. Expression de x en fonction de v :

$$x = \frac{k^2}{2g} \, \mathrm{l} \, \frac{k^2 + a^2}{k^2 + v^2}.$$

206. Il y a un instant où le corps cesse de monter. Si θ est le temps de l'ascension et h la hauteur la plus grande à laquelle parvient le mobile, on aura

$$\theta = \frac{k}{g} \text{arc tang} \frac{a}{k}, \quad h = \frac{k^2}{2g} \, \mathrm{l} \, \frac{k^2 + a^2}{k^2}.$$

Parvenu à cette hauteur, le mobile commence à descendre, et si l'on appelle a' la vitesse qu'il possède lorsqu'il est revenu au point de départ, on aura

$$a' = \frac{ak}{\sqrt{a^2+k^2}}.$$

207. Le temps θ' de la chute du corps est

$$\theta' = \frac{k}{g}\,\mathrm{l}\sqrt{\frac{k+a'}{k-a'}} = \frac{k}{g}\,\mathrm{l}\,\frac{\sqrt{a^2+k^2}+a}{k},$$

et si l'on nomme T le temps total que le mobile met à revenir à sa position initiale, on aura

$$\mathrm{T} = \frac{k}{g}\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{a}{k} + \mathrm{l}\,\frac{\sqrt{a^2+k^2}+a}{k}\right).$$

208. Mouvement d'un corps pesant dans un milieu qui résiste comme la vitesse. — Quand le mobile possède une très-petite vitesse, on peut regarder la résistance du milieu comme proportionnelle à cette vitesse. Si le corps descend, on a

$$x = kt - \frac{k^2}{g}\left(1 - e^{-\frac{gt}{k}}\right).$$

209. Mouvement d'un corps dénué de pesanteur dans un milieu qui résiste comme la racine carrée de la vitesse. — La résistance du milieu, seule force qui sollicite le mobile, étant $2\sqrt{2}$, on aura

$$v = (\sqrt{a} - t)^2,$$
$$x = \frac{a\sqrt{a}}{3} - \frac{(\sqrt{a}-t)^3}{3}.$$

210. Le mobile s'arrêtera après avoir parcouru un espace $\frac{a\sqrt{a}}{3}$, puis le corps restera indéfiniment en repos. L'équation différentielle admet une solution particulière qui s'applique aux cas où $t \overline{\overline{>}} \sqrt{a}$.

211. Chute d'un corps dans le vide en ayant égard a la variation de la pesanteur. — Soit M un point matériel pesant tombant dans le vide et placé d'abord à une assez grande distance de la surface de la terre. Soient $\mathrm{OB} = r$ le rayon de la terre, g l'intensité de la pesanteur à la surface, $\mathrm{AO} = a$ la distance initiale du

Fig. 73.

point M, enfin AM $= x$ l'espace parcouru dans le temps t; on aura

$$v^2 = \frac{2gr^2}{a}\,\frac{x}{a-x}.$$

212. La vitesse augmente avec x : si l'on poso

$$AB = h,$$

il vient

$$v = \sqrt{2gh}\,\sqrt{\frac{r}{a}};$$

à la surface de la terre, elle est moindre que la vitesse qu'aurait le mobile en tombant de la même hauteur h, si la pesanteur était partout la même qu'à la surface.

213, 214, 215. Pour $x = a$, on a $v = \infty$. Donc si toute la masse du globe était réunie à son centre, la vitesse acquise par le mobile arrivant au centre serait infinie.

La relation entre l'espace et le temps est

$$\sqrt{\frac{2gr^2}{a}}\,t = \sqrt{ax - x^2} + \frac{1}{2}a \arccos\frac{a-2x}{a}.$$

216. Cas particulier d'un corps placé a une petite distance de la surface terrestre. — Les formules que nous venons de trouver deviennent celles du mouvement uniformément accéléré.

DIX-SEPTIÈME LEÇON.

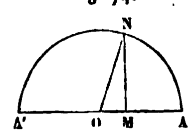
DU MOUVEMENT RECTILIGNE DES POINTS ATTIRÉS OU REPOUSSÉS PAR DES CENTRES FIXES.

217. Mouvement de deux points matériels qui s'attirent en raison inverse du carré des distances. — Le centre de gravité des deux masses se meut uniformément.

L'un des points se meut par rapport à l'autre comme s'il était attiré par une masse égale à $(m + m')$ placée en un centre fixe.

218. Mouvement d'un point attiré en raison directe de la distance. — Considérons un point matériel placé d'abord au point A où sa vitesse est nulle et attiré par un centre fixe O, en raison directe de sa distance à ce dernier point, que nous prendrons pour origine. n^2 étant la mesure de l'attraction exercée sur l'unité de masse du corps à

Fig. 74.



l'unité de distance, on a

$$x = a\cos nt, \quad v = -na\sin nt.$$

219. Lorsque le point mobile arrive en O, on a

$$t = \frac{\pi}{2n}.$$

Le mobile fera une infinité d'oscillations toutes égales entre elles et de même durée, de A en A' et de A' en A.

220. Sur AA' comme diamètre décrivons une demi-circonférence. Menons MN perpendiculaire à AA'. $\frac{\text{AN}}{an}$ représentera le temps que le mobile emploie à aller du point M au point A.

221. Mouvement d'un point repoussé par un centre fixe en raison directe de la distance. — Supposons qu'à l'origine du temps le point matériel placé à une distance OA $= a$ soit animé d'une vitesse dirigée vers le point O et représentée par $-nb$. On a

Fig. 75.

O A x

$$v = -n\sqrt{x^2 + b^2 - a^2},$$
$$2x = (a+b)e^{-nt} + (a-b)e^{nt}.$$

222. Cas particuliers.

DIX-HUITIÈME LEÇON.

DU MOUVEMENT CURVILIGNE ET DES FORCES QUI LE PRODUISENT.

223. Projection d'un mouvement rectiligne et uniforme sur un axe. — *La projection du mobile sur un axe quelconque se meut d'un mouvement uniforme, mais dont la vitesse p est liée à la vitesse v par la formule*

$$p = v\cos\alpha.$$

Les vitesses p, q, r des projections sur les trois axes sont nommées les *composantes de la vitesse* du mobile sur ces axes.

224. Lorsqu'on donnera le mouvement du point M, c'est-à-dire les valeurs de v, α, β, γ, les équations

$$v\cos\alpha = p, \quad v\cos\beta = q, \quad v\cos\gamma = r$$

feront connaître les composantes p, q, r. Réciproquement ces com-

posantes étant connues, on en déduira v, α, β, γ par les formules

$$v = \sqrt{p^2+q^2+r^2},$$

$$\cos\alpha = \frac{p}{v}, \quad \cos\beta = \frac{q}{v}, \quad \cos\gamma = \frac{r}{v}.$$

Si l'on mène par le point O une droite représentant en grandeur et en direction la vitesse du mobile, les composantes de cette vitesse seront représentées en grandeur et en direction par les arêtes d'un parallélipipède dont la vitesse du mobile serait la diagonale.

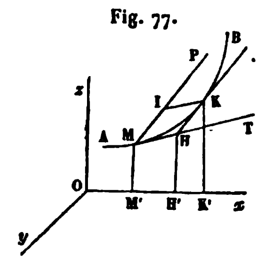
225. Soient a, b, c les coordonnées du point A où se trouve le mobile à l'origine des temps, et soient x, y, z celles du point M où il se trouve au bout du temps t, le mouvement sera complétement représenté par les trois équations

$$x = a + pt, \quad y = b + qt, \quad z = c + rt.$$

226. *Si les projections d'un point* M *sur trois axes* Ox, Oy, Oz, *se meuvent avec des vitesses constantes* p, q, r, *le mouvement du point* M *sera lui-même rectiligne et uniforme.*

227. De la vitesse dans le mouvement curviligne. — Soit M (x, y, z) un point qui décrit dans l'espace une ligne courbe CMD. Si au bout du temps t la force qui le sollicite cessait d'agir, le mobile prendrait, suivant une certaine droite MT, un mouvement uniforme dont la vitesse est *la vitesse du mobile au point* M.

Fig. 77.



228. Le mouvement du point M est déterminé par trois équations

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = \psi(t),$$

au moyen desquelles on peut obtenir la vitesse du mobile en fonction du temps.

Les composantes de la vitesse suivant les axes s'obtiendront en prenant les vitesses des projections sur ces axes, et l'on aura, dans le cas des axes rectangulaires,

$$\frac{dx}{dt} = v\cos\alpha, \quad \frac{dy}{dt} = v\cos\beta, \quad \frac{dz}{dt} = v\cos\gamma,$$

$$v = \frac{ds}{dt},$$

en désignant par s la longueur d'un arc comptée sur la trajectoire à partir d'un point fixe. Cette dernière formule conviendrait encore si les axes étaient obliques.

229, 230. Quand la force qui agit sur le mobile est variable, les formules précédentes subsistent.

231, 232, 233. DES FORCES QUI PRODUISENT UN MOUVEMENT DONNÉ. — La force qui produit le mouvement d'un point matériel dont la masse est m, étant représentée par P, et ses composantes par X, Y, Z, on a

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z.$$

Ces formules montrent que les projections du point mobile sur chaque axe se meuvent comme des points matériels de même masse sollicités uniquement par la composante de la force motrice suivant cet axe. Elles ne supposent pas les axes rectangulaires.

234. Si X, Y, Z représentaient les composantes de la force accélératrice, on aurait plus simplement

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = Z.$$

235. Si les coordonnées x, y, z sont données en fonction du temps, deux différentiations feront connaître les composantes de la vitesse et celles de la force accélératrice.

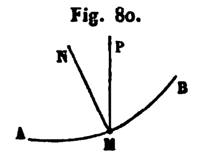
236. Ordinairement on doit résoudre le problème inverse : X, Y, Z sont des fonctions connues de t, et il faut, pour connaître le mouvement du mobile, intégrer trois équations simultanées.

DIX-NEUVIÈME LEÇON.

SUITE D'UN MOUVEMENT CURVILIGNE D'UN POINT MATÉRIEL.

237. POINT ASSUJETTI A SE MOUVOIR SUR UNE COURBE DONNÉE. — Considérons un point assujetti à se mouvoir sur une ligne courbe donnée AMB et sollicité par la force P. La courbe donnée ou le lien qui force le point matériel à rester sur cette courbe exerce sur lui une certaine action qu'on appelle la *résistance de la courbe*, et le point exerce sur la courbe une réaction ou pression égale et contraire.

Fig. 80.



Cette action ou cette résistance de la courbe peut être décomposée en deux forces, l'une dirigée suivant la tangente à la courbe, en sens contraire du mouvement, qu'on appelle le *frottement*, l'autre perpendiculaire à la tangente ou normale à la courbe. S'il n'y a pas de frottement, l'action N de la courbe sur le mobile est alors dirigée suivant une normale. En désignant par λ, μ, ν les angles que la direction de la force normale N fait avec les axes rectangulaires, les équations du mouvement du point matériel seront

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \mathrm{X} + \mathrm{N}\cos\lambda,$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = \mathrm{Y} + \mathrm{N}\cos\mu,$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = \mathrm{Z} + \mathrm{N}\cos\nu.$$

238. Si le point matériel est assujetti à demeurer sur une surface donnée, on aura les mêmes équations, N désignant la résistance de la surface.

239. Mouvement des projectiles dans le vide. — Soit A le point de départ d'un point matériel pesant, lancé avec une vitesse a dans la direction AI. Prenons deux axes, l'un Ay vertical et dirigé en sens inverse de la pesanteur, l'autre horizontal Ax, mené dans le plan IAy. Les équations différentielles du mouvement se réduiront aux suivantes :

Fig. 82.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g.$$

240. L'intégration donne

$$x = at\cos\alpha, \quad y = at\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

La projection du point mobile sur l'axe Ox se meut d'un mouvement uniforme dont la vitesse est $a\cos\alpha$. La projection sur l'axe Oy se meut d'un mouvement uniformément retardé, comme ferait un mobile lancé de bas en haut avec une vitesse initiale égale à $a\sin\alpha$.

241. On trouve

$$v^2 = a^2 - 2gy.$$

242. La courbe que décrit le mobile a pour équation, si l'on pose, pour simplifier, $a^2 = 2gh$,

$$y = x\,\mathrm{tang}\,\alpha - \frac{x^2}{4h\cos^2\alpha}.$$

Cette trajectoire est *une parabole, dont l'axe est vertical.*

243. Les coordonnées du sommet sont

$$AE = 2h \sin\alpha \cos\alpha, \quad EC = h \sin^2\alpha.$$

244. On a

$$AB = 4h \sin\alpha \cos\alpha.$$

La longueur AB est ce qu'on appelle l'*amplitude du jet. L'amplitude du jet a sa plus grande valeur quand* $\alpha = 45$ *degrés, la vitesse initiale restant la même.*

245. L'angle α sous lequel il faut lancer un projectile du point A, pour qu'il atteigne un point donné (X, Y), est donné par la formule

$$\tan g\alpha = \frac{2h}{X} \pm \frac{1}{X}\sqrt{4h^2 - 4hY - X^2}.$$

Si l'on a

$$4h^2 - 4hY - X^2 > 0,$$

le projectile pourra être lancé dans deux directions différentes pour atteindre le point M. Si l'on a

$$4h^2 - 4hY - X^2 = 0,$$

il n'existe plus qu'une seule direction donnée, et enfin le problème est impossible quand on a

$$4h^2 - 4hY - X^2 < 0.$$

246, 247. La courbe dont l'équation est

$$x^2 = 4h(h - y)$$

est une parabole L'HL, dont l'axe est dirigé suivant Ay, et dont le sommet H est situé à la hauteur $AH = h$. Quand le point que l'on veut atteindre est dans l'intérieur de cette parabole, le mobile peut être lancé suivant deux directions différentes; il n'y a plus qu'une seule direction convenable, si le point est sur la parabole même; enfin quand ce point est hors de la courbe, le problème n'est plus possible.

248. L'enveloppe de toutes les paraboles du numéro précédent est la parabole HLM, lieu des points que le projectile ne peut atteindre que dans une seule direction.

VINGTIÈME LEÇON.

DES COMPOSANTES DE LA FORCE MOTRICE.

249. DÉCOMPOSITION DE LA FORCE MOTRICE EN FORCE TANGENTIELLE ET FORCE CENTRIPÈTE. — Dans le mouvement d'un point en ligne

courbe, la force motrice se décompose à chaque instant en deux forces : l'une, dirigée suivant la tangente, est nommée la *force tangentielle;* l'autre, dirigée suivant le rayon de courbure, se nomme la *force centripète*. En désignant la première par T, la deuxième par Q, on aura

$$T = \frac{mdv}{dt}, \quad Q = \frac{mv^2}{\rho}.$$

Le plan qui passe par la force motrice et par la tangente est le plan osculateur au point M.

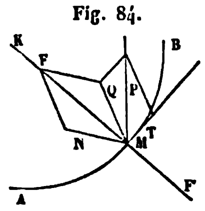
250. Quand le point matériel est sollicité par plusieurs forces dont P est la résultante, on peut décomposer chacune des premières forces en deux autres dirigées l'une suivant la tangente et l'autre perpendiculairement à cette tangente. Une force normale à la trajectoire n'influera pas sur l'accélération du mobile. Une force dirigée suivant la tangente ne tendra pas à changer la direction du mobile.

251. Point assujetti a se mouvoir sur une courbe donnée. Force centrifuge. — Un point M qui n'est actuellement sollicité par aucune force et qui ne se meut qu'en vertu de sa vitesse acquise, étant assujetti à demeurer sur la courbe AMB, parcourt sur la trajectoire des espaces égaux en temps égaux.

La pression exercée par le mobile M sur la courbe ou sur le lien qui l'oblige à parcourir cette courbe, est égale à $\frac{mv^2}{\rho}$. Cette force, égale et contraire à la force centripète, est ce qu'on appelle la *force centrifuge*.

252. Supposons en second lieu que le point M soit sollicité par une certaine force motrice P. Soit N une force égale et contraire à la pression que le point M exerce sur la courbe. Décomposons la force P en deux autres T et Q, la première dirigée suivant la tangente, et la seconde située dans le plan normal de la courbe. Soit F la résultante des deux forces Q et N, situées toutes les deux dans le plan normal. La force F agira suivant le rayon de courbure, et l'on aura

Fig. 84.



$$m\frac{dv}{dt} = T, \quad \frac{mv^2}{\rho} = F.$$

La force F, dirigée suivant le rayon du cercle osculateur et qui agit à chaque instant pour empêcher le mobile de s'écarter de la courbe

suivant la tangente, est la *force centripète*. La force F', égale et contraire à la force F, est égale à la *force centrifuge*.

253. Si la force motrice était normale à la courbe, le mouvement serait uniforme.

Si la force motrice était dirigée suivant la tangente à la courbe, la force N se confondrait avec la force centripète et la pression exercée sur la courbe par le mobile avec la force centrifuge F'.

254. Mouvement d'un point sur une surface. — Soit AMB (*fig.* 84) la courbe que le mobile décrit. On peut faire abstraction de la surface, pourvu que l'on joigne à la force motrice P une force N, égale et contraire à la pression que le mobile exerce sur la surface. Décomposons encore la force P en deux autres T et Q, l'une tangente et l'autre normale à la trajectoire AMB. Les deux forces Q et N normales à la trajectoire se composent en une seule F dirigée suivant le rayon du cercle osculateur de la trajectoire au point M, et l'on a

$$m\frac{dv}{dt}=\mathrm{T},\quad \frac{mv^2}{\rho}=\mathrm{F}:$$

on aura aussi

$$\mathrm{F}:\mathrm{Q}=\sin \mathrm{QMN}:\sin \mathrm{FMN},$$

ce qui détermine la position de MF ou du plan osculateur quand on connaît v, ρ, Q et l'angle QMN.

On a la pression exercée par le point mobile sur la surface, en cherchant la résultante égale et contraire à N, de la force Q et d'une force F', égale et contraire à F.

255. Si la force motrice était nulle, on aurait $v=$ constante, et N serait à la fois la mesure de la force centripète et de la force centrifuge.

Si la force P était dirigée suivant la tangente à la trajectoire, la résistance de la surface serait la force centripète. Dans ce cas, le plan osculateur contient la normale à la surface, et la trajectoire est la ligne la plus courte que l'on puisse tracer sur la surface entre deux quelconques de ses points.

256. Autre manière d'obtenir les résultats précédents. — Huyghens trouve les composantes de la force motrice en considérant cette force comme constante pendant un temps infiniment petit, et le mouvement comme s'effectuant sur le cercle osculateur.

257. Remarques sur la force centrifuge. — Quand un corps solide tourne uniformément autour d'un axe fixe, chaque point de

ce corps possède une force centrifuge particulière F. En appelant T le temps d'une révolution entière et ρ le rayon du cercle, on a

$$F = m \frac{4\pi^2\rho}{T^2}.$$

Les forces centrifuges des différents points sont donc proportionnelles à leur distance à l'axe.

258, 259. Application a la terre.

VINGT ET UNIÈME LEÇON.

DES FORCES VIVES ET DU TRAVAIL DANS LE MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL.

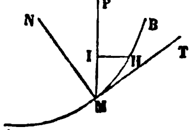
260, 261. Différentielle de la force vive. P désignant la force motrice qui sollicite un mobile M et X, Y, Z ses composantes, on a

$$d\,mv^2 = 2\,(X dx + Y dy + Z dz).$$

262. La quantité mv^2 ou le produit de la masse d'un mobile par le carré de sa vitesse est ce qu'on appelle la *force vive* du mobile.

263. Autres formes de $X dx + Y dy + Z dz$. — Soit ω l'angle PMT que la force motrice P fait avec la tangente. On a

Fig. 89.



$$X dx + Y dy + Z dz = P \cos\omega\, ds.$$

Si l'on décompose la force P en une force tangentielle T et une force normale Q, on a

$$X dx + Y dy + Z dz = T ds.$$

Enfin, si l'on appelle dp la projection MI de l'arc MH $= ds$ sur la direction de la force motrice, on a

$$X dx + Y dy + Z dz = P dp.$$

264. Définition du travail. — Le produit $T ds$ que l'on obtient en multipliant la composante tangentielle de la force P par l'élément de l'arc parcouru dans l'instant dt se nomme *travail élémentaire* ou *élément de travail* de cette force. L'élément de travail est considéré comme positif lorsque la force tangentielle agit dans le sens du mouvement, et comme négatif dans le cas contraire, ou, ce qui

revient au même, suivant que l'angle ω est aigu ou obtus. Le signe du travail élémentaire sera donné par l'expression $P\cos\omega ds$, en considérant P et ds comme positifs.

Le travail élémentaire est égal au produit de la force par la projection de l'élément du chemin parcouru sur la direction de cette force.

265. Le travail élémentaire de la résultante de plusieurs forces est égal à la somme algébrique des travaux élémentaires de ces forces.

266. On nomme *travail total* d'une force P pour un chemin déterminé AB l'intégrale $\int T ds$, prise entre les limites qui correspondent aux extrémités de l'arc parcouru. Les forces normales à la trajectoire n'influent pas sur le travail total.

267. Relation entre le travail et la force vive. — L'accroissement de force vive d'un mobile, lorsqu'il passe d'une position à une autre, est égal au double du travail de la force motrice.

268. Si la force P est la résultante de plusieurs forces $P_1, P_2, \ldots$, dont les composantes tangentielles sont $T_1, T_2, T_3, \ldots$, on aura

$$mv^2 - mk^2 = 2\left(\int T_1 ds + \int T_2 ds + \ldots\right).$$

On appelle *forces mouvantes* celles qui font un angle aigu avec la tangente, et *forces résistantes* celles qui font un angle obtus et dont l'effet est de retenir le mobile dans son mouvement sur la courbe.

L'accroissement de force vive d'un mobile, lorsqu'il passe d'une position à une autre, est égal au double de l'excès du travail des forces mouvantes sur le travail des forces résistantes.

269. Conséquences du principe des forces vives. — Quand le mobile n'est sollicité par aucune force ou qu'il l'est seulement par des forces toujours normales à la trajectoire, le mouvement est uniforme.

270. Lorsque $X dx + Y dy + Z dz$ est la différentielle exacte d'une fonction $f(x, y, z)$ de trois coordonnées x, y, z considérées comme des variables indépendantes, l'accroissement de force vive, lorsque le mobile passe de la position (a, b, c) à la position (x, y, z), ne dépend pas de la trajectoire dans l'intervalle, ni du temps qui s'est écoulé entre les deux positions extrêmes, mais seulement des coordonnées de ces deux positions.

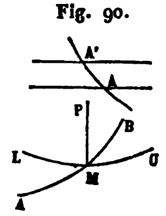
271. Plus généralement, si l'on imagine les deux surfaces

$$f(x, y, z) = C', \quad f(x, y, z) = C'',$$

et que le mobile rencontre la première au point (a, b, c) et la seconde au point (x, y, z), l'accroissement de force vive est constant et indépendant de la forme de la trajectoire entre les deux surfaces, des points où cette courbe rencontre ces deux surfaces et du temps qui s'est écoulé.

On trouve un résultat de ce genre dans le mouvement d'un mobile sollicité seulement par la pesanteur.

Fig. 90.



272. L'équation

$$f(x, y, z) = C$$

représente une infinité de surfaces différentes, passant par les divers points de la trajectoire AMB. Si LMU est l'une de ces surfaces, la force motrice P au point M lui est normale.

273. Cas où il y a une résistance. — Quand un mobile éprouve un frottement ou se meut dans un milieu résistant, l'expression $X dx + Y dy + Z dz$ n'est plus une différentielle exacte.

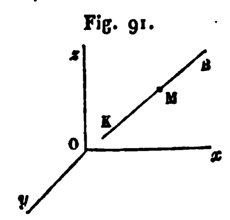
274. Dans ce cas, si le point se meut sur une courbe connue, il faudra prendre l'équation

$$m\frac{dv}{dt} = T \quad \text{ou} \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = T,$$

T désignant la composante de la force motrice (y compris les résistances) suivant la tangente. Au moyen des équations de la courbe on pourra exprimer T en fonction de s, et alors la détermination du mouvement sera ramenée à l'intégration d'une équation différentielle du second ordre, tandis que si $X dx + Y dy + Z dz$ était une différentielle exacte, on n'aurait à intégrer qu'une équation différentielle du premier ordre.

275, 276. Cas où le mobile est sollicité par des forces dirigées vers des centres fixes. — L'expression $X dx + Y dy + Z dz$ est toujours une différentielle exacte, quand un point matériel est sollicité par des forces dirigées vers des centres fixes et dont les intensités sont des fonctions des distances du mobile à ces différents centres. Supposons qu'une force dirigée vers le centre fixe K (e, f, g) repousse un point

Fig. 91.



$M(x, y, z)$, avec une énergie R, fonction seulement de la distance $MK = r$. La partie de $X dx + Y dy + Z dz$ provenant de cette force sera $R dr$.

Si le mobile est sollicité par un certain nombre de forces R, R', R'',..., dirigées à chaque instant vers des centres fixes K, K', K'',..., on aura

$$d m v^2 = 2(\pm R dr \pm R' dr \pm \ldots),$$

et chaque terme du second membre étant une différentielle exacte, il en sera de même de leur somme.

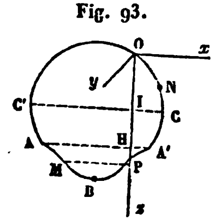
La même conséquence aura lieu si l'un des centres s'éloigne à l'infini, c'est-à-dire si la force correspondante est perpendiculaire à un plan donné et fonction de la distance du point à ce plan.

VINGT-DEUXIÈME LEÇON.

MOUVEMENT D'UN POINT PESANT SUR UNE COURBE. PENDULE SIMPLE.

277. Mouvement d'un point pesant sur une courbe. — Lorsqu'un point pesant se meut sur une courbe donnée AMA', si le mobile part du point A sans vitesse, la vitesse acquise par le mobile au point M sera la même que s'il était tombé librement de la hauteur HP.

Fig. 93.



Si B est le point le plus bas de la courbe, le mobile aura la plus grande vitesse en ce point. Parvenu là, il continuera sa route en vertu de la vitesse acquise, et s'élevant sur la partie BC avec une vitesse décroissante, il s'arrêtera au point A', pour lequel $z = h$. Mais aussitôt, sollicité par la pesanteur, il descendra de nouveau sur la courbe pour revenir au point A, et il parcourra continuellement le même arc ABA', tantôt dans un sens, tantôt dans un autre.

278. Le temps employé par le mobile pour parcourir l'arc AM est le même, soit qu'il descende, soit qu'il monte. Les oscillations du mobile sont isochrones.

279. Cas où le mobile a une vitesse initiale. — Si au point A, pour lequel $z = h$, le mobile a une vitesse k, le mobile s'élève sur l'arc BCO plus haut que le point A'.

Prenons pour origine des coordonnées le point O le plus élevé de la courbe. Nous aurons trois cas à examiner.

Premier cas : $k < \sqrt{2gh}$. — Le mobile s'élèvera jusqu'à un point C plus haut que A' et qui sera déterminé par l'équation

$$OI = \frac{2gh - k^2}{2g}.$$

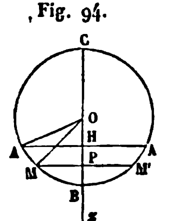
En ce point C la vitesse sera nulle; le mobile s'arrêtera pour revenir sur l'arc CBC' jusqu'au point C' situé à la même hauteur que C, et il fera une infinité d'oscillations isochrones.

Deuxième cas : $k > \sqrt{2gh}$. — Le mobile reviendra au point O avec la vitesse $\sqrt{k^2 - 2gh}$, dépassera ce point et parcourra la courbe une infinité de fois, toujours dans le même sens.

Troisième cas : $k = \sqrt{2gh}$. — Le mobile ne s'arrêtera qu'au point O, mais il lui faudra un temps infini pour arriver à ce point.

280. Pendule. — Équation du mouvement. — On appelle *pendule* un corps solide pesant qui peut osciller autour d'un axe horizontal. Un point matériel suspendu à l'extrémité d'une tige ou d'un fil inextensible et sans masse et dont l'autre extrémité est fixe, forme un *pendule simple*.

Fig. 94.



Plaçons l'origine des coordonnées au point de suspension O : prenons l'axe des z vertical et dirigé dans le sens de la pesanteur. Soit $AOz = \alpha$. L'équation du mouvement sera

$$dt = -\frac{a\,d\theta}{\sqrt{k^2 + 2ga(\cos\theta - \cos\alpha)}}.$$

281. Cas où l'équation peut s'intégrer. — On peut intégrer l'équation précédente dans le cas où la vitesse du mobile au point A est celle qu'il acquiert en descendant sans vitesse initiale du point C le plus haut du cercle.

L'équation se réduit à

$$dt = -\frac{a\,d\theta}{\sqrt{2ga(1+\cos\theta)}}.$$

On a

$$t = \sqrt{\frac{a}{g}}\,\mathrm{l}\,\frac{\tang\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{4}\right)}{\tang\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}\right)},$$

formule qui donne le temps que le mobile emploie à parcourir l'arc AM, dans l'hypothèse où il serait parti du point C, sans vitesse initiale.

Il faut un temps infini au mobile pour remonter jusqu'au point C.

282. Cas des petites oscillations. — En supposant nulle la vitesse du mobile au point A, la formule (280) se réduit à

$$dt = -\sqrt{\frac{a}{g}}\frac{d\theta}{\sqrt{2\cos\theta - 2\cos\alpha}}.$$

En négligeant la quatrième puissance de θ et de α, on trouve

$$t = \sqrt{\frac{a}{g}}\,\text{arc}\cos\frac{\theta}{\alpha},$$

$$\theta = \alpha\cos\left(t\sqrt{\frac{g}{a}}\right).$$

283. La durée T de la première oscillation est

$$T = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Elle est indépendante de son amplitude, pourvu que celle-ci soit très-petite.

284. Les résultats précédents s'étendent aux oscillations d'un point pesant, écarté très-peu de la verticale et assujetti à se mouvoir sur une courbe dont le plan osculateur au point le plus bas B est vertical. La durée commune de chaque oscillation sera $\pi\sqrt{\frac{\rho}{g}}$, ρ étant le rayon du cercle osculateur au point B.

Fig. 95.

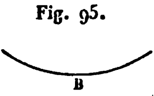
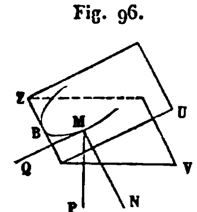


Fig. 96.



285. Si le plan osculateur de la courbe au point B le plus bas fait un angle i avec le plan horizontal ZV, on aura le temps d'une oscillation par la formule

$$T = \pi\sqrt{\frac{a}{g\sin i}}.$$

286. Pour apprécier la durée exacte d'une oscillation, on compte le nombre n des oscillations pendant un temps τ, et l'on a

$$T = \frac{\tau}{n}.$$

287. La position du mobile et sa vitesse redeviennent les mêmes

après la durée d'une double oscillation. A des intervalles de temps qui diffèrent d'une oscillation, le pendule fait des angles égaux avec la verticale du point de suspension, mais de côtés différents, et ses vitesses, dans ces positions, sont égales et de signes contraires.

VINGT-TROISIÈME LEÇON.

SUITE DE LA THÉORIE DU PENDULE SIMPLE.

288. Autre méthode. — Les mêmes notations étant conservées, on a

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{a}\sin\theta=0,$$

$$dt=\mp\sqrt{\frac{a}{g}}\,\frac{d\theta}{\sqrt{2\cos\theta-2\cos\alpha}}.$$

Soient

$$x=1-\cos\theta,\quad b=1-\cos\alpha;$$

on en déduit

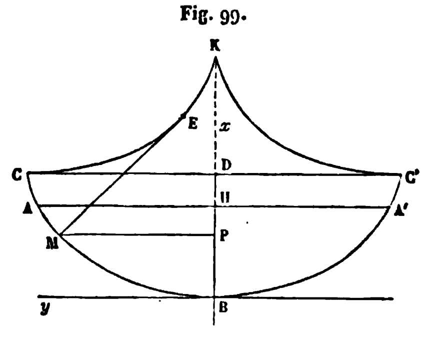
$$T=\sqrt{\frac{a}{g}}\int_0^b\frac{dx}{\sqrt{bx-x^2}\sqrt{1-\frac{x}{2}}}.$$

289 à **291**. Développement en série.

$$T=\pi\sqrt{\frac{a}{g}}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{b}{2}+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\left(\frac{b}{2}\right)^3+\ldots\right].$$

292, 293. Pendule cycloïdal. — Soit A le point de départ du

Fig. 99.



mobile où nous supposerons sa vitesse nulle, et soit M (x, y) sa

position à une époque quelconque t. Soit a le diamètre BD du cercle générateur. En appelant b le rayon de courbure BK $= 2$ BD de la cycloïde au point B, on a

$$v = \sqrt{2g(h-x)},$$

$$t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{g}}\arccos\frac{2x-h}{h},$$

$$T = \pi\sqrt{\frac{b}{g}}.$$

La durée des oscillations est rigoureusement indépendante de leur amplitude, et différents mobiles, partis au même instant, sans vitesse initiale, de divers points de cette courbe, atteindraient au même instant le point le plus bas.

294. Construisons la développée de la cycloïde, composée des deux moitiés KC et KC′ d'une cycloïde égale à la première. Supposons qu'un point pesant soit attaché à l'extrémité d'un fil lié par son autre extrémité au point K. Si le mobile, dans une de ses positions, se trouve sur la cycloïde CBC′, ce point décrira la cycloïde CBC′. Toutes les oscillations devront s'effectuer dans un même temps égal à $\pi\sqrt{\frac{b}{g}}$.

295, 296. Tautochrone. — On appelle *tautochrone* toute ligne courbe sur laquelle un point pesant abandonné sans vitesse initiale d'un point quelconque de cette courbe parvient dans le même temps au point le plus bas. La cycloïde est la seule courbe tautochrone dans le vide.

297. Pendule dans un milieu résistant. — En désignant par R la résistance du milieu, l'équation du mouvement sera

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g\sin\theta - R,$$

$$R = \frac{gv}{k} = \frac{g}{k}\frac{ds}{dt}.$$

En posant $\gamma = \sqrt{1 - \frac{ga}{4k^2}}$, on aura

$$\theta = \alpha\left[\cos\left(t\gamma\sqrt{\frac{g}{a}}\right) + \frac{\sqrt{ga}}{2\gamma k}\sin\left(t\gamma\sqrt{\frac{g}{a}}\right)\right]e^{-\frac{gt}{2k}},$$

$$T = \frac{\pi}{\gamma}\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Les oscillations sont isochrones comme dans le vide, et leur durée est augmentée dans le rapport de 1 à γ. Les amplitudes successives forment une progression géométrique décroissante.

298. Lorsque le mouvement a lieu sur une cycloïde, toutes les oscillations se font rigoureusement dans le même temps, et cette courbe est encore isochrone dans un milieu qui résiste proportionnellement à la vitesse.

VINGT-QUATRIÈME LEÇON.

DES FORCES CENTRALES ET DU MOUVEMENT DES PLANÈTES.

299, 300. Forces centrales. — Principe des aires. — Soit M un point mobile sollicité à chaque instant par une force dont la direction passe constamment par un même point. La trajectoire est une courbe plane.

Le secteur engendré par le mouvement de la projection du rayon vecteur sur un plan quelconque est proportionnel au temps.

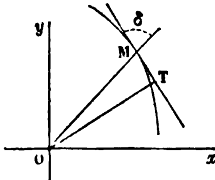
301. Réciproquement, si la trajectoire d'un point mobile est plane et telle, que les aires engendrées par le rayon vecteur partant de l'origine des coordonnées soient proportionnelles aux temps, la force motrice passera constamment par l'origine des coordonnées.

302. Expression de la vitesse en coordonnées polaires.

$$v^2 = \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{dt^2}.$$

303. Composantes de la vitesse au point M, suivant OM et suivant une perpendiculaire à OM :

Fig. 102.



$$v \cos\delta = \frac{dr}{dt},$$

$$v \sin\delta = \frac{r\,d\theta}{dt}.$$

304.

$$r^2 d\theta = c\,dt, \quad dv^2 = -2R\,dr.$$

305. Expression de la vitesse indépendante du temps :

$$v^2 = c^2 \left[\frac{1}{r^2} + \frac{\left(d\frac{1}{r}\right)^2}{d\theta^2} \right].$$

306. Expressions indépendantes du temps des composantes de la vitesse suivant OM et suivant une perpendiculaire à cette droite :

$$v\cos\delta = -\frac{c\,d\frac{1}{r}}{d\theta} \qquad v\sin\delta = \frac{c}{r}.$$

La vitesse en un point de la courbe est en raison inverse de la perpendiculaire abaissée du point O *sur la tangente à la trajectoire, au point considéré.*

307. Expression de la force accélératrice en fonction des coordonnées du point mobile.

$$R = \frac{c^2}{r^2}\left[\frac{1}{r} + \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2}\right].$$

308. Lois de Képler. — 1° *Les trajectoires de toutes les planètes sont des courbes planes, et pour chacune d'elles l'aire engendrée par le rayon vecteur parti du soleil et aboutissant à la planète est proportionnelle au temps.*

2° *Ces courbes sont des ellipses dont l'un des foyers est au soleil.*

3° *Les carrés des temps employés par les différentes planètes pour accomplir une de leurs révolutions sont entre eux comme les cubes des grands axes de ces ellipses.*

Ces lois se rapportent au centre de gravité de chaque planète, ainsi qu'à celui du soleil.

309. Conséquences des lois de Képler. — *La force motrice qui sollicite une planète est constamment dirigée vers le centre du soleil; cette force est attractive.*

310, 311.

$$R = \frac{\mu}{r^2}, \quad \mu = \frac{c^2}{a(1-e^2)}.$$

La force R *est en raison inverse du carré de la distance du centre de gravité de la planète à celui du soleil.* $2a$ est le grand axe de l'ellipse; e l'excentricité.

La constante c représente le double de l'espace parcouru par le rayon vecteur, dans l'unité de temps.

312. Si l'on appelle T le temps de la révolution complète de la planète considérée, on a

$$\mu = 4\pi^2\frac{a^3}{T^2}.$$

La force accélératrice rapportée à l'unité de distance est la même pour toutes les planètes.

ce corps possède une force centrifuge particulière F. En appelant T le temps d'une révolution entière et ρ le rayon du cercle, on a

$$F = m\frac{4\pi^2\rho}{T^2}.$$

Les forces centrifuges des différents points sont donc proportionnelles à leur distance à l'axe.

258, 259. Application a la terre.

VINGT ET UNIÈME LEÇON.

DES FORCES VIVES ET DU TRAVAIL DANS LE MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL.

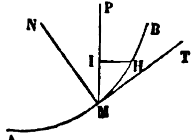
260, 261. Différentielle de la force vive. P désignant la force motrice qui sollicite un mobile M et X, Y, Z ses composantes, on a

$$d\,mv^2 = 2\,(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

262. La quantité mv^2 ou le produit de la masse d'un mobile par le carré de sa vitesse est ce qu'on appelle la *force vive* du mobile.

263. Autres formes de $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$. — Soit ω l'angle PMT que la force motrice P fait avec la tangente. On a

Fig. 89.



$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = P\cos\omega\,ds.$$

Si l'on décompose la force P en une force tangentielle T et une force normale Q, on a

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = T\,ds.$$

Enfin, si l'on appelle dp la projection MI de l'arc MH $= ds$ sur la direction de la force motrice, on a

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = P\,dp.$$

264. Définition du travail. — Le produit $T\,ds$ que l'on obtient en multipliant la composante tangentielle de la force P par l'élément de l'arc parcouru dans l'instant dt se nomme *travail élémentaire* ou *élément de travail* de cette force. L'élément de travail est considéré comme positif lorsque la force tangentielle agit dans le sens du mouvement, et comme négatif dans le cas contraire, ou, ce qui

revient au même, suivant que l'angle ω est aigu ou obtus. Le signe du travail élémentaire sera donné par l'expression $P\cos\omega ds$, en considérant P et ds comme positifs.

Le travail élémentaire est égal au produit de la force par la projection de l'élément du chemin parcouru sur la direction de cette force.

265. Le travail élémentaire de la résultante de plusieurs forces est égal à la somme algébrique des travaux élémentaires de ces forces.

266. On nomme *travail total* d'une force P pour un chemin déterminé AB l'intégrale $\int T ds$, prise entre les limites qui correspondent aux extrémités de l'arc parcouru. Les forces normales à la trajectoire n'influent pas sur le travail total.

267. Relation entre le travail et la force vive. — L'accroissement de force vive d'un mobile, lorsqu'il passe d'une position à une autre, est égal au double du travail de la force motrice.

268. Si la force P est la résultante de plusieurs forces $P_1, P_2, \ldots$, dont les composantes tangentielles sont $T_1, T_2, T_3, \ldots$, on aura

$$mv^2 - mk^2 = 2\left(\int T_1 ds + \int T_2 ds + \ldots\right).$$

On appelle *forces mouvantes* celles qui font un angle aigu avec la tangente, et *forces résistantes* celles qui font un angle obtus et dont l'effet est de retenir le mobile dans son mouvement sur la courbe.

L'accroissement de force vive d'un mobile, lorsqu'il passe d'une position à une autre, est égal au double de l'excès du travail des forces mouvantes sur le travail des forces résistantes.

269. Conséquences du principe des forces vives. — Quand le mobile n'est sollicité par aucune force ou qu'il l'est seulement par des forces toujours normales à la trajectoire, le mouvement est uniforme.

270. Lorsque $X dx + Y dy + Z dz$ est la différentielle exacte d'une fonction $f(x, y, z)$ de trois coordonnées x, y, z considérées comme des variables indépendantes, l'accroissement de force vive, lorsque le mobile passe de la position (a, b, c) à la position (x, y, z), ne dépend pas de la trajectoire dans l'intervalle, ni du temps qui s'est écoulé entre les deux positions extrêmes, mais seulement des coordonnées de ces deux positions.

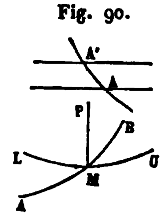
271. Plus généralement, si l'on imagine les deux surfaces

$$f(x, y, z) = C', \quad f(x, y, z) = C'',$$

et que le mobile rencontre la première au point (a, b, c) et la seconde au point (x, y, z), l'accroissement de force vive est constant et indépendant de la forme de la trajectoire entre les deux surfaces, des points où cette courbe rencontre ces deux surfaces et du temps qui s'est écoulé.

On trouve un résultat de ce genre dans le mouvement d'un mobile sollicité seulement par la pesanteur.

Fig. 90.



272. L'équation

$$f(x, y, z) = C$$

représente une infinité de surfaces différentes, passant par les divers points de la trajectoire AMB. Si LMU est l'une de ces surfaces, la force motrice P au point M lui est normale.

273. Cas où il y a une résistance. — Quand un mobile éprouve un frottement ou se meut dans un milieu résistant, l'expression $X dx + Y dy + Z dz$ n'est plus une différentielle exacte.

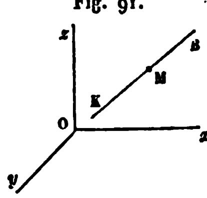
274. Dans ce cas, si le point se meut sur une courbe connue, il faudra prendre l'équation

$$m\frac{dv}{dt} = T \quad \text{ou} \quad m\frac{d^2 x}{dt^2} = T,$$

T désignant la composante de la force motrice (y compris les résistances) suivant la tangente. Au moyen des équations de la courbe on pourra exprimer T en fonction de s, et alors la détermination du mouvement sera ramenée à l'intégration d'une équation différentielle du second ordre, tandis que si $X dx + Y dy + Z dz$ était une différentielle exacte, on n'aurait à intégrer qu'une équation différentielle du premier ordre.

275, 276. Cas où le mobile est sollicité par des forces dirigées vers des centres fixes. — L'expression $X dx + Y dy + Z dz$ est toujours une différentielle exacte, quand un point matériel est sollicité par des forces dirigées vers des centres fixes et dont les intensités sont des fonctions des distances du mobile à ces différents centres. Supposons qu'une force dirigée vers le centre fixe K (e, f, g) repousse un point

Fig. 91.



M (x, y, z), avec une énergie R, fonction seulement de la distance MK $= r$. La partie de $X dx + Y dy + Z dz$ provenant de cette force sera $R dr$.

Si le mobile est sollicité par un certain nombre de forces R, R′, R″...., dirigées à chaque instant vers des centres fixes K, K′, K″,..., on aura

$$dmv^2 = 2(\pm R dr \pm R' dr \pm \ldots),$$

et chaque terme du second membre étant une différentielle exacte, il en sera de même de leur somme.

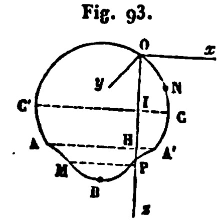
La même conséquence aura lieu si l'un des centres s'éloigne à l'infini, c'est-à-dire si la force correspondante est perpendiculaire à un plan donné et fonction de la distance du point à ce plan.

VINGT-DEUXIÈME LEÇON.

MOUVEMENT D'UN POINT PESANT SUR UNE COURBE. PENDULE SIMPLE.

277. MOUVEMENT D'UN POINT PESANT SUR UNE COURBE. — Lorsqu'un point pesant se meut sur une courbe donnée AMA′, si le mobile part du point A sans vitesse, la vitesse acquise par le mobile au point M sera la même que s'il était tombé librement de la hauteur HP.

Fig. 93.



Si B est le point le plus bas de la courbe, le mobile aura la plus grande vitesse en ce point. Parvenu là, il continuera sa route en vertu de la vitesse acquise, et s'élevant sur la partie BC avec une vitesse décroissante, il s'arrêtera au point A′, pour lequel $z = h$. Mais aussitôt, sollicité par la pesanteur, il descendra de nouveau sur la courbe pour revenir au point A, et il parcourra continuellement le même arc ABA′, tantôt dans un sens, tantôt dans un autre.

278. Le temps employé par le mobile pour parcourir l'arc AM est le même, soit qu'il descende, soit qu'il monte. Les oscillations du mobile sont isochrones.

279. CAS OU LE MOBILE A UNE VITESSE INITIALE. — Si au point A, pour lequel $z = h$, le mobile a une vitesse k, le mobile s'élève sur l'arc BCO plus haut que le point A′.

un certain parallèle sur lequel l'attraction terrestre a pour mesure $\frac{fm}{r^2}$. De plus la composante verticale de la force centrifuge a pour mesure sur le même parallèle une fraction $\frac{\cos^2\lambda}{289} = \frac{2}{3}\frac{1}{289}$ de la gravité. Il faut ajouter cette composante à g, d'où

$$\frac{M}{m} = \frac{4\pi^2 a^3}{G r^2 T^2} - 1,$$

en appelant M la masse du soleil, a le demi grand axe de l'orbite apparente de la terre autour du soleil, T le nombre de secondes contenu dans une année, et G l'attraction du sphéroïde terrestre sur l'unité de masse d'un corps placé sur le parallèle considéré.

336, 337. On conclut de là le rapport de la densité moyenne du soleil à celle de la terre et la pesanteur à la surface du soleil.

338. Masse d'une planète dépourvue de satellites. — On a

$$\frac{4\pi^2 a'^3}{T'^2} = G r^2 \left(\frac{M}{m} + \frac{m'}{m}\right).$$

On tire de cette équation $\frac{m'}{m}$, ou le rapport de la masse de la planète à celle de la terre.

FIN DU PREMIER VOLUME

ÉNONCÉS DE PROBLÈMES [1].

STATIQUE (Ire Partie).

1. Position d'équilibre d'un point attiré vers des centres fixes par des forces proportionnelles à la distance. SG.

2. Position d'équilibre d'un point attiré vers les trois sommets d'un triangle par des forces constantes qui sont entre elles dans les mêmes rapports que les côtés du triangle opposés aux sommets dont elles émanent respectivement. SG.

3. Un fil inextensible et sans poids est fixé à ses extrémités A, B et porte un petit anneau pesant C; un autre fil a aussi une extrémité fixée en A, passe dans l'anneau C et porte un poids à sa seconde extrémité, qui est libre : figure d'équilibre du système. PJ.

4. Position d'équilibre d'un point attiré vers des points fixes d'un plan par des forces inversement proportionnelles aux distances. En déduire la position d'équilibre d'un point pesant attiré vers deux points fixes égaux, situés sur une horizontale, les attractions étant réciproques aux distances. SG.

5. Un fil sans masse est attaché à une de ses extrémités A; il porte un poids P, fixé sur lui à une distance connue de A, puis il passe sur une poulie très mobile située à la même hauteur que A et porte à sa seconde extrémité libre un poids Q : figure d'équilibre du système. SG.

6. Un fil qui passe sur une poulie très mobile porte à ses extrémités deux poids dont l'un est libre, l'autre repose sur un plan incliné poli : figure d'équilibre, tension du fil, charge du plan. PJ.

---

[1] Les problèmes qui se trouvent développés dans le Recueil d'exercices de M. de Saint-Germain sont suivis de l'indication SG., ceux qui sont traités dans le Recueil du P. Jullien sont désignés par les initiales PJ.

7. Un poids est assujetti à rester sur une ellipse polie dont un axe est vertical et exerce sur le poids une action répulsive horizontale, proportionnelle à la distance du point à l'axe; position d'équilibre, pression sur la courbe. SG.

8. Position d'équilibre d'un petit poids assujetti à rester sur une hélice dont l'axe est vertical; un point de cet axe exerce sur le point mobile une répulsion réciproque au carré de la distance. SG.

9. Position d'équilibre d'un point pesant placé sur un ellipsoïde dont un axe est vertical et dont le centre attire le point avec une intensité constante. SG.

10. Quand un point sollicité par des forces connues est placé sur une courbe ou une surface telle que le point y soit partout en équilibre, on peut appeler ces lieux *courbes* ou *surfaces de niveau*. Cela posé, on propose de déterminer : 1° dans un plan vertical, une courbe de niveau pour un point pesant repoussé d'une verticale de ce plan par une force horizontale, proportionnelle à la distance du point à l'axe; 2° sur une sphère, une courbe de niveau pour un point pesant attiré vers l'extrémité d'un diamètre horizontal par une force réciproque au cube de la distance; 3° une surface de niveau pour un point pesant sollicité par une force constante qui passe par un point fixe. SG.

11. Deux points pesants sont posés sur deux plans inclinés dont l'intersection est horizontale; ils sont réunis par un fil qui passe sur une petite poulie très mobile située au-dessus de l'intersection : position du système quand il est près de glisser dans un sens ou dans l'autre. PJ.

12. Un point pesant repose sur un plan incliné dépoli : quelle est l'intensité de la force qu'on doit appliquer au point dans une direction quelconque donnée pour le faire glisser? Discussion. SG.

13. Un point pesant est placé sur une parabole dont l'axe est vertical, la convexité tournée vers le haut, et qui exerce un frottement dont le coefficient est $\frac{3}{5}$; le point est attiré vers le foyer par une force réciproque au carré de la distance et qui serait égale au poids si le point était au sommet : quel est le point de la parabole où le glissement est près de se produire? SG.

14. Sur un paraboloïde $xy = az$, l'axe des z étant vertical, repose un point qui, outre son poids P, est sollicité par une force

horizontale dont les projections sur l'axe des x et l'axe des y sont $\frac{Px}{a}$, $\frac{Py}{a}$, et la surface du paraboloïde est dépolie : lieu des points où le mobile est près de glisser dans le sens de la pesanteur. SG.

15. Plusieurs forces parallèles sont appliquées en des points donnés : montrer que, si l'un des points d'application se déplace suivant une certaine courbe, le centre des forces parallèles décrira une courbe homothétique. Horloge magique. PJ.

16. Trois hommes doivent porter une plaque homogène ayant la forme d'un parallélogramme ABCD, A et C étant opposés ; un des hommes soutient la plaque par le sommet A : trouver sur CB et CD deux points tels que, si les deux autres porteurs les soutiennent, les trois hommes seront également chargés. PJ.

17. Aux quatre sommets d'un tétraèdre on applique des forces parallèles et proportionnelles aux aires des faces opposées : point d'application de la résultante. SG.

18. Aux sommets d'un triangle ABC on applique trois forces parallèles respectivement égales : 1° à $\tang A$, $\tang B$, $\tang C$; 2° à $\frac{\sin A}{\cos B \cos C}$, $\frac{\sin B}{\cos C \cos A}$, $\frac{\sin C}{\cos A \cos B}$: trouver le centre des deux systèmes de trois forces, le centre des six forces parallèles, et du résultat obtenu déduire que le centre du cercle circonscrit à ABC, le point de concours des hauteurs et celui des médianes sont en ligne droite. Applications de la Statique à la démonstration de théorèmes de Géométrie. SG.

19. Un vase hémisphérique très mince repose par sa partie convexe sur un plan horizontal et porte deux poids donnés aux extrémités de deux rayons perpendiculaires : position d'équilibre. SG.

20. Décomposer une force en trois forces parallèles appliquées en des points donnés. Où doit-on placer trois poids connus sur une circonférence pour que leur résultante soit appliquée au centre du cercle ? SG.

21. Une table parfaitement rigide est portée par plus de trois pieds qui reposent sur un plan horizontal indéformable : la table étant chargée d'un poids, déterminer les charges des différents pieds, en admettant que ceux-ci se raccourcissent de quantités très petites et proportionnelles à la charge qu'ils supportent. SG.

22. Le centre de gravité d'un polyèdre circonscrit à une sphère,

le centre de gravité de la surface polyédrale et le centre de la sphère sont en ligne droite. PJ.

23. Centre de gravité d'un arc de sinusoïde, de l'arc qui forme une demi-boucle de la lemniscate de Bernoulli. PJ.

24. Centre de gravité d'un arc de chaînette homogène, d'un arc de cardioïde ($r = a + a\cos\theta$), d'un arc d'hélice dont l'axe est l'axe des z et la densité représentée par e^{-mz}. SG.

25. Déterminer une courbe plane passant par l'origine, de manière que la densité de l'arc soit représentée par une fonction $f(s)$, s étant la longueur de l'arc à partir de l'origine, et l'ordonnée du centre de gravité de cet arc entier s soit égale à $\varphi(s)$; cas où $f(s) = as^m$, $\varphi(s) = \alpha s^\mu$. SG.

26. Centre de gravité de l'aire comprise entre la cissoïde et son asymptote, de l'aire circonscrite par la courbe $xy^2 = b^2(a-x)$, d'un secteur parabolique compris entre la courbe et deux rayons vecteurs issus du foyer, de l'aire comprise entre une branche de sinusoïde et l'axe des x. PJ.

27. Centre de gravité de l'aire comprise entre un arc d'ellipse, le diamètre qui aboutit à une extrémité de l'arc et la corde conjuguée passant à l'autre extrémité; en déduire le centre de gravité d'un segment parabolique. SG.

28. Centre de gravité d'une demi-boucle de la lemniscate de Bernoulli. SG.

29. Déterminer une courbe plane telle que le centre de gravité de l'aire comprise entre la courbe, les axes et une ordonnée $x = h$ ait pour abscisse $\frac{ah}{a+h}$. SG.

30. Établir la relation qui existe entre les aires de quatre triangles ayant pour bases les côtés d'un quadrilatère, et pour sommet commun le centre de gravité de l'aire du quadrilatère. SG.

31. Centre de gravité d'une zone de paraboloïde de révolution limitée par un plan perpendiculaire à l'axe, de la surface d'un hémisphère où la densité en chaque point est proportionnelle à sa distance à la base. PJ.

32. Considérons l'enveloppe de la surface représentée par l'équation

$$\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} = a\,\mathrm{l}.\frac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{a}.$$

α et β étant deux paramètres liés par une relation donnée : le volume compris entre cette surface, le plan xy et un cylindre parallèle à l'axe des z aura un centre de gravité dont l'ordonnée sera la moitié de celle qui correspond à l'aire interceptée par le cylindre dans la surface. PJ.

33. Centre de gravité d'une surface sphérique quelconque, triangle sphérique, surface de Viviani. SG.

34. Centre de gravité de la portion de l'aire du paraboloïde $2z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}$ comprise entre les plans des zx et des zy et le cylindre $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. SG.

35. Centre de gravité du volume engendré par l'aire comprise entre une parabole, son axe et une ordonnée perpendiculaire, qu'on fait tourner autour de la tangente au sommet. PJ.

36. Centre de gravité du volume engendré par la révolution : 1° d'une boucle de strophoïde autour de son axe ; 2° d'un segment compris entre une parabole et deux rayons vecteurs, autour de l'axe de la parabole. SG.

37. Centre de gravité du volume compris entre les parties positives des plans coordonnés rectangulaires et les surfaces de deux cylindres

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \qquad \text{(SG.)}$$

38. Volume et centre de gravité de l'espace compris entre le plan des xy, celui des xz, le cylindre $x^2 + y^2 - ax = 0$ et la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$; la courbe d'intersection est la courbe de Viviani. SG.

39. Il existe un grand nombre de solides terminés par deux faces planes parallèles et tels que l'aire d'une section parallèle à ces plans s'exprime par une fonction du second degré de sa distance à l'une des faces ; soient h la hauteur, B, B', β les aires des faces et de la section moyenne : le volume est

$$\frac{1}{6} h (B + B' + 4\beta),$$

et le rapport des distances du centre de gravité à la face B et à la face B' est celui de $B' + 2\beta$ à $B + 2\beta$. SG.

40. Centre de gravité du volume compris entre le plan des zx, la sphère $x^2+y^2+z^2=a^2$ et le paraboloïde $x^2+y^2=a^2-2az$. PJ.

41. Centre de gravité du volume compris entre les parties positives des plans coordonnés rectangulaires et le paraboloïde

$$abz=c(x-a)(y-b). \qquad \text{(PJ.)}$$

42. Attraction d'une droite homogène sur un point, l'attraction étant en raison inverse du carré de la distance. SG.

43. Attraction d'un ellipsoïde sur un point intérieur ou extérieur, l'attraction s'exerçant en raison inverse de la quatrième puissance de la distance. SG.

44. Toutes les molécules d'un hémisphère homogène sont douées d'un pouvoir attractif suivant la loi newtonienne : en quel point de l'axe de symétrie doit-on placer un point soumis à l'attraction pour qu'il reste en équilibre? PJ.

45. Déterminer la forme d'un solide de volume donné, de manière qu'il exerce sur un point donné une attraction maximum, l'attraction étant suivant la loi newtonienne. PJ.

46. La loi d'attraction de Newton est la seule avec laquelle une couche sphérique homogène soit sans action sur un point intérieur. SG.

47. Trouver toutes les lois d'attraction qui ne dépendent que de la distance et avec lesquelles une sphère attire un point extérieur, comme si la masse était concentrée au centre. PJ.

48. Action d'un anneau sur un autre situé dans le plan du premier et passant par son centre; l'attraction est réciproque au cube de la distance. SG.

49. Calculer le potentiel d'une masse sphérique indéfinie où la densité est e^{-r} à la distance r du centre. SG.

50. Un point est en équilibre au centre d'un octaèdre régulier dont les six sommets ont des masses égales, et attirent proportionnellement à la puissance n de la distance : calculer l'attraction subie par le mobile quand on l'écarte très peu de sa position d'équilibre, et dire pour quelles valeurs de n l'équilibre est stable ou non. SG.

51. Un ellipsoïde de révolution homogène, légèrement aplati,

exerce sur un point de sa surface une attraction représentée par un terme constant et un terme proportionnel au carré du sinus de la latitude : application à la Terre. PJ.

52. Considérons un ellipsoïde dont les axes sont assez peu différents pour qu'on néglige les quatrièmes puissances de l'excentricité des sections principales, et une sphère concentrique et de même volume : les deux solides, supposés homogènes et de même densité, exercent la même attraction sur les points d'intersection de leurs surfaces. PJ.

DYNAMIQUE (Iʳᵉ Partie).

(A partir de la XIIᵉ Leçon de Sturm.)

53. Un mobile est attiré vers un centre fixe par une force proportionnelle à la puissance $n^{\text{ième}}$ de la distance : trouver la valeur de n, telle que le mobile partant d'une distance infinie arrive à la distance c du centre d'attraction avec la même vitesse qu'il aurait à la distance $\frac{c}{4}$ s'il était parti sans vitesse de la distance c. PJ.

54. Un point matériel attiré vers les quatre sommets d'un carré par des forces qui ne dépendent que de la distance est éloigné à une petite distance du centre sur une diagonale : durée des petites oscillations qu'il exécute. PJ.

55. Mouvement d'un point tiré du repos par une force émanant d'un centre fixe et réciproque au cube de la distance : la loi du mouvement peut-elle toujours être représentée par la même intégrale? SG.

56. Mouvement d'un point qui reste sur la droite joignant deux centres d'attraction et qui est attiré vers chacun d'eux suivant la loi newtonienne; application à un corps qui se mouvrait entre la Terre et la Lune. SG.

57. Mouvement d'un point attiré proportionnellement à la distance par un centre d'action qui se déplace d'un mouvement rectiligne et uniformément accéléré; le point étudié est d'abord en repos. PJ.

58. Deux points ont un mouvement uniformément varié suivant deux droites quelconques; minimum de leur distance. PJ.

59. Une bille parfaitement élastique tombe d'une hauteur connue sur un plan horizontal : calculer la hauteur à laquelle elle rebondit après avoir touché n fois le plan, en admettant que l'air offre une résistance au mouvement proportionnelle au carré de la vitesse. PJ.

60. Mouvement rectiligne d'un point matériel attiré vers un centre fixe en raison inverse du cube de la distance; le centre est entouré d'une atmosphère dont la densité varie en raison inverse du cube de la distance au centre, et qui présente une résistance proportionnelle à sa densité et au carré de la vitesse. PJ.

61. Mouvement rectiligne d'un point attiré proportionnellement à la distance vers un centre d'action qui se meut uniformément dans un milieu homogène dont la résistance est proportionnelle au carré de la vitesse. PJ.

62. Mouvement vertical d'un point pesant, en supposant la résistance de l'air proportionnelle au cube de la vitesse. SG.

63. Un mobile se meut dans un milieu homogène résistant en proportion du carré de la vitesse : déterminer suivant quelle loi il doit être attiré vers un point fixe pour qu'il l'atteigne dans un temps constant, quelle que soit la distance d'où il part sans vitesse. SG.

64. Étant donnés deux axes rectangulaires, un mobile M situé d'abord sur OX se meut de telle sorte que son ordonnée ainsi que l'angle MOX croissent proportionnellement au temps : déterminer la trajectoire, la tangente et le rayon de courbure en chaque point. SG.

65. Un point parcourt avec une vitesse constante 1° une lemniscate de Bernoulli, 2° une loxodrome sphérique : déterminer l'accélération et le rayon de courbure en chaque point de la trajectoire. SG.

66. Démontrer qu'un point attiré vers les deux foyers d'une hyperbole suivant la loi de Newton peut décrire cette courbe si on lui suppose au sommet une vitesse convenable : déterminer la loi du mouvement correspondant. SG.

67. Quand un point décrit une trajectoire plane sous l'action d'une force toujours dirigée vers le centre de courbure de la développée, l'aire comprise entre la trajectoire, un rayon de courbure fixe, un autre variable et l'arc correspondant de développée croît proportionnellement au temps. SG.

68. Si la parabole décrite par un point pesant dans le vide coupe

une droite en deux points A et B, les vitesses du mobile en ces deux points, estimées suivant une perpendiculaire à AB, sont égales et de sens contraires. PJ.

69. Un point décrit une parabole sous l'action de deux forces; l'une, perpendiculaire à l'axe, est proportionnelle à la distance du mobile à cet axe; l'autre est parallèle à l'axe, mais on demande de trouver sa valeur, ainsi que la loi du mouvement. PJ.

70. Une bille parfaitement élastique est lancée avec une vitesse connue d'un certain point d'un plan incliné sur lequel elle rebondit en faisant des angles d'incidence et de réflexion égaux : trouver la distance du $n^{\text{ième}}$ point de rencontre au point de départ. PJ.

71. Un point décrit une ellipse sous l'action d'une force parallèle au petit axe : grandeur de la force et loi du mouvement. PJ.

72. Mouvement d'un point attiré vers une droite fixe par une force inversement proportionnelle au carré de la distance; la vitesse initiale est parallèle à la droite. SG.

73. Mouvement de deux points qui s'attirent proportionnellement à la distance, et dont l'un est libre, l'autre obligé de rester sur une droite fixe. Cas où la masse du point libre est triple de celle du second, les vitesses initiales étant nulles, et la droite fixe exerçant un frottement. SG.

74. Mouvement d'un point M attiré en raison directe de la distance vers un centre d'action qui parcourt un cercle avec une vitesse angulaire ω; M ne sort pas du plan du cercle. Cas où l'attraction est égale à la distance multipliée par ω^2 et où M est d'abord immobile au centre du cercle. SG.

75. Un corps pesant est soumis à l'action d'une force variable, mais toujours tangentielle : déterminer la grandeur de cette force de manière que la vitesse soit constante; courbe décrite par le mobile. SG.

76. Mouvement d'un point pesant sur un plan incliné dépoli; discussion. SG.

77. Un mobile décrit une ellipse sous l'action d'une force toujours dirigée vers un point fixe du plan : calculer la loi de cette force; cas particuliers. SG.

78. Un point décrit la podaire, lieu des projections du centre d'une conique sur ses tangentes, sous l'action d'une force dirigée vers le centre : exprimer la valeur de cette force en fonction du rayon vecteur; rayon de courbure de la podaire. SG.

79. Un point se meut de manière que sa vitesse soit proportionnelle à la puissance $n^{\text{ième}}$ de son rayon vecteur et que la vitesse aréolaire de ce rayon soit constante : étudier le mouvement. SG.

80. Un point décrit une parabole sous l'action d'une force qui passe constamment au point de rencontre de la directrice et de l'axe : valeur de cette force, loi du mouvement. PJ.

81. Un point décrit une parabole sous l'action d'une force dirigée vers le foyer ; à un moment donné, la force attractive se trouve doublée : déterminer la nouvelle trajectoire. PJ.

82. Un point matériel posé sur un plan horizontal poli est attaché à un point fixe de ce plan par un fil très mince qui peut s'allonger légèrement et exerce alors une traction proportionnelle à l'allongement. Le fil étant d'abord rectiligne, mais sans tension, on imprime au point mobile une vitesse perpendiculaire au fil : étudier le mouvement résultant. PJ.

83. Un point est attiré vers un centre fixe par une force proportionnelle à la distance : étudier le lieu formé par sa trajectoire quand, la vitesse initiale ayant une grandeur connue, on lui donne toutes les directions comprises dans un certain plan. SG.

84. Mouvement d'un point sollicité par deux forces émanant d'un centre fixe ; l'une, attractive, est proportionnelle à la distance, l'autre, répulsive, en raison inverse du cube de cette distance. Cas où à l'instant initial ces deux forces se détruisent et où la vitesse est perpendiculaire au rayon vecteur. SG.

85. Un mobile est attiré vers un centre fixe avec une intensité fonction de la distance : trouver quelle doit être la forme la plus générale de cette fonction pour que la trajectoire soit toujours une courbe fermée, quelle que soit la direction de la vitesse initiale, dont la grandeur doit seulement rester entre certaines limites. SG.

86. Déterminer la constante de l'attraction universelle d'après le mouvement planétaire ; mouvement parabolique des comètes : l'intervalle de temps mis par une comète pour passer d'une position à une autre peut s'exprimer en fonction de la distance de ces deux positions et des rayons vecteurs correspondants (théorème de Lambert). SG.

87. Dans le mouvement elliptique ou hyperbolique déterminé par l'attraction du foyer, l'intervalle de temps mis par le mobile pour passer d'une position à une autre peut s'exprimer au moyen de la distance des deux positions, des deux rayons vecteurs et de l'axe focal de l'orbite. PJ.

88. Dans le mouvement elliptique, calculer la plus grande équation du centre, et, réciproquement, développer l'excentricité en série suivant les puissances de cette équation. PJ.

89. Mouvement d'un point attiré vers un centre fixe par deux forces réciproques, l'une au carré, l'autre au cube de la distance; quand cette seconde force est petite, la trajectoire peut s'obtenir en faisant décrire au mobile une ellipse qui tournerait autour de son foyer. PJ.

90. Un point pesant se meut dans un milieu dont la résistance est proportionnelle à la densité et au carré de la vitesse; la trajectoire est une circonférence : trouver la loi du mouvement et celle de la variation de la densité du milieu. PJ.

91. Mouvement d'un point M attiré vers un centre O avec une force $\frac{mr^3}{c^2}$, où $r = \text{OM}$; la distance initiale est a, la vitesse initiale $\frac{a^2}{c}$ fait l'angle aigu α avec la droite MO; enfin le point O est entouré d'un milieu non homogène exerçant une résistance égale à $\frac{3m\cos\alpha}{r}v^2$. SG.

92. Un point attiré vers un centre fixe en raison directe de la $n^{\text{ième}}$ puissance de la distance se meut dans un milieu dont la résistance est proportionnelle à la densité et au carré de la vitesse: sachant que la trajectoire est une circonférence qui passe au point attirant, trouver la loi de la densité et celle du mouvement. PJ.

93. On peut considérer des accélérations d'ordre supérieur telles que l'accélération du $(n-1)^{\text{ième}}$ ordre ait pour projections sur les axes

$$\frac{d^n x}{dt^n}, \quad \frac{d^n y}{dt^n}, \quad \frac{d^n z}{dt^n};$$

on propose de calculer les projections de ces suraccélérations sur la tangente à la trajectoire, la normale principale, l'axe du plan osculateur. SG.

94. Mouvement d'un point de masse 1 assujetti à rester sur l'intersection des deux surfaces $z^2 = 2ax$, $9y^2 = 16xz$, et sollicité par une force dont les composantes rectangulaires sont

$$X = 4k^2x, \quad Y = \frac{9}{2}k^2y, \quad Z = 2k^2(a + 3z);$$

le point est d'abord à l'origine et lancé vers le haut et en avant du plan des xz avec la vitesse ak. SG.

95. Un point obligé de rester sur une spirale logarithmique est attiré vers le pôle par une force réciproque au carré de la distance : loi du mouvement, v_0 étant nul. PJ.

96. Deux points pesants réunis par une tige rigide et sans masse sont obligés de rester sur deux droites situées dans le même plan vertical : petites oscillations du système quand on l'écarte légèrement de sa position d'équilibre. PJ.

97. On donne une série de courbes homothétiques, par exemple une série de cycloïdes ayant un point de rebroussement commun, où elles admettent une même tangente qui est verticale ; sur chacune de ces courbes on laisse tomber sans vitesse initiale un point pesant à partir du point commun : lieu des positions des divers mobiles à une même époque (courbe synchrone). PJ.

98. On donne une ellipse dont le grand axe est vertical et un point pesant placé dans son intérieur à une extrémité du petit axe : déterminer avec quelle vitesse on doit le lancer pour qu'après s'être détaché de l'ellipse il décrive un arc parabolique passant au centre de l'ellipse. PJ.

99. Un point assujetti à parcourir une ellipse est attiré vers le centre par une force proportionnelle à la distance et vers les deux foyers par des forces réciproques au carré de la distance : montrer que la pression exercée sur la courbe est réciproque au rayon de courbure ; examiner la valeur initiale de la vitesse qui rendrait la pression toujours nulle et interpréter les trois parties dont se compose le carré de cette vitesse. SG.

100. Un point non pesant, assujetti à rester sur une circonférence, est attiré vers un point de cette courbe par une force fonction de la distance : déterminer cette fonction de manière que la pression exercée sur le cercle soit constante ; nature du mouvement produit. SG.

101. On donne dans un plan vertical une cycloïde à base horizontale, tournant sa convexité vers le bas et engendrée par un cercle de rayon a ; un fil sans masse, de longueur $6a$, est fixé par un bout au point de rebroussement de la cycloïde et porte à son autre extrémité une petite masse à laquelle on donne une vitesse horizontale $\sqrt{8ga}$; mouvement du système, tension du fil. SG.

102. Deux masses pesantes se meuvent sur un cercle vertical de manière que leurs vitesses au point le plus bas soient égales : montrer que la corde qui joint les positions simultanées des deux pen-

dules enveloppe un cercle; interprétation de l'intégrale de l'équation d'Euler donnée par Jacobi. Remarquer que, s'il existe un polygone inscrit à un cercle et circonscrit à un autre, il en existe une infinité. SG.

103. Courbe sur laquelle il faut laisser glisser un point pesant pour qu'il descende de hauteurs égales dans des temps égaux; on donne la vitesse initiale, qu'on suppose dirigée verticalement. PJ.

104. Un point pesant reçoit une vitesse horizontale connue et dirigée vers un point O : quelle est la courbe sur laquelle on doit l'obliger à rester pour que sa distance au point O décroisse uniformément? PJ.

105. Sur quelle courbe doit-on faire mouvoir un point attiré vers un centre fixe proportionnellement à la distance pour que le rayon vecteur issu du centre attractif tourne uniformément? PJ.

106. Déterminer dans un plan vertical une courbe telle qu'un point pesant, obligé de la parcourir et lancé avec une vitesse a, exerce une pression proportionnelle à la $n^{ième}$ puissance de sa distance à l'horizontale située à la distance $\frac{a^2}{2g}$ au-dessus du point de départ. PJ.

107. Déterminer dans un plan vertical une courbe telle qu'un point pesant assujetti à la suivre exerce une pression proportionnelle à la composante normale du poids; cas d'intégrabilité. SG.

108. Déterminer dans un plan vertical une courbe qui éprouve une pression constante de la part d'un point pesant obligé de la suivre et animé d'abord d'une vitesse horizontale connue; étudier complètement la forme de la courbe. SG.

109. Trouver une courbe plane telle qu'un point obligé de la suivre, partant sans vitesse d'un point O, mais attiré vers un centre connu proportionnellement à la distance, arrive en un point quelconque M de la courbe dans le même temps que s'il s'était mû sur la droite OM. SG.

110. Déterminer sur une surface quelconque la courbe tautochrone pour un point sollicité par des forces connues : la composante tangentielle de la force motrice doit être égale à la force qui produirait un mouvement rectiligne tautochrone. SG.

111. Déterminer dans un plan une courbe tautochrone pour un mobile attiré vers un point du plan en raison directe de la distance ou en raison inverse de son carré. SG.

112. Déterminer dans un plan vertical une courbe tautochrone pour un point pesant qui éprouve de la part du milieu ambiant une résistance proportionnelle au carré de la vitesse. SG.

113. Étant donnés deux axes rectangulaires, déterminer dans leur plan les courbes tautochrones pour un point attiré vers OX par une force égale à ky^n; l'extrémité des arcs parcourus est l'origine. PJ.

114. Quand on considère un mobile qui doit rester dans un plan et qui est sollicité par une force dont les composantes sont les dérivées partielles d'une même fonction, on peut, sans l'emploi du calcul des variations, démontrer que dans la brachistochrone la pression exercée sur la courbe est double de la composante normale de la force motrice. SG.

115. Déterminer la brachistochrone : 1° pour un point pesant; 2° pour un point mobile dans un plan et attiré vers un de ses points en raison inverse du carré de la distance. SG.

116. Calculer l'amplitude et la durée des petites oscillations d'un pendule circulaire en supposant la résistance de l'air en raison du carré de la vitesse. PJ.

117. Calculer l'expression la plus générale de la force tangentielle dans le mouvement tautochrone. PJ.

118. Déterminer dans un plan vertical une courbe telle qu'un point pesant obligé de la suivre et éprouvant une résistance proportionnelle au carré de sa vitesse, après avoir été lancé d'un point de la courbe avec une vitesse convenable, arrive en un point quelconque avec une vitesse égale à celle qu'il acquerrait en tombant, dans le même milieu, d'une hauteur égale à l'arc qui le sépare d'un second point fixé sur la courbe. PJ.

119. On donne une cycloïde dépolie dont l'axe est vertical et la convexité tournée vers le haut : déterminer le mouvement d'un point pesant posé sur cette courbe et ayant au sommet une vitesse donnée ; point où le mobile s'arrête ou s'échappe. SG.

120. Mouvement d'un point pesant sur une hélice dépolie tracée sur un cylindre de révolution à axe vertical ; discuter les divers cas d'après la vitesse initiale. SG.

121. Mouvement d'un point pesant obligé de rester sur un cylindre droit à axe vertical et attiré vers un point fixe par une force proportionnelle à la distance. SG.

122. Mouvement d'un point non pesant assujetti à rester sur la surface d'un cône droit et attiré vers l'axe par une force qui lui est perpendiculaire et varie en raison directe de la distance du mobile à l'axe. Cas où le demi-angle du cône est de 30 degrés. SG.

123. Mouvement d'un point pesant sur un paraboloïde de révolution dont l'axe est vertical et la convexité tournée vers le bas; la différence d'azimut d'un maximum et du minimum qui le suit est $> \frac{\pi}{2}$; théorème analogue de M. Puiseux sur le pendule; loi des petites oscillations. Tautochrone sur la surface. SG.

124. D'un point pris à volonté sur un méridien d'une surface de révolution à axe vertical, on lance un point pesant suivant la tangente au parallèle avec une vitesse qui est fonction connue des coordonnées du point de départ. Déterminer la surface de manière que le mobile assujetti à rester dans son intérieur décrive toujours un parallèle. PJ.

125. Trouver une surface passant par une courbe donnée, une hélice par exemple, et telle qu'un point pesant parcoure cette courbe quand on le pose sur la surface, en un point de la courbe, et qu'on lui imprime une vitesse convenable. PJ.

126. Déterminer toutes les surfaces telles qu'un point pesant abandonné sans vitesse en un quelconque de leurs points et obligé de rester sur la surface glisse toujours le long d'une ligne de plus grande pente. SG.

127. Trouver l'équation et la forme des lignes géodésiques 1° sur une surface de révolution, 2° sur un ellipsoïde : une ligne géodésique est la trajectoire d'un point qui n'est soumis à aucune force extérieure. SG.

128. Le mouvement relatif d'un point est identique au mouvement absolu qu'il prendrait si aux forces qui agissent réellement sur lui on ajoutait deux forces fictives : la première égale et de sens contraire à celle qui produirait le mouvement d'un point égal au point donné, coïncidant avec lui à l'époque considérée, mais ne bougeant plus par rapport au système de comparaison; la seconde est égale au double produit de la vitesse relative par la vitesse de rotation du mouvement d'entraînement et par le sinus de l'angle de la vitesse relative et de l'axe de la rotation; elle est perpendiculaire à ces deux droites et à gauche de la première par rapport à la seconde. SG.

129. Un point pesant est assujetti à se mouvoir sur une courbe qui tourne autour d'une verticale avec une vitesse constante : déterminer la courbe de manière que le point se meuve suivant une loi donnée. PJ.

130. Un point décrit une orbite connue sous l'action d'une force émanant d'un centre fixe O : quelle force faudrait-il adjoindre à la force donnée pour que, sans changer aux diverses époques la distance du mobile au point O, la vitesse angulaire de son rayon vecteur augmente seule dans une proportion constante et connue? PJ.

131. Mouvement d'un point pesant assujetti à rester sur une droite qui tourne uniformément autour d'un axe vertical non situé dans le même plan. PJ.

132. Même question en supposant l'axe de rotation horizontal. SG.

133. Une horizontale CA est liée invariablement à un axe vertical AB ; à l'extrémité C s'articule une tige qui peut prendre toutes les directions dans le plan ABC, mais qui coupe AC et qui se termine par une boule très lourde : forme d'équilibre quand le plan ABC tourne uniformément autour de AB; condition pour que ce régulateur soit le plus sensible possible. SG.

134. Mouvement d'un point pesant sur un plan incliné poli qui tourne uniformément autour d'un axe vertical. SG.

135. Un point attiré vers un centre O par une force fonction de la distance se meut de manière à se trouver toujours sur une spirale logarithmique qui aurait son pôle en O et tournerait alentour avec une vitesse angulaire constante dans un plan horizontal : trouver la loi de la force et la nature de la trajectoire. SG.

136. Influence de la rotation de la Terre sur le mouvement apparent des projectiles et sur le pendule sphérique. SG. PJ.

137. Mouvement d'un point posé sur un plan horizontal poli et attaché par une tige rigide et sans masse à un point qui parcourt uniformément un cercle du plan. PJ.

138. Oscillations d'un point pesant placé à l'intérieur d'un cylindre droit dont l'axe est dirigé suivant la tangente au parallèle du lieu d'observation : on tient compte de la rotation de la Terre. PJ.

8340 Paris. — Imprimerie de Gauthier-Villars, quai des Augustins, 55.

COURS

DE

MÉCANIQUE

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

8340 PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
Quai des Grands-Augustins, 55.

COURS
DE
MÉCANIQUE
DE
L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

PAR CH. STURM,
Membre de l'Institut.

REVU ET CORRIGÉ
PAR E. PROUHET,
Répétiteur d'Analyse à l'École Polytechnique.

5ᵉ ÉDITION, SUIVIE DE
NOTES ET ÉNONCÉS DE PROBLÈMES,

PAR M. DE SAINT-GERMAIN,
Professeur à la Faculté des Sciences de Caen.

TOME SECOND.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1883

TABLE DES MATIÈRES.

STATIQUE.

DEUXIÈME PARTIE.

VINGT-SEPTIÈME LEÇON.

VINGT-HUITIÈME LEÇON.

VINGT-NEUVIÈME LEÇON.

TRENTIÈME LEÇON.

TRENTE ET UNIÈME LEÇON.

TRENTE-DEUXIÈME LEÇON.

TRENTE-TROISIÈME LEÇON.

TRENTE-QUATRIÈME LEÇON.

TRENTE-CINQUIÈME LEÇON.

DYNAMIQUE.

DEUXIÈME PARTIE.

TRENTE-SIXIÈME LEÇON.

TRENTE-SEPTIÈME LEÇON.

TRENTE-HUITIÈME LEÇON.

TRENTE-NEUVIÈME LEÇON.

QUARANTIÈME LEÇON.

QUARANTE ET UNIÈME LEÇON.

QUARANTE-DEUXIÈME LEÇON.

QUARANTE-TROISIÈME LEÇON.

QUARANTE-QUATRIÈME LEÇON.

QUARANTE-CINQUIÈME LEÇON.

QUARANTE-SIXIÈME LEÇON.

QUARANTE-SEPTIÈME LEÇON.

QUARANTE-HUITIÈME LEÇON.

QUARANTE-NEUVIÈME LEÇON.

CINQUANTIÈME LEÇON.

CINQUANTE ET UNIÈME LEÇON.

CINQUANTE-DEUXIÈME LEÇON.

HYDROSTATIQUE.

CINQUANTE-TROISIÈME LEÇON.

CINQUANTE-QUATRIÈME LEÇON.

CINQUANTE-CINQUIÈME LEÇON.

HYDRODYNAMIQUE.

CINQUANTE-SIXIÈME LEÇON.

CINQUANTE-SEPTIÈME LEÇON.

NOTES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME SECOND.

COURS

DE

MÉCANIQUE.

STATIQUE.

DEUXIÈME PARTIE.

VINGT-SEPTIÈME LEÇON.

TRANSFORMATION ET COMPOSITION DES COUPLES.

Translation d'un couple dans un plan parallèle au sien. — Équivalence des couples qui ont le même moment. — Composition des couples situés dans le même plan ou dans des plans parallèles. — Composition des couples situés dans des plans quelconques. — Autre manière de présenter la composition des couples.

TRANSLATION D'UN COUPLE DANS UN PLAN PARALLÈLE AU SIEN.

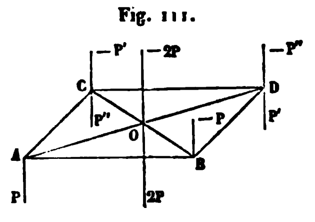
339. On appelle *couple* l'ensemble de deux forces égales, parallèles et de sens contraires, agissant aux extrémités d'une droite. On sait qu'un couple ne peut pas être tenu en équilibre par une simple force (33).

Le *bras de levier* d'un couple est la perpendiculaire commune menée entre les directions des forces. On nomme *moment* d'un couple le produit de l'une de ses forces par le bras de levier.

340. *Un couple peut être transporté parallèlement à lui-même dans son plan ou dans tout plan parallèle et tourné comme on voudra dans ce plan sans que son action sur le corps auquel il est appliqué soit changée, pourvu qu'on suppose le nouveau bras de levier invariablement fixé au premier.*

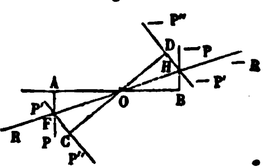
En effet, soient (P, — P) le couple proposé et AB son bras de levier. Soit CD une droite égale et parallèle à AB. Appliquons perpendiculairement à CD, aux points C et D, les forces P″, — P′, P′, — P″, égales et parallèles à P. L'état du système ne sera pas changé par l'introduction de ces nouvelles forces. Or les forces P et P′ se composent en une seule 2P, parallèle à leur direction et appliquée au point O, milieu de la diagonale AD. Les forces — P, — P′ ont de même pour résultante une force — 2P appliquée au point O et qui détruit la force 2P. Il ne reste donc que les deux forces P″, — P″, c'est-à-dire le couple (P, — P) transporté parallèlement à lui-même.

Fig. 111.



341. Soit ensuite un couple (P, — P) dont AB est le bras de levier, et soit CD une droite égale à AB, située dans le plan des forces. Supposons que les deux droites AB et CD se coupent au point O en deux parties égales.

Fig. 112.



Appliquons aux deux points C et D, perpendiculairement à CD, quatre forces égales à P et parallèles, savoir: P′, P″, — P′, — P″. Les deux forces P et P′ se composent en une seule R dirigée suivant le prolongement de la bissectrice de l'angle AFC, c'est-à-dire suivant OF, car les

deux triangles rectangles OFA et OFC ont même hypoténuse et deux côtés égaux OA, OC. De même les deux forces — P et — P′ ont une résultante — R égale et directement opposée à R. Les deux forces R, — R, se détruisant, il reste le couple (P″, — P″) qui n'est autre chose que le couple (P, — P) que l'on aurait fait tourner dans son plan et d'un angle quelconque autour du milieu de son bras de levier.

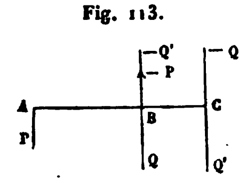
De ces deux propositions réunies on conclut le théorème énoncé (340).

ÉQUIVALENCE DES COUPLES QUI ONT LE MÊME MOMENT.

342. *Un couple peut être remplacé par un autre couple, de bras de levier différent, pourvu que leurs moments soient égaux.*

En effet, soit le couple (P, — P) dont le bras de levier est AB. Appliquons sur BC, comme bras de levier, deux couples (Q, — Q), (Q′, — Q′), égaux et contraires, ce qui ne change pas l'état du système. Les forces — P et — Q′, appliquées au même point, ont une résultante — (P + Q′).

Fig. 113.



Les deux forces P et Q′, parallèles et de même sens, ont une résultante P + Q′, qui passera par le point B, si l'on a

$$(1) \qquad \frac{P}{Q'} = \frac{BC}{AB},$$

et qui détruira la force — (P + Q′) appliquée au même point. Il ne restera donc que le couple (Q, — Q) appliqué au bras de levier BC et de même moment que le couple proposé, car l'égalité (1) donne

$$(2) \qquad P \times AB = Q \times BC.$$

343. Il n'y a donc à considérer dans un couple que la position de son plan, son moment et le sens suivant lequel

il tend à faire tourner son plan. Pour connaître le sens d'un couple, il faut supposer fixe le milieu du bras de levier et examiner dans quel sens chaque force tend à faire tourner ce bras de levier dans son plan. Il ne faut pas confondre cette rotation fictive avec celle du corps auquel le couple est supposé appliqué, car en général le corps ne tournerait pas autour d'une droite perpendiculaire au plan du couple, menée par le milieu du bras de levier.

COMPOSITION DES COUPLES SITUÉS DANS UN MÊME PLAN OU DANS DES PLANS PARALLÈLES.

344. *Deux couples situés dans un même plan ou dans des plans parallèles se composent en un seul, situé dans un plan parallèle à celui des couples proposés, et dont le moment est égal à la somme ou à la différence des moments des couples composants, suivant qu'ils tendent à faire tourner leur plan dans le même sens ou en sens contraires.*

Soient, en effet, $(P, -P)$ et $(Q, -Q)$ ces deux couples, et p, q leurs bras de levier. Nous pouvons les remplacer par deux autres couples $(P', -P')$, $(Q', -Q')$, appliqués sur un même bras de levier d et situés dans un plan parallèle aux plans des couples composants, pourvu que l'on ait

$$P'd = Pp, \quad Q'd = Qq.$$

Ces deux couples, ayant même bras de levier, se composent évidemment en un seul $[P' + Q', -(P' + Q')]$ s'ils sont de même sens et $[P' - Q', -(P' - Q')]$ s'ils sont de sens contraires. Dans le premier cas, le moment du couple résultant sera

$$(P' + Q')d = P'd + Q'd = Pp + Qq,$$

et, dans le second cas,

$$(P' - Q')d - P'd - Q'd = Pp - Qq,$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

345. On conclut de là que *des couples en nombre quelconque, situés dans un même plan ou dans des plans parallèles, se composent en un seul situé dans un plan parallèle à ceux des couples proposés, et dont le moment est égal à la somme algébrique des moments de ces derniers,* en regardant comme *positifs* les moments des couples qui tendent à faire tourner leur plan dans un certain sens, et comme *négatifs* les moments des couples qui tendent à faire tourner leur plan dans le sens opposé.

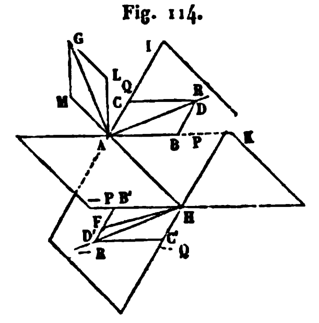
346. D'où résulte qu'un couple peut être décomposé d'une infinité de manières en autant de couples que l'on voudra, situés dans des plans parallèles; car on peut prendre à volonté les moments de tous ces couples, à l'exception d'un seul.

COMPOSITION DES COUPLES SITUÉS DANS DES PLANS QUELCONQUES.

347. Considérons maintenant deux couples situés dans deux plans IAH, KAH, qui font un angle quelconque.

On peut d'abord remplacer ces deux couples respectivement par deux autres équivalents, (P, — P), (Q, — Q), ayant un même bras de levier AH, pris sur l'intersection des deux plans. Les forces P et Q, représentées par les droites AB et AC, se composent en une seule R représentée par AD, diagonale du parallélogramme ABCD. De même les forces — P et — Q donnent une résultante évidemment égale et parallèle à la première, mais de sens contraire. Donc les deux couples (P, — P), (Q, — Q) se composent en un seul (R, — R).

Fig. 114.



Les moments des trois couples sont

$$P \times AH, \quad Q \times AH, \quad R \times AH.$$

Ils sont donc entre eux comme les forces P, Q, R et peuvent être représentés par les droites AB, AC, AD. De là le théorème suivant :

Si l'on mène dans les plans des deux couples donnés deux droites AB, AC, *perpendiculaires à l'intersection de ces plans et proportionnelles aux moments de ces couples, la diagonale* AD *du parallélogramme* ABCD, *construit sur ces deux droites, représentera en grandeur le moment du couple résultant, dont le plan passera par cette diagonale et par l'intersection* AH.

AUTRE MANIÈRE DE PRÉSENTER LA COMPOSITION DES COUPLES.

348. On peut présenter sous une autre forme les théorèmes relatifs à la composition des couples. Soit (P, — P) un couple quelconque dont le bras de levier AB est p. Par un point O pris à volonté sur le bras de levier soit menée une droite OL, perpendiculaire au plan du couple, et dont la grandeur représente le moment Pp du couple. Supposons cette droite dirigée d'un côté de ce plan tel, qu'un observateur placé sur cette perpendiculaire, les pieds sur le plan et l'œil au point L, verrait tourner ce plan dans un sens convenu, par exemple de sa gauche vers sa droite. La direction et la longueur de OL déterminent complétement le sens et la grandeur du couple (P, — P). Nous appellerons cette droite le *moment linéaire* du couple.

Fig. 115.

349. La considération du moment linéaire rend les énoncés relatifs à la composition des couples entièrement

semblables à ceux qui se rapportent à la composition des forces.

D'abord on voit aisément que *le moment linéaire du couple résultant de plusieurs couples situés dans des plans parallèles est égal à la somme algébrique des moments linéaires des couples composants.*

350. Considérons maintenant deux couples dont les plans forment un angle (*fig.* 114, p. 5). Menons dans le plan ABDC, perpendiculaire à AH, la droite AL perpendiculaire et égale à AB. Si la droite AL est dirigée dans un sens tel, qu'un observateur placé sur AL voie le couple (P, — P) entraîner son plan de la gauche vers la droite, cette ligne sera le moment linéaire du couple (P, — P). Menons ensuite dans le plan ABDC les deux droites AG = AD et AM = AC faisant avec AL des angles respectivement égaux aux angles BAD et BAC : AG sera à la fois perpendiculaire aux lignes AC, AH et par suite au plan DAH du couple (R, — R) : par la même raison AM sera perpendiculaire au plan CAH du couple (Q, — Q). En outre, si l'on imagine que ces plans DAH, CAH tournent autour de AH jusqu'à ce qu'ils soient rabattus sur le plan BAH, les perpendiculaires à ces trois plans coïncideront et seront dirigées dans le même sens. Ces trois perpendiculaires sont donc les moments linéaires des trois couples. Or la figure ALGM est un parallélogramme égal au parallélogramme ABCD. Car en plaçant AL sur AB, AG tombera sur AD et AM sur AC. Donc *deux couples situés dans des plans différents se composent en un seul dont le moment linéaire est la diagonale du parallélogramme qui a pour côtés les moments linéaires des deux couples composants.*

351. Ainsi les couples se composent comme des forces qui seraient représentées en grandeur et en direction par leurs moments linéaires, et qui passeraient par un même point, puisqu'on peut transporter les plans des couples

parallèlement à eux-mêmes, de manière que leurs plans passent par un même point. Par conséquent, le moment linéaire de la résultante d'un nombre quelconque de couples sera représenté par le dernier côté d'un polygone dont les autres côtés seraient égaux et parallèles aux moments linéaires des couples composants; trois couples se composeront en un seul dont le moment linéaire sera la diagonale du parallélipipède construit sur les moments linéaires des couples composants, etc. Ces théorèmes conduiront à l'expression analytique de la résultante d'un nombre quelconque de couples dont les moments linéaires seraient rapportés à trois axes rectangulaires quelconques.

VINGT-HUITIÈME LEÇON.

COMPOSITION ET ÉQUILIBRE DES FORCES APPLIQUÉES A UN SYSTÈME INVARIABLE.

Réduction des forces appliquées à un système invariable. — Équilibre d'un système de forces parallèles situées dans un même plan. — Composition et équilibre d'un système de forces situées dans un même plan. — Équations générales de l'équilibre.

RÉDUCTION DES FORCES APPLIQUÉES A UN SYSTÈME INVARIABLE.

352. Considérons un corps solide invariable, auquel sont appliquées en différents points A, B, C, ..., les forces P, P', P'',.... Appliquons au point O, pris à volonté dans le corps ou lié invariablement avec lui, des forces égales et contraires deux à deux et égales respectivement à P, P', P'', ... L'introduction de ces nouvelles forces ne change pas l'état du système, mais elle permet de réduire l'ensemble des forces à une force unique et à un couple. En effet, on peut d'abord composer toutes les forces P, P', P'', ..., appliquées au point O, en une seule R et ensuite réduire à un seul couple tous les couples (P, — P), (P', — P'), (P'', — P''), etc. Par conséquent, *toutes les forces appliquées à un corps solide peuvent se réduire à une force unique* R, *résultante des forces* P, P', P'', ..., *transportées pa-*

Fig. 116.

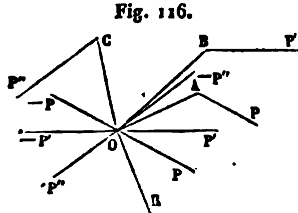
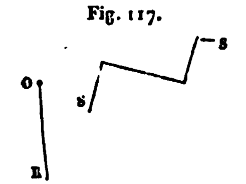


Fig. 117.



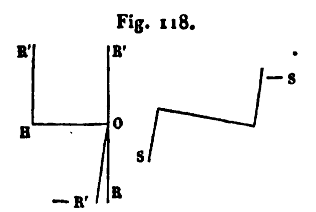
rallèlement à elles-mêmes en un point arbitraire O *et à un couple unique* (S, — S).

On doit remarquer que la grandeur, la direction et le sens de la résultante R ne changent pas avec le point O; mais le moment et la position du couple résultant changent avec ce point.

353. Comme une force ne peut pas faire équilibre à un couple, il faut, pour qu'il y ait équilibre, que la force R et le couple (S, — S) soient nuls séparément; en d'autres termes, *quand un système de forces est en équilibre, les forces transportées parallèlement à elles-mêmes en un point quelconque se font équilibre autour de ce point, et les couples résultant de la translation de ces forces doivent aussi se faire équilibre.* Ces conditions sont d'ailleurs suffisantes.

354. Si le système admet une résultante unique, une force R′ égale et contraire à cette résultante devra faire équilibre à la force R et au couple (S, —S). Appliquons donc au point O deux forces R′, —R′. Il doit y avoir équilibre entre les deux couples (R′, — R′), (S, — S) et les deux forces R et R′. Or ces deux dernières, devant nécessairement se détruire, doivent être égales et directement opposées. Donc, en supprimant les forces R′ et — R′ qu'on avait appliquées au point O, on voit que la force R appliquée en O et la force R′ appliquée en H forment un couple qui fait équilibre au couple (S, — S). Donc les plans de ces deux couples sont parallèles, et par conséquent la force R est parallèle au plan du couple résultant.

Fig. 118.

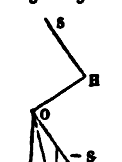


Cette condition est d'ailleurs suffisante, car, si elle est remplie, on pourra toujours, dans un plan parallèle au plan du couple (S, — S), placer une force (R′ = R), de

telle sorte que le couple (R, — R) détruise le couple (S, — S). Alors la force R′ faisant équilibre à la force R et au couple (S, — S), une force égale et directement opposée à R′ sera la résultante du système.

355. Nous avons vu qu'un nombre quelconque de forces appliquées à un système invariable dans l'espace se réduisait à une force R et à un couple (S, — S) qui ne sont pas en général situés dans des plans parallèles. En transportant le couple (S, — S) parallèlement à lui-même jusqu'à ce que l'une des forces, — S, passe par un point O de la force R, les forces — S et R se composent en une seule T, non située dans le plan du couple (S, — S), si la force R elle-même n'y est pas contenue. Ainsi, *un nombre quelconque de forces appliquées à un système invariable peuvent se réduire à deux forces* S *et* T *qui sont, en général, dans des plans différents, et dont l'une passe par un point* O, *entièrement arbitraire*. Cette réduction peut s'opérer d'une infinité de manières, même sans déplacer le point O, soit en faisant tourner le couple autour du point O, soit en changeant ce couple en un autre de même moment.

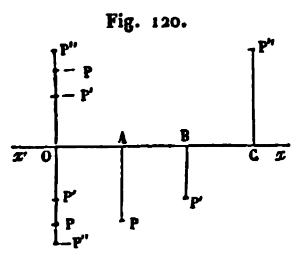
Fig. 119.



ÉQUILIBRE D'UN SYSTÈME DE FORCES PARALLÈLES SITUÉES DANS UN MÊME PLAN.

356. Par un point O du plan des forces P, P′, P″, . . ., menons une droite $x'Ox$ perpendiculaire à la direction commune de ces forces. Appliquons au point O des forces égales et directement opposées, d'ailleurs égales et parallèles respectivement à P, P′, P″, . . . On n'aura plus qu'à considérer les forces P, P′, P″, . . ., appliquées

Fig. 120.



au point O, et les couples (P, — P), (P′, — P′),.... La résultante des forces appliquées en O devant être nulle, on aura

$$(1) \qquad P + P' + P'' + \ldots = 0,$$

en considérant comme positives les forces qui tirent dans un sens, et comme négatives celles qui tirent dans le sens opposé.

357. Ensuite le moment du couple résultant de tous les couples (P, — P) (P′, — P′),... devant être nul, on aura, en nommant x, x', x'',... les bras de leviers des couples composants,

$$(2) \qquad Px + P'x' + P''x'' \ldots = 0.$$

Cette égalité aura lieu en regardant les forces P, P′, P″,... comme positives ou négatives, suivant leur sens, et les bras de levier comme positifs ou négatifs, suivant qu'ils seront situés d'un côté ou de l'autre du point O. En discutant les quatre cas qui peuvent se présenter relativement au sens de chaque force et à la position de son point d'application, on verra que chacun des produits Px, $P'x'$,... prend de lui-même le signe qui convient au moment qu'il représente.

358. Si les forces données ne se font pas équilibre, elles se réduiront à une force R et à un couple (S, — S), lesquels auront une résultante unique; car R et (S, — S) sont dans un même plan. En effet, en introduisant une force — R, égale et parallèle à R, appliquée à un point dont x_1 sera l'abscisse, il y aura équilibre, si l'on pose

$$Rx_1 = Px + P'x' + \ldots.$$

Puisque d'ailleurs

$$R = P + P' + P'' + \ldots,$$

on aura donc

$$x_1 = \frac{Px + P'x' + P''x'' + \ldots}{P + P' + P'' \ldots}.$$

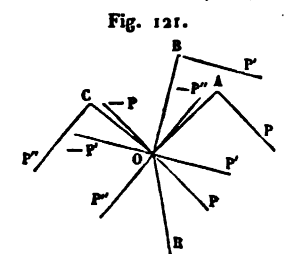
Ces formules déterminent la grandeur et la position de la résultante du système, laquelle est égale et directement opposée à la force — R qui lui fait équilibre.

359. Si la force R était nulle, le système se réduirait au couple (S, — S), qui ne pourrait pas être tenu en équilibre par une simple force. Dans ce cas seulement il n'y aurait pas de résultante unique.

COMPOSITION ET ÉQUILIBRE D'UN SYSTÈME DE FORCES SITUÉES DANS UN MÊME PLAN.

360. Soient $P, P', P'', \ldots,$ les forces données; d'un point quelconque O, pris dans leur plan, abaissons sur leurs directions les perpendiculaires OA, OB, OC,..., et regardons A, B, C,... comme les points d'application des forces correspondantes. Transportons toutes ces forces parallèlement à elles-mêmes au point O. Elles auront une certaine résultante R, et les couples provenant de cette translation se composeront en un seul dont le moment G sera donné par la formule

Fig. 121.



$$G = Pp + P'p' + \ldots,$$

$p, p', \ldots$ désignant les bras de levier OA, OB,...; on convient en outre de prendre positivement les moments des couples qui tendent à faire tourner leur plan dans un certain sens et négativement ceux des couples qui agissent dans le sens contraire.

361. Dans le cas de l'équilibre, G doit être nul. On aura donc

$$(1) \qquad Pp + P'p' + P''p'' + \ldots = 0.$$

Ensuite la résultante R devant être nulle, si X, Y,

X', Y',... désignent les composantes des forces suivant deux axes pris dans le plan, on aura

$$(2) \qquad X + X' + X'' + \ldots = 0,$$
$$(3) \qquad Y + Y' + Y'' + \ldots = 0.$$

On appelle *moment d'une force par rapport à un point* le produit de cette force par sa distance au point en question.

On convient de regarder le moment d'une force comme positif ou négatif, suivant que cette force tend à faire tourner la perpendiculaire abaissée du point fixe sur sa direction dans le sens direct ou dans le sens rétrograde. En adoptant cette définition, on voit que :

1° *La somme des moments des forces par rapport à un point quelconque de leur plan doit être nulle;* 2° *les sommes des composantes suivant deux axes quelconques doivent être nulles séparément.*

362. On peut écrire l'équation (1) sous une autre forme, d'après laquelle les moments prennent d'eux-mêmes les signes qui leur conviennent.

Soit P l'une quelconque des forces données. Avant de la transporter au point O, décomposons-la en deux forces X et Y, parallèles aux axes. La translation des forces X et Y au point O donnera naissance à deux couples $(X, -X)$, $(Y, -Y)$, et en appelant θ l'angle des axes, et x, y les coordonnées du point A, les moments de ces deux couples sont $Xy \sin\theta$, $Yx \sin\theta$. Pour un observateur placé sur la perpendiculaire menée par le point O au plan xOy, le couple $(X, -X)$ tendrait à faire tourner son plan de gauche à droite, et le couple $(Y, -Y)$ de droite à gauche, en supposant les forces dirigées suivant les parties positives des axes. Il faut donc désigner leurs

Fig. 122.

moments par $Xy \sin\theta$ et par $-Yx \sin\theta$. On reconnaîtra ensuite aisément que si une force ou l'une des coordonnées change de signe, le couple changera de sens, et par conséquent son moment prendra de lui-même le signe convenable. En opérant de même sur $p', p'', \ldots$, l'équation (1), après la suppression du facteur commun, prendra la forme

$$(4) \quad Xy - Yx + X'y' - Y'x' + X''y'' - Y''x'' + \ldots = 0.$$

363. Si les forces données ne se font pas équilibre, elles se réduiront à une force R et à un couple $(S, -S)$ qui auront une résultante unique, si R n'est pas nul, puisque cette force et ce couple sont dans le même plan.

Une force $R' = -R$ égale et contraire à la force cherchée devant former avec R un couple qui détruise $(S, -S)$, en appelant r le bras de levier du couple $(R, -R)$; on aura

$$Rr = Pp + P'p' + \ldots,$$

d'où l'on déduira r. La force R sera donc connue en grandeur et en direction.

Pour obtenir la direction suivant laquelle agit la résultante unique $-R'$, soient x_1, y_1 les coordonnées d'un point quelconque de cette droite, et X_1, Y_1 les composantes de la force R parallèles aux axes. Il y aura équilibre dans le système après l'introduction de la force $-R$ ou, ce qui revient au même, des forces $-X_1, -Y_1$. On doit donc avoir

$$-X_1y_1 + Yx_1 + Xy - Yx + X'y' - \ldots = 0,$$

ou en posant

$$G = Xy - Yx + X'y' - Y'x' + \ldots,$$

on aura

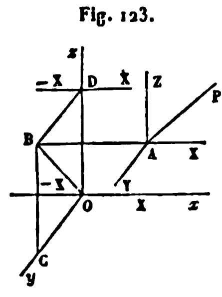
$$(5) \quad -X_1y_1 + Yx_1 + G = 0,$$

équation de la droite cherchée.

ÉQUATIONS GÉNÉRALES DE L'ÉQUILIBRE.

364. Considérons maintenant un système quelconque de forces P, P′, P″.... appliquées à des points A, A′, A″.... liés entre eux d'une manière invariable. Décomposons la force P en trois autres X, Y, Z parallèles à trois axes rèctangulaires Ox, Oy, Oz. Soient $x = AB$, $y = OC$, $z = OD$, les coordonnées du point A.

Fig. 123.



Appliquons aux points D et O des forces égales et parallèles à X, mais deux à deux de sens contraires. Il en résulte une force X appliquée en O et deux couples (X, —X) appliqués sur BD et OD; le premier couple peut être transporté parallèlement à lui-même dans le plan xOy. Il reste une force X appliquée au point O et un couple (X, — X), ayant OD pour bras de levier et situé dans le plan zOx. En opérant de la même manière sur les composantes Y, Z, X′, Y′, Z′,..., on ramènera le système proposé à plusieurs forces dirigées suivant les axes et à un certain nombre de couples situés dans les plans coordonnés. En appelant $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$, les résultantes des forces dirigées suivant les axes et L, M, N les moments résultants obtenus en composant les couples situés dans chacun des plans coordonnés, on aura

$$\mathcal{X} = X + X' + X'' + \ldots,$$
$$\mathcal{Y} = Y + Y' + Y'' + \ldots,$$
$$\mathcal{Z} = Z + Z' + Z'' + \ldots;$$

$$L = Zy - Yz + Z'y' - Y'z' + \ldots,$$
$$M = Xz - Zx + X'z' - Z'x' + \ldots,$$
$$N = Yx - Xy + Y'x' - X'y' + \ldots,$$

365. Quand il y a équilibre, la résultante de toutes les forces dirigées suivant le même axe doit être nulle, et le couple résultant de tous les couples situés dans le même plan coordonné doit être aussi nul. Donc les six équations suivantes

$$(z) \qquad \begin{cases} X=0, & Y=0, & Z=0, \\ L=0, & M=0, & N=0 \end{cases}$$

auront lieu dans le cas d'un système de forme invariable.

366. On peut mettre ces équations sous une autre forme, en y introduisant les intensités des forces P, P′, P″,..., et les angles α, β, γ, α', β', γ',..., que leurs directions font avec les axes. Les composantes X, Y, Z, X′, ..., sont alors représentées pour la grandeur et pour le signe par $P\cos\alpha$, $P\cos\beta$, $P\cos\gamma$, $P'\cos\alpha'$, ... On aura donc, au lieu des équations qui précèdent,

$$(1) \qquad P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + \ldots = 0,$$

$$(2) \qquad P\cos\beta + P'\cos\beta' + \ldots = 0,$$

$$(3) \qquad P\cos\gamma + P'\cos\gamma' + \ldots = 0.$$

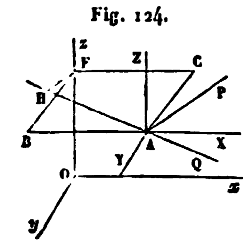
$$(4) \qquad P(y\cos\gamma - z\cos\beta) + P'(y'\cos\gamma' - z'\cos\beta') + \ldots = 0,$$

$$(5) \qquad P(z\cos\alpha - x\cos\gamma) + P'(z'\cos\alpha' - x'\cos\gamma') + \ldots = 0,$$

$$(6) \qquad P(x\cos\beta - y\cos\alpha) + P'(x'\cos\beta' - y'\cos\alpha') + \ldots = 0.$$

367. Au lieu de décomposer la force P en trois autres X, Y, Z, parallèles aux axes rectangulaires, on peut la décomposer en deux forces seulement, une force Z parallèle à l'axe Oz et une force Q située dans le plan ABFC perpendiculaire à Oz. Abaissons du point F où ce plan coupe l'axe Oz, $FH = q$ perpendiculaire à la direction de cette force. La longueur q est la plus courte distance de l'axe Oz à la

Fig. 124.



droite AH et aussi à la direction de la force P, puisque Oz est parallèle au plan PAQ. Comme la force Q est la résultante des deux forces X et Y situées dans ce même plan, son moment est égal à la somme algébrique de leurs moments par rapport au point F. On a donc

$$Qq = Yx - Xy.$$

Pour la force P′, on trouverait de même

$$Q'q' = Y'x' - X'y'.$$

L'équation $N = 0$ prend alors la forme

$$Qq + Q'q' + Q''q'' + \ldots = 0.$$

On aurait des équations de même forme relatives aux deux autres axes.

On appelle moment d'une force par rapport à un axe le produit de la projection de cette force sur un plan perpendiculaire à l'axe multipliée par la plus courte distance entre cet axe et cette projection. On peut donc dire que *si un système de forces appliquées à un corps solide est en équilibre, la somme des moments des forces, par rapport à trois axes rectangulaires menés par un même point, doit être nulle pour chacun de ces axes.*

368. Les six équations

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0,$$
$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0$$

sont vérifiées dans l'état d'équilibre d'un système quelconque de forces, lors même que ses différents points ne seraient pas liés les uns aux autres d'une manière invariable, comme par exemple si un point était lié à un autre par un cordon inextensible. Dans ce cas, les équations d'équilibre sont toujours vérifiées (*); car si l'on

(*) On doit cependant apporter certaines restrictions à cette assertion, comme nous le verrons plus loin, lorsque nous parlerons du mouvement des systèmes dont les liaisons varient avec le temps.

solidifie le système, c'est-à-dire si l'on fixe les différents points de manière que leurs distances mutuelles restent invariables, l'équilibre ne sera pas troublé et par conséquent les forces immédiatement appliquées à ce corps satisferont aux six équations. Mais ces conditions ne seront plus suffisantes pour assurer l'équilibre, et il faudra y joindre de nouvelles équations qui dépendront du mode de liaison des différentes parties du système.

VINGT-NEUVIÈME LEÇON.

SUITE DE LA COMPOSITION ET DE L'ÉQUILIBRE DE FORCES APPLIQUÉES A UN SYSTÈME DE FORME INVARIABLE.

Cas d'une résultante unique. — Cas d'un point fixe. — Cas d'un axe fixe. — Équilibre d'un corps qui repose sur un plan fixe par un ou plusieurs points.

CAS D'UNE RÉSULTANTE UNIQUE.

369. Quand il y a une résultante unique, on sait que le résultante R des forces transportées parallèlement à elles-mêmes au point O doit être parallèle au plan du couple résultant, dont nous avons désigné le moment par G. Les cosinus des angles que la résultante R fait avec les axes sont

$$\frac{X}{\text{R}},\ \frac{Y}{\text{R}},\ \frac{Z}{\text{R}},$$

et les cosinus des angles que le *moment linéaire* du couple résultant fait avec ces mêmes axes sont

$$\frac{\text{L}}{\text{G}},\ \frac{\text{M}}{\text{G}},\ \frac{\text{N}}{\text{G}}.$$

Il suffit évidemment d'exprimer que la force R et la direction du moment linéaire sont perpendiculaires entre elles, ce qui donne

$$(1)\qquad X\text{L} + Y\text{M} + Z\text{N} = 0.$$

Cette équation exprime que les forces se réduisent à une force unique pourvu que X, Y, Z ne soient pas nulles à la fois, sans quoi le système se réduirait à un couple, et il n'y aurait pas de résultante unique.

370. On peut encore arriver à ce résultat d'une autre manière et déterminer en même temps la position de la

droite suivant laquelle agit la résultante. Introduisons une force R_1 égale et directement opposée à la résultante, le système sera en équilibre. Par conséquent, si X_1, Y_1, Z_1 sont les composantes de R_1 et x_1, y_1, z_1, les coordonnées d'un point quelconque de sa direction, on aura

$$(2) \qquad X + X_1 = 0, \quad Y + Y_1 = 0, \quad Z + Z_1 = 0$$

et ensuite

$$(3) \qquad \begin{cases} Z_1 y_1 - Y_1 z_1 + L = 0, \\ X_1 z_1 - Z_1 x_1 + M = 0, \\ Y_1 x_1 - X_1 y_1 + N = 0. \end{cases}$$

Les trois premières équations donnent

$$X_1 = -X, \quad Y_1 = -Y, \quad Z_1 = -Z.$$

On retrouve ainsi ce résultat connu que la résultante unique des forces proposées est égale et parallèle à la force R et qu'elle agit dans le même sens.

On a ensuite les équations (3) pour déterminer x_1, y_1, z_1. Mais on voit *à priori* que l'on ne trouvera pas de valeurs déterminées pour ces trois inconnues, car, s'il y a une résultante, on doit pouvoir transporter son point d'application en un point quelconque de sa direction. Ces trois équations doivent donc se réduire à deux et à une équation de condition. En effet, à cause de $X_1 = -X$, $Y_1 = -Y$, $Z_1 = -Z$, on peut écrire ces équations ainsi :

$$(4) \qquad \begin{cases} Yz_1 - Zy_1 + L = 0, \\ Zx_1 - Xz_1 + M = 0, \\ Xy_1 - Yx_1 + N = 0. \end{cases}$$

Puis, si on les ajoute membre à membre, après les avoir multipliées respectivement par X, Y, Z, on aura

$$XL + YM + ZN = 0,$$

équation déjà obtenue. Si elle est vérifiée, deux des trois

équations (4) seront les équations de la droite suivant laquelle agit la résultante.

CAS D'UN POINT FIXE.

371. Soit O le point fixe. En y transportant toutes les forces, on obtiendra une résultante R et un couple (S, —S). La résultante est détruite par la fixité du point. Quant au couple (S, — S), il doit être nul : car, en transportant le couple parallèlement à lui-même jusqu'à ce que la force S vienne passer par le point fixe, cette force S serait détruite et la force —S aurait tout son effet. Donc le moment du couple (S, —S) est nul et la pression qu'éprouve le point fixe est égale à la résultante de toutes les forces transportées parallèlement à elles-mêmes en ce point.

372. On peut encore obtenir ces conditions en introduisant la résistance R_1 du point fixe. Soient X_1, Y_1, Z_1 les composantes de la force R_1 : puisqu'il y a équilibre, on aura

$$X + X_1 = 0, \quad Y + Y_1 = 0, \quad Z + Z_1 = 0.$$

L'introduction de la force R_1 ne donnant aucun nouveau terme dans les expressions L, M, N, on aura

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0.$$

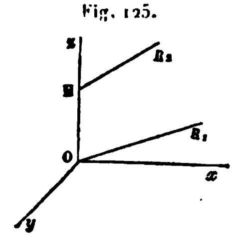
Les trois premières équations déterminent X_1, Y_1, Z_1 et font voir que la résistance R_1 est égale et directement opposée à R. Les trois autres sont les équations de condition et expriment que le couple résultant (S, — S) est nul.

CAS D'UN AXE FIXE.

373. Supposons qu'il y ait dans le système un axe fixe, ou, ce qui revient au même, deux points fixes O et H. Prenons pour axe des z, la droite OH, et pour axes des x et des y, deux droites passant par le point O.

La résultante des forces transportées parallèlement à elles-mêmes au point O est détruite, puisque ce point est fixe. Quant aux couples résultant de cette translation et situés dans les plans zOx et zOy, ils sont détruits par la résistance de l'axe Oz, car on peut faire tourner chacun d'eux jusqu'à ce que les deux forces qui le composent soient perpendiculaires à l'axe fixe qui les détruit toutes. Il ne reste donc plus que le couple N situé dans le plan xOy, qui doit être nul; sans quoi, en le transportant jusqu'à ce qu'une de ses forces passe par le point O, celle-ci serait détruite et l'autre ferait tourner le système autour de l'axe Oz.

Fig. 125.



La seule condition d'équilibre est donc

$$N = 0.$$

On peut l'énoncer en disant que *la somme des moments des forces par rapport à l'axe fixe doit être nulle.*

374. Si le corps peut glisser le long de l'axe, par exemple, s'il est traversé par une tige fixe et inflexible, les composantes X, Y et les couples L, M sont détruits par la résistance de l'axe, mais la force Z ne l'est pas. On a alors deux équations d'équilibre

$$Z = 0, \quad N = 0.$$

375. Nous avons établi, pour conditions d'équilibre, dans le cas d'un point fixe, les équations

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0;$$

donc, pour qu'un nombre quelconque de forces appliquées à un corps solide soit en équilibre autour d'un point fixe, il faut et il suffit qu'elles le soient autour de trois axes passant par le point fixe.

376. On peut encore traiter la question en introdui-

sant les résistances des points fixes. Si les points O et H devenaient libres, on rétablirait l'équilibre en appliquant en ces points des forces convenables R_1 et R_2. Soit $OH = h$. Appelons X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2 les composantes parallèles aux axes des forces R_1 et R_2. Les équations d'équilibre seront alors

$$X + X_1 + X_2 = 0,$$
$$Y + Y_1 + Y_2 = 0,$$
$$Z + Z_1 + Z_2 = 0,$$
$$L - Y_2 h = 0, \quad M + X_2 h = 0, \quad N = 0.$$

La dernière équation est la seule condition d'équilibre déjà trouvée. Quant aux cinq autres, elles feront connaître les résistances des points O et H ou les pressions qu'ils supportent. On en tire

$$X_2 = -\frac{M}{h}, \quad Y_2 = \frac{L}{h},$$
$$X_1 = -X + \frac{M}{h}, \quad Y_1 = -Y - \frac{L}{h},$$
$$Z_1 + Z_2 = -Z.$$

Ces équations déterminent X_1, X_2, Y_1 et Y_2, mais elles ne donnent que la somme $Z_1 + Z_2$ des composantes parallèles à l'axe des z, ce qui doit être; car, s'il y a équilibre, les deux forces Z_1 et Z_2 qui agissent suivant la même droite, peuvent être appliquées au même point O, et l'on peut partager leur somme en deux parties quelconques appliquées aux points O et H.

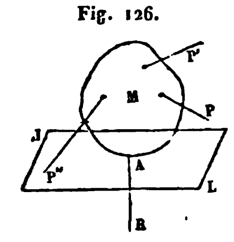
ÉQUILIBRE D'UN CORPS QUI REPOSE SUR UN PLAN FIXE.

377. Supposons un corps pressé contre un plan en un de ses points par une force, passant par ce point et normale au plan; ce corps sera en équilibre, car il n'y a pas de raison pour qu'il se meuve dans une direction plutôt que dans une autre.

Si la force, au lieu d'être normale au plan, lui était oblique, on pourrait la décomposer en deux autres, l'une normale et l'autre située dans le plan. La première ne ferait qu'appuyer le corps sur le plan et la seconde aurait tout son effet pour le déplacer. Ainsi *la condition nécessaire et suffisante pour l'équilibre est que la force qui passe par le point de contact soit normale au plan.* La même conséquence s'appliquerait au plan tangent, si le corps était pressé contre une surface courbe par une force qui passerait par le point de contact.

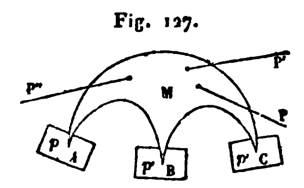
378. Supposons maintenant qu'un corps M, sollicité par plusieurs forces P, P′, P″,..., repose par un de ses points A sur un plan IL ou sur une surface dont IL serait le plan tangent au point A. Concevons qu'il y ait équilibre. Si l'on ôtait le plan, le point A se mouvrait dans une certaine direction, et en appliquant suivant cette direction une force déterminée, on rétablirait l'équilibre. Cette force peut donc remplacer la résistance du plan, et elle doit être égale, puisqu'il y a équilibre, à la résultante des forces P, P′, P″,.... Donc il faut que celles-ci aient une résultante unique, normale au plan et passant par le point d'appui.

Fig. 126.



379. On est conduit à une conséquence analogue, quand le corps M repose par différents points A, B, C,... sur plusieurs plans ou surfaces fixes, comme par exemple une table supportée par trois pieds. Si l'on ôtait le plan *p*, l'équilibre serait en général détruit, mais on le rétablirait en appliquant au point A une force convenable dans la direction que ce point prendrait immé-

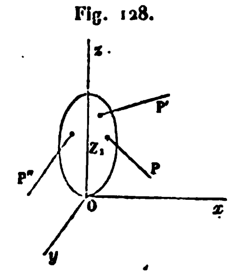
Fig. 127.



diatement. Cette force peut donc remplacer la résistance du plan p; de même deux autres forces appliquées aux points B et C peuvent tenir lieu des résistances des plans p' et p''. Si l'on joint ces deux dernières aux forces données P, P′, P″... et qu'on regarde le corps M comme appuyé seulement sur le plan p par le point A, la résultante de toutes les forces passe par le point A et est normale au plan p; par conséquent la résistance de ce plan lui est elle-même normale. Le même raisonnement s'applique aux résistances des plans p' et p''.

380. Voyons ce que deviennent les équations d'équilibre dans le cas d'un corps pressé contre un plan xOy ou contre une surface dont xOy serait le plan tangent au point O.

Fig. 128.



Prenons ce plan pour celui des xy et le point O pour origine. La résistance du plan équivalant à une force normale Z_1, nous aurons d'abord

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z + Z_1 = 0;$$

et comme Z_1 n'introduit évidemment aucun terme dans les équations des moments, on aura

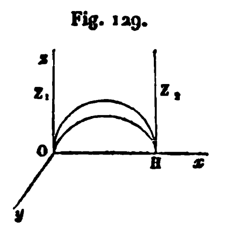
$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0.$$

Ces trois équations expriment que le système des forces se réduit à une force unique, et les deux premières que cette force unique est normale au plan et passe par le point O. Quant à l'équation $Z + Z_1 = 0$, elle indique que la résultante est la pression supportée par le plan. Il faut, en outre, que la résultante appuie le corps sur le plan, c'est-à-dire qu'elle soit négative. On devra donc joindre aux cinq équations d'équilibre l'inégalité

$$Z < 0.$$

381. Imaginons maintenant que le corps repose sur le plan xOy par deux points O et H. Prenons OH pour axe des x. Remplaçons la résistance du plan fixe par deux forces normales Z_1, Z_2. Puisqu'il y a équilibre, la résultante $Z_1 + Z_2$ de ces deux forces, laquelle a son point d'application entre O et H, doit être égale et contraire à la résultante de toutes les forces données. Il faut donc que celle-ci soit normale au plan et qu'elle ait son point d'application entre O et H.

Fig. 129.



En posant $OH = h$, les six équations d'équilibre donnent

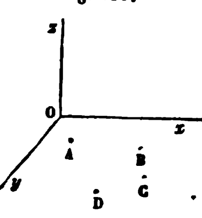
$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z + Z_1 + Z_2 = 0,$$
$$L = 0, \quad M - Z_2 h = 0, \quad N = 0.$$

Quatre de ces équations expriment les conditions que doivent remplir les forces données; les deux autres font connaître les inconnues et donnent

$$Z_2 = \frac{M}{h}, \quad Z_1 = -Z - \frac{M}{h}.$$

382. Si le corps repose sur le plan xOy par un nombre quelconque de points d'appui A (x_1, y_1), B (x_2, y_2), C, D,..., la résistance du plan en ces divers points équivaudra à des forces normales $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ qui y seraient appliquées; il faut donc qu'il y ait une résultante unique et tombant dans l'intérieur du polygone ABCDA.

Fig. 130.



Dans ce cas, les équations générales se réduisent à

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z + Z_1 + Z_2 + \ldots = 0,$$
$$L + Z_1 y_1 + Z_2 y_2 + \ldots \quad 0,$$
$$M - Z_1 x_1 - Z_2 x_2 - \ldots = 0,$$
$$N = 0.$$

On a donc seulement trois équations d'équilibre $X = 0$, $Y = 0$, $N = 0$. Les trois autres équations font connaître les pressions du plan aux points d'appui. On voit que s'il y a trois points d'appui, les pressions Z_1, Z_2, Z_3 seront déterminées; mais si le corps repose sur le plan xOy par plus de trois points, le nombre des inconnues surpassera le nombre des équations et le problème sera indéterminé.

En réalité dans chaque cas particulier la pression sur chacun des points d'appui sera déterminée; mais cette pression ne pourra pas être calculée par l'analyse précédente; seulement, ce que l'on doit conclure des formules que nous venons de démontrer, c'est qu'il y aura équilibre si elles ont lieu, et réciproquement elles sont nécessaires pour l'équilibre.

Observons enfin qu'il n'existe pas dans la nature de corps parfaitement solide et que les forces $Z_1, Z_2, \ldots$ dépendront généralement de la constitution du corps donné. Quoi qu'il en soit, il est utile d'étudier le cas hypothétique du solide parfait, parce que les conditions d'équilibre des corps naturels se ramènent à celles des solides parfaits.

TRENTIÈME LEÇON.

ÉQUILIBRE DES FORCES APPLIQUÉES A DES CORDONS.

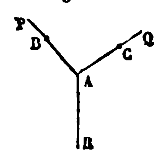
Équilibre des forces appliquées à des cordons qui passent par un même point. — Cas où l'une des cordes passe dans un anneau. — Équilibre du polygone funiculaire. — Cas où les forces sont appliquées à des anneaux. — Cas où plusieurs cordons sont attachés au même sommet.

ÉQUILIBRE DES FORCES APPLIQUÉES A DES CORDONS QUI PASSENT PAR UN MÊME POINT.

383. Soient P et Q deux forces qui agissent aux extrémités d'une corde supposée flexible et inextensible. Si ces forces se font équilibre, la corde doit être tendue en ligne droite, et ces forces doivent être égales et contraires; car si ces deux forces n'avaient pas la même direction que le cordon, rien ne les empêcherait de le faire tourner, et si, étant dans la même direction, elles n'étaient pas égales et contraires elles feraient avancer la corde dans sa direction. La valeur commune des deux forces est ce qu'on appelle la *tension du fil.*

384. Si trois forces P, Q, R, agissent sur un point A, par l'intermédiaire de trois cordons qui se réunissent en ce point, et si elles se font équilibre, l'une quelconque de ces forces devra être égale et directement opposée à la résultante des deux autres; d'où l'on conclut que ces trois cordons sont dans un même plan, et que chaque force peut être représentée en grandeur par le sinus de l'angle formé par les directions des deux autres.

Fig. 131.



385. Supposons qu'on fixe un point B du cordon AP. La force P devient alors inutile, et en la supprimant on ne troublera pas l'équilibre. La pression que supporte le point B, égale et directement contraire à la force P qu'il faudrait appliquer en ce point devenu libre, pour rétablir l'équilibre, est donc égale et contraire à la résultante des forces Q et R. Si l'on fixe à la fois un point B du cordon AP et un point C du cordon AQ, la pression que supporte le point C sera égale et contraire à Q.

CAS OU L'UNE DES CORDES PEUT GLISSER DANS UN ANNEAU.

386. Si les deux forces P et Q sont appliquées aux extrémités d'une corde PAQ, qui passe dans un anneau retenu par une troisième force R, quand l'équilibre aura lieu, il ne sera pas détruit en supposant l'anneau fixe. Alors le cordon PAQ ayant la liberté de glisser dans cet anneau, si les forces P et Q sont égales entre-elles, elles se font équilibre; si elles sont inégales, on peut décomposer la plus grande en deux parties : l'une égale à l'autre force et qui détruira celle-ci, l'autre égale à leur différence et qui fera mouvoir le cordon suivant sa direction, d'où l'on conclut que $P = Q$ est la condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait équilibre quand l'anneau est fixe.

Fig. 132.

387. On peut encore démontrer ce résultat de la manière suivante : Si l'équilibre est établi, il ne sera pas troublé quand on fixera deux points B et C pris respectivement sur les cordons AP et AQ. Dans tous les mouvements que le point A peut prendre, la somme de ses distances aux deux points B et C demeure constante, de sorte que, dans tous ses déplacements, le point A reste sur un ellipsoïde de révolution. On peut donc supprimer

le cordon BAC, pourvu qu'on regarde le point A comme assujetti à rester constamment sur cette surface. Mais alors, pour que ce point soit en équilibre, il faut que le cordon AR, suivant lequel est dirigée la force R, soit normal à la surface; et comme celle-ci est de révolution, la normale est dirigée dans le plan de la courbe méridienne suivant la bissectrice de l'angle PAQ; mais la bissectrice est la direction de la résultante des forces P et Q. Donc $P = Q$.

388. Si l'on représente ces deux forces par les droites égales AF, AG, prises sur leur direction, leur résultante sera représentée par la diagonale AD du losange AFDG. Or en désignant par α l'angle BAC, on a

$$AD = 2\,AF \cos\frac{1}{2}\alpha;$$

donc, puisque la force R doit être égale et directement opposée à cette résultante, on a

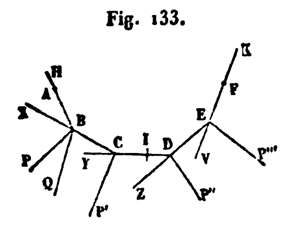
$$R = 2P\cos\frac{1}{2}\alpha.$$

R représente également la pression supportée par le point A, quand on fixe l'anneau.

ÉQUILIBRE DU POLYGONE FUNICULAIRE.

389. Considérons maintenant un polygone funiculaire ou un système de points, A, B, C, D, E, F, liés entre eux par des cordons. Le premier et le dernier cordon, AB et EF, sont sollicités par des forces H et K dirigées nécessairement suivant les prolongements de ces cordons, sans quoi il n'y aurait pas équilibre. Aux différents som-

Fig. 133.



mets B, C, D, E sont appliquées des forces quelconques P, P′, P″, P‴, agissant par l'intermédiaire de cordons qui se réunissent en ces points. Il est inutile de supposer plus de trois cordons réunis au même sommet; car si l'on avait, au sommet B, un autre cordon sollicité par une force Q, on pourrait composer cette force avec la première et ne considérer que la résultante des deux forces P et Q.

390. *Dans l'état d'équilibre, chaque cordon, tel que* CD, *doit être tiré par deux forces égales et contraires qu'on peut supposer appliquées à ses deux extrémités.* En effet, si l'on coupait le cordon CD au point I, l'équilibre serait détruit et chacun des deux points C et D serait entraîné dans une certaine direction. Les deux forces qui solliciteraient ces deux points étant actuellement détruites par la liaison que le cordon établit entre eux, sont nécessairement contraires et dirigées suivant le prolongement du cordon CD. Chacune de ces forces représente la tension du cordon.

391. Ce principe conduit aux conditions d'équilibre du polygone funiculaire.

La force P et la force H, dont on peut supposer le point d'application transporté de A en B, ont une résultante X dirigée suivant le prolongement du cordon CB. En effet, puisqu'il y a équilibre, il ne sera pas troublé, si l'on suppose le point C fixe, et on voit bien alors que X doit avoir la direction BC. La force X mesure en même temps la tension du cordon BC; car puisqu'il y a équilibre, celui-ci doit être tiré en C par une force égale et contraire à X. En transportant X au point C, on voit de même que la résultante Y des deux forces X et P′ est dirigée suivant le prolongement de CD et mesure la tension de ce cordon. Cette tension Y est donc la résultante des forces H, P, P′ transportées parallèlement à elles-mêmes au point C. En continuant ainsi, on verra que

la tension V du dernier cordon s'obtient en composant les forces H, P, P′, P″, P‴ transportées parallèlement à elles-mêmes au point E, et comme il y a équilibre, cette force V est égale et directement contraire à la dernière force K.

Ainsi *toutes les forces immédiatement appliquées au polygone funiculaire, transportées parallèlement à elles-mêmes en un point quelconque, se font équilibre autour de ce point, et la tension de chaque cordon est la résultante de toutes les forces qui agissent d'un même côté de ce cordon.*

392. On peut arriver à ce résultat d'une autre manière, en supposant le polygone solidifié de telle sorte que les droites qui joignent les points consécutifs ne puissent pas changer de longueur. Il en résulte d'abord que toutes les forces transportées parallèlement à elles-mêmes en un point doivent s'y faire équilibre. Ensuite l'équilibre ne devant pas être troublé, si, en supprimant la partie DEC, on applique au point D, suivant le prolongement CD, une force égale à la tension Y de ce cordon, il faut que la force Y et toutes celles qui agissent sur la partie conservée ABCD, se détruisent. La tension du cordon CD est donc égale à la résultante des forces H, P, P′, comme on l'a vu par l'autre méthode.

393. En supposant connue la figure du polygone en équilibre, on peut déterminer le rapport de deux forces ou de deux tensions quelconques. En effet, comme chaque sommet doit être séparément en équilibre sous l'action des forces et des tensions qui y sont appliquées, on a

$$\frac{H}{P}=\frac{\sin PBC}{\sin ABC},\quad \frac{P}{X}=\frac{\sin ABC}{\sin ABP},$$

$$\frac{X}{P'}=\frac{\sin P'CD}{\sin BCD},\quad \frac{P'}{Y}=\frac{\sin BCD}{\sin BCP'},$$

et ainsi de suite.

Si l'on veut avoir le rapport de deux forces ou tensions quelconques, on multipliera un certain nombre de ces proportions terme à terme.

394. Lorsque l'on connaît la grandeur et la direction des forces, les conditions d'équilibre peuvent s'exprimer analytiquement par trois équations. Appelons a, b, c; e, f, g; α, β, γ; $\alpha', \beta', \gamma', \ldots$, les angles que font avec trois axes rectangulaires les directions des forces données H, K, P, P',..., on aura

$$(1)\quad \begin{cases} H\cos a + K\cos e + P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + \ldots = 0, \\ H\cos b + K\cos f + P\cos\beta + P'\cos\beta' + \ldots = 0, \\ H\cos c + K\cos g + P\cos\gamma + P'\cos\gamma' + \ldots = 0. \end{cases}$$

395. Réciproquement, si ces conditions sont remplies, c'est-à-dire *si les forces sont telles, que, transportées parallèlement à elles-mêmes en un point quelconque, elles s'y fassent équilibre, il y aura toujours une figure d'équilibre :* en d'autres termes, on pourra toujours assigner au polygone dont les côtés sont donnés, une figure telle, qu'il demeure en équilibre sous l'action de ces forces.

En effet, plaçons le premier côté AB du polygone dans la direction de la première force H. Dirigeons ensuite le second côté BC dans le prolongement de la résultante X des deux forces H et P. Plaçons de même le côté suivant CD dans le prolongement de la résultante des forces X et P', ou, ce qui revient au même, des forces H, P, P' transportées parallèlement à elles-mêmes au point C, et ainsi de suite. Il est évident, d'après cette construction, que les sommets B, C, D resteront en équilibre sous l'action des forces H, P, P', P''; il en sera de même du dernier sommet E. En effet, il résulte des équations (1) que le cordon EF a la direction de la force K et que celle-ci est égale et directement opposée à la résultante de toutes les forces H, P, P', P'', P'''.

396. Supposons fixées les extrémités A et F du polygone funiculaire, dont la forme est donnée. On peut supprimer les forces H et K, sans détruire l'équilibre. Or, en supposant connues les forces P, P′, P″, . . . , on peut se proposer de déterminer les pressions que supportent les points fixes A et F, pressions égales et contraires aux forces H et K.

Puisqu'on suppose connue la figure du polygone, on connaît les directions (a, b, c); (e, f, g) de ces pressions. Leurs intensités s'obtiennent au moyen des deux proportions

$$\frac{H}{P} = \frac{\sin PBC}{\sin ABC}, \quad \frac{K}{P'''} = \frac{\sin DEP'''}{\sin DEF}.$$

397. Si la figure du polygone n'est pas donnée, on aura, pour déterminer les huit inconnues H, K, a, b, c, e, f, g, d'abord les cinq équations

$$\begin{aligned} H\cos a + K\cos e + P\cos\alpha + \ldots &= 0,\\ H\cos b + K\cos f + P\cos\beta + \ldots &= 0,\\ H\cos c + K\cos g + P\cos\gamma + \ldots &= 0;\end{aligned}$$

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1,$$
$$\cos^2 e + \cos^2 f + \cos^2 g = 1.$$

On obtiendra trois autres équations en exprimant que la différence des coordonnées de même nom des extrémités A et F du polygone est égale à la projection du polygone sur l'axe correspondant.

CAS OU IL Y A DES ANNEAUX

398. S'il y a au sommet B un anneau tiré par la force P, et dans lequel passe le seul cordon ABC, on aura (386) H = X et la direction prolongée de la force P partagera l'angle ABC en deux parties égales. La même chose peut se dire de tous les anneaux, en sorte que si tous les sommets portent des anneaux, les tensions de tous les cordons

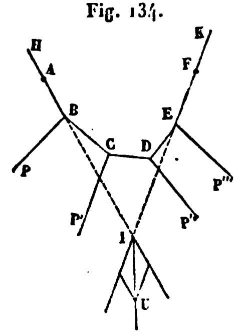
sont égales, d'où résulte que $H = K$. Toutes les forces peuvent alors s'exprimer au moyen de la tension H et des angles B, C,... du polygone par les formules

$$P = 2H\cos\frac{1}{2}B,\quad P' = 2H\cos\frac{1}{2}C,\ldots.$$

399. Si l'on se donnait la figure du polygone, on connaîtrait par là en grandeur et en direction les forces qu'il faudrait appliquer à chaque sommet pour le tenir en équilibre. Ces forces prises en sens contraire seraient les pressions exercées sur les points B, C, D,... s'ils devenaient des points fixes sur lesquels passerait la corde ABC...F.

400. Supposons que les cordes extrêmes AB, EF soient dans un même plan. Soit I le point de rencontre de leurs directions, et soit U une force égale et contraire à la résultante de H et de K. D'après un principe connu (391), U est la résultante des forces P, P′, P″, P‴. Par conséquent, pour avoir la tension des cordons extrêmes, il suffit de décomposer suivant leurs directions la résultante de toutes les forces transportées parallèlement à elles-mêmes au point de rencontre de ces cordons.

Fig. 134.



401. Si toutes ces forces sont parallèles, si elles représentent des poids, par exemple, tout le polygone est compris dans un même plan vertical. Pour exprimer que toutes les forces transportées parallèlement à elles-mêmes en un point se font équilibre, il suffira de deux équations. Si l'on prend deux axes dans le plan des forces, l'un horizontal, l'autre vertical, et si a et b, e et f

sont les angles formés avec ces axes par les cordons extrêmes, on aura

$$H \cos a + K \cos e = o,$$

$$H \cos b + K \cos f + P + P' + P'' + \ldots = o;$$

la première équation exprime que les composantes horizontales des tensions H et K sont égales et contraires.

CAS OU IL Y A PLUSIEURS CORDONS A UN MÊME SOMMET DU POLYGONE.

402. Nous avons supposé qu'il n'y avait que trois forces appliquées à un même sommet du polygone. Quand un nombre quelconque de cordons, sollicités par des forces, se réunissent en un même point, il faut, pour l'équilibre, que l'une quelconque d'entre elles soit égale et directement contraire à la résultante de toutes les autres.

Fig. 135.

A

P

Si l'on fixe un point sur chacun des cordons, excepté sur un seul AP, on peut se proposer de trouver les pressions que la force P exerce sur les points fixes. S'il n'y a que trois cordons, non situés dans le même plan, la question se résoudra en décomposant la force P en trois autres agissant suivant les prolongements des cordons. S'il y a plus de trois cordons, le problème devient indéterminé, puisqu'on peut décomposer la force P d'une infinité de manières en d'autres forces dirigées suivant ces cordons. Cette indétermination est analogue à celle que l'on rencontre quand on cherche les pressions exercées par un corps contre un plan sur lequel ce corps repose par plus de trois points.

TRENTE ET UNIÈME LEÇON.

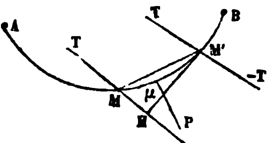
ÉQUILIBRE D'UN FIL FLEXIBLE.

Direction de la tension dans un fil en équilibre. — Équations de l'équilibre d'un fil sollicité par de petites forces. — Intégration de ces équations. — Valeur de la tension en chaque point du fil. — Forme affectée par le fil.

DIRECTION DE LA TENSION DANS UN FIL EN ÉQUILIBRE.

403. Soit AMB un fil flexible, d'une très-petite épaisseur, attaché par ses extrémités à deux points fixes A et B, et dont tous les points sont sollicités par de très-petites forces.

Fig. 136.



Soit M un point quelconque de ce fil. Les deux parties AM, MB exercent l'une sur l'autre, dans l'état d'équilibre, des actions moléculaires égales et contraires. On ne connaît pas la nature de ces actions, mais on admet que toutes celles qui proviennent de AM agissant sur MB, se réduisent à une force unique T appliquée au point M, et de même que la partie MB exerce sur AM une action qui se réduit à une force égale et contraire à T. La valeur commune de ces deux forces est ce qu'on appelle *la tension du fil* au point M. On pourra donc, si l'équilibre existe, supprimer la partie AM, pourvu qu'on applique au point M une force égale à T.

404. En considérant le fil comme la limite d'un polygone funiculaire dont les côtés deviennent infiniment petits, on est conduit à admettre que *la tension s'exerce suivant la tangente au point* M *à la courbe que forme*

le fil. Mais on peut démontrer directement ce principe de la manière suivante :

Fixons un point M′, voisin de M, sur le fil et solidifions la partie intermédiaire MM′; l'équilibre ne sera pas troublé. Mais alors, d'après les conditions d'équilibre d'un système dans lequel se trouve un point fixe, les couples qui résultent de la translation au point M′ de la force T et des forces qui agissent sur tous les points matériels du fil compris entre M et M′, doivent se détruire. Comme ces forces ne sont pas nécessairement dans un même plan, le moment du couple (T, — T) est moindre que la somme des moments des couples provenant de la translation des autres forces ou au plus égal à cette somme.

Si l'on abaisse la perpendiculaire M′H sur la direction de la force T, et si l'on désigne par θ l'angle M′MH, le moment du couple (T, — T) est

$$T.M'H = T.MM'\sin\theta.$$

Soient μ la masse d'un point compris entre M et M′ et P la force appliquée à ce point, rapportée à l'unité de masse; μP sera la force motrice appliquée à ce point. Le moment du couple (μP, — μP) est plus petit que $\mu P.\mu M'$ et *à fortiori* que $\mu P.MM'$.

La somme des moments de tous les couples analogues est donc moindre que $MM'.P_1\Sigma\mu$, P_1 désignant la plus grande valeur de la force P dans toute la portion MM′ du fil et $\Sigma\mu$ la somme des masses des molécules qui composent cette portion du fil.

On a donc

$$T.MM'\sin\theta < P_1.MM'\Sigma\mu,$$

d'où

$$\sin\theta < \frac{P_1}{T}\Sigma\mu.$$

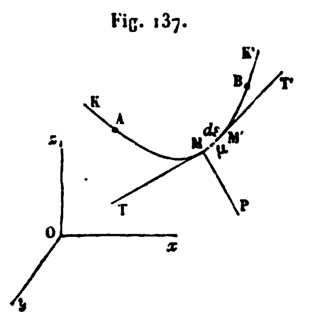
La tension T a une valeur finie, car elle doit faire

équilibre aux forces qui sollicitent la partie BM. Comme l'inégalité précédente a lieu quelque petit que soit l'arc MM′, on voit que si le point M′ se rapproche indéfiniment du point M, $\sin\theta$ et par conséquent θ deviendra plus petit que toute quantité donnée. Mais à la limite la corde MM′ devient la tangente en M à la courbe; donc c'est suivant la tangente qu'agit la tension T.

ÉQUILIBRE D'UN FIL SOLLICITÉ PAR DE PETITES FORCES.

405. Cherchons maintenant les conditions d'équilibre d'un fil AMB, fixé à ses deux extrémités A (a, b, c) et B (a', b', c') et dont tous les points sont sollicités par de petites forces. Soient M (x, y, z) et M′$(x+dx, y+dy, z+dz)$ deux points infiniment rapprochés sur le fil. Soit $MM' = ds$. Si T et T′ sont les tensions du fil aux points M et M′, l'arc MM′ doit être en équilibre sous l'action de T, de T′ et des forces qui sollicitent les points compris entre M et M′. Cet équilibre a encore lieu, si l'on suppose l'arc MM′ solidifié. Donc les forces doivent être telles, qu'en les transportant parallèlement à elles-mêmes en un point elles se fassent équilibre.

Fig. 137.



406. Soient ε le produit de la section normale par la densité au point M, P la force qui agit en ce point, et X, Y, Z ses composantes parallèles à trois axes Ox, Oy, Oz. L'arc MM′ étant infiniment petit, on peut considérer ε, X, Y, Z comme constants pour tous les points de MM′. Or T agissant dans le sens M′M, ses composantes seront

$$-T\frac{dx}{ds},\quad -T\frac{dy}{ds},\quad -T\frac{dz}{ds}.$$

Les composantes de T′ seront égales à celles de T, prises en sens contraire et augmentées de leurs différentielles,

$$T\frac{dx}{ds}+d\left(T\frac{dx}{ds}\right),\quad T\frac{dy}{ds}+d\left(T\frac{dy}{ds}\right),\quad T\frac{dz}{ds}+d\left(T\frac{dz}{ds}\right).$$

D'ailleurs en considérant MM′ comme un petit cylindre,

$$X\epsilon ds,\quad Y\epsilon ds,\quad Z\epsilon ds,$$

sont les sommes des composantes des forces qui agissent sur les points de l'arc MM′. On a donc

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &d\left(T\frac{dx}{ds}\right)+X\epsilon ds=0,\\ &d\left(T\frac{dy}{ds}\right)+Y\epsilon ds=0\\ &d\left(T\frac{dz}{ds}\right)+Z\epsilon ds=0.\end{aligned}\right.$$

Dans la question qui nous occupe il n'y a qu'une seule variable indépendante; supposons que ce soit x. Les équations (1) serviront à déterminer y, z, et l'inconnue auxiliaire T en fonction de x. Ces équations sont nécessaires et suffisantes, et nous allons vérifier, après leur intégration, que si elles ont lieu, toutes les forces qui agissent sur le fil, en y comprenant les tensions K et K′, aux extrémités A et B de ce fil, satisferont aux six équations générales de l'équilibre.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS (1).

407. Intégrons d'abord la première des équations (1) par rapport à s, entre les limites qui correspondent aux extrémités du fil, dont la longueur est l, on aura

$$(2)\qquad \int_0^l d\left(T\frac{dx}{ds}\right)+\int_0^l X\epsilon ds=0.$$

Soient e, f, g; e', f', g' les angles que les tangentes à

la courbe aux points A et B font avec les axes, et K, H les forces qui proviennent de la fixité des points A, B, forces égales et directement opposées aux tensions des éléments extrêmes du fil. Cette équation devient

$$(3) \qquad \mathrm{K}\cos e + \mathrm{K}'\cos e' + \int_0^l \mathrm{X}\varepsilon ds = 0;$$

elle signifie que *la somme algébrique des composantes parallèles à l'axe* Ox, *de toutes les forces qui agissent sur le fil, est nulle*. En intégrant les deux autres équations du système (1), on arriverait à la même conclusion, par rapport aux deux autres axes. Ainsi les trois premières équations de l'équilibre (365) sont satisfaites.

408. On peut aussi retrouver les équations des moments. Multiplions les deux premières équations (1) par y et x, et retranchons la première de la seconde. Il en résulte

$$xd\left(\mathrm{T}\frac{dy}{ds}\right) - yd\left(\mathrm{T}\frac{dx}{ds}\right) + \left(\mathrm{Y}x - \mathrm{X}y\right)\varepsilon ds = 0.$$

Or

$$xd\left(\mathrm{T}\frac{dy}{ds}\right) - yd\left(\mathrm{T}\frac{dx}{ds}\right) = d\left(x\mathrm{T}\frac{dy}{ds} - y\mathrm{T}\frac{dx}{ds}\right):$$

par conséquent, en intégrant entre o et l, on aura

$$\mathrm{K}(a\cos f - b\cos e) + \mathrm{K}'(a'\cos f' - b'\cos e') + \int_0^l (\mathrm{Y}x - \mathrm{X}y)\varepsilon ds = 0$$

Cette équation signifie que *la somme des moments de toutes les forces qui agissent sur le fil, par rapport à l'axe* Oz, *est nulle*. On obtiendrait de même les équations des moments par rapport aux deux autres axes.

La même chose peut se dire d'une partie quelconque du fil, pourvu qu'on joigne aux forces qui sollicitent tous ses points, deux forces appliquées tangentiellement à ses extrémités et équivalentes aux tensions que cette partie éprouverait de la part du reste du fil.

409. La première des équations (1) peut être mise sous la forme

$$dT\frac{dx}{ds} + Td\frac{dx}{ds} + X\varepsilon ds = 0.$$

Soient α, β, γ les angles que la tangente au point M fait avec les axes et λ, μ, ν les angles que le rayon de courbure ρ fait avec les mêmes axes : on a

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \quad d\frac{dx}{ds} = \frac{ds\cos\lambda}{\rho};$$

les équations (1) peuvent donc s'écrire comme il suit :

$$(4) \quad \begin{cases} dT\cos\alpha + \dfrac{T\,ds}{\rho}\cos\lambda + X\varepsilon ds = 0, \\ dT\cos\beta + \dfrac{T\,ds}{\rho}\cos\mu + Y\varepsilon ds = 0, \\ dT\cos\gamma + \dfrac{T\,ds}{\rho}\cos\nu + Z\varepsilon ds = 0. \end{cases}$$

Sous cette forme elles expriment qu'il y a équilibre entre la force dT dirigée suivant la tangente, la force $\frac{T\,ds}{\rho}$ dirigée suivant le rayon de courbure et la force motrice $P\varepsilon ds$ de l'élément de masse. D'où l'on conclut que le plan osculateur à la courbe est déterminé par la tangente et par la direction de la force P.

VALEUR DE LA TENSION.

410. Pour obtenir la tension, multiplions les équations (4) respectivement par $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, ou $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$. En observant que

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$
$$\cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu = 0,$$

on aura

$$dT + \varepsilon(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = 0,$$

d'où

(5) $$dT = -\varepsilon(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

La différentielle de la tension se trouve ainsi exprimée en fonction des composantes de la force qui agit au point considéré.

411. Si la densité et l'épaisseur ne changent pas dans toute l'étendue du fil, alors ε est constant; si l'on suppose en outre que

$$\varepsilon(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

soit la différentielle exacte d'une fonction de x, y, z, $-f(x, y, z)$, alors on aura

$$T = f(x, y, z) + C;$$

et pour un autre point x', y', z',

$$T' = f(x', y', z') + C,$$

d'où

(6) $$T - T' = f(x, y, z) - f(x', y', z').$$

Ainsi *quand* $\varepsilon(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$ *est une différentielle exacte, l'accroissement de tension, quand on passe d'un point à un autre, est indépendant de la figure du fil,* puisqu'il est indépendant de la relation qui existe entre x, y et z.

412. Un pareil cas se présente lorsque toutes les forces qui sollicitent le fil lui sont normales. Puisque $\frac{X}{P}$, $\frac{Y}{P}$, $\frac{Z}{P}$ sont les cosinus des angles que la force fait avec les axes, on a

$$\frac{X}{P}\frac{dx}{ds} + \frac{Y}{P}\frac{dy}{ds} + \frac{Z}{P}\frac{dz}{ds} = 0$$

ou

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0.$$

On a donc

$$dT = 0, \quad \text{d'où} \quad T = C,$$

c'est-à-dire que la tension est constante. Dans ce cas, les équations (4) deviennent

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{T}{\rho}\cos\lambda = -X\varepsilon, \\ \dfrac{T}{\rho}\cos\mu = -Y\varepsilon, \\ \dfrac{T}{\rho}\cos\nu = -Z\varepsilon; \end{cases}$$

élevant au carré et ajoutant, on aura

$$\frac{T^2}{\rho^2} = (X^2 + Y^2 + Z^2)\varepsilon^2;$$

et comme

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = P^2,$$

il en résulte

$$T = P\rho\varepsilon,$$

ou

$$(8)\qquad P = \frac{T}{\rho\varepsilon}.$$

Comme la tension est constante, on voit que *la force motrice est en raison inverse du rayon de courbure.*

Soient α', β', γ' les angles que la force P fait avec les axes: on a

$$X = P\cos\alpha' = \frac{T}{\rho\varepsilon}\cos\alpha',$$

$$Y = P\cos\beta' = \frac{T}{\rho\varepsilon}\cos\beta',$$

$$Z = P\cos\gamma' = \frac{T}{\rho\varepsilon}\cos\gamma'.$$

En substituant ces valeurs dans les équations (7), on a

$$(9)\qquad \cos\alpha' = \cos\lambda,\quad \cos\beta' = \cos\mu,\quad \cos\gamma' = \cos\nu,$$

d'où l'on conclut que la force P est dirigée suivant le prolongement du rayon de courbure du fil au point M.

413. Ces circonstances sont réalisées lorsqu'un fil est tendu sur une surface S par deux forces qui le tirent à

ses extrémités, car l'équilibre étant supposé exister, la résistance de la surface en ses différents points équivaut à de petites forces normales à cette surface, et par conséquent au fil. La tension du fil doit donc être la même en tous ses points, et par conséquent les forces qui le tirent à ses extrémités doivent être égales entre elles et à cette tension. En outre, le plan osculateur du fil est en chaque point normal à la surface fixe, d'où il résulte que *ce fil traverse sur la surface la ligne la plus courte entre deux quelconques de ses points.*

COURBE FORMÉE PAR LE FIL.

414. Pour avoir la courbe formée par le fil, il faut éliminer T entre les équations (1). On peut à cet effet commencer par intégrer ces équations, ce qui donne

$$-T\frac{dx}{ds} = A + \int X\varepsilon ds,$$

$$-T\frac{dy}{ds} = B + \int Y\varepsilon ds,$$

$$-T\frac{dz}{ds} = C + \int Z\varepsilon ds,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{dx}{A + \int X\varepsilon ds} = \frac{dy}{B + \int Y\varepsilon ds} = \frac{dz}{C + \int Z\varepsilon ds}.$$

415. Mais si l'on veut arriver à des équations purement différentielles, on commencera par éliminer dT entre les équations (1) mises sous cette forme :

$$Td\frac{dx}{ds} + dT\frac{dx}{ds} + X\varepsilon ds = 0,$$

$$Td\frac{dy}{ds} + dT\frac{dy}{ds} + Y\varepsilon ds = 0,$$

$$Td\frac{dz}{ds} + dT\frac{dz}{ds} + Z\varepsilon ds = 0;$$

on obtient ainsi

$$(a)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{X\,dy - Y\,dx}{ds}\,\varepsilon &= T\left(\frac{dx}{ds}\,d\frac{dy}{ds} - \frac{dy}{ds}\,d\frac{dx}{ds}\right),\\ \frac{X\,dz - Z\,dx}{ds}\,\varepsilon &= T\left(\frac{dz}{ds}\,d\frac{dx}{ds} - \frac{dx}{ds}\,d\frac{dz}{ds}\right); \end{aligned}\right.$$

d'où

$$(b)\qquad \frac{X\,dy - Y\,dx}{X\,dz - Z\,dx} = \frac{dx\,d\dfrac{dy}{ds} - dy\,d\dfrac{dx}{ds}}{dz\,d\dfrac{dx}{ds} - dx\,d\dfrac{dz}{dx}}.$$

On a d'ailleurs

$$(c)\qquad dT = -\,\varepsilon(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

On substituera dans cette équation la valeur de T tirée d'une des équations (a), et l'on aura une équation contenant les différentielles de y considérée comme fonction de x jusqu'au troisième ordre et celles de z jusqu'au deuxième. L'équation (b) ne les contient qu'au deuxième seulement. L'intégration de ces équations introduira donc cinq constantes arbitraires, que l'on déterminera en exprimant que la courbe passe par deux points donnés et qu'elle a une longueur donnée.

TRENTE-DEUXIÈME LEÇON.

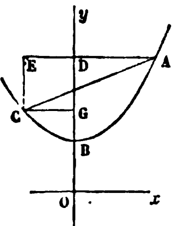
CHAINETTE. — COURBE DES PONTS SUSPENDUS.

Équation différentielle de la chaînette. — Équation de la chaînette en termes finis. — Propriétés de la chaînette. — Détermination de la tension en un point quelconque de la chaînette. — Remarque sur le centre de gravité de cette courbe. — Courbe des ponts suspendus. — Valeur de la tension. — Autre méthode — Construction de la courbe.

ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE LA CHAINETTE.

416. La courbe ABC, formée par un fil pesant et homogène, suspendu à deux points fixes A et C, a reçu le nom de *chaînette*.

Fig. 138.



Cette courbe est contenue dans le plan vertical passant par les points A et C; car si une portion de cette courbe était hors de ce plan, en la supposant solidifiée, et fixant les points où elle rencontre le plan, elle tournerait autour de la droite qui joint ces points, à cause de la pesanteur de ses molécules. Prenons ce plan vertical pour plan de xy et traçons deux axes rectangulaires Ox et Oy, le premier horizontal et le second vertical et dirigé de bas en haut. Le système des équations (1), n° 406, se réduit à

$$d\left(\mathrm{T}\frac{dx}{ds}\right) + \varepsilon \mathrm{X}\, ds = 0, \quad d\left(\mathrm{T}\frac{dy}{ds}\right) + \varepsilon \mathrm{Y}\, ds = 0.$$

417. On peut mettre ces équations sous une forme plus simple. En premier lieu on a $\mathrm{X} = 0$. Ensuite le fil étant supposé homogène, si ϖ est le poids de l'unité de lon-

gueur, ϖds sera le poids d'un élément ds. On aura donc $\varepsilon Y ds = \varpi ds$, et les deux équations se réduisent à

$$(1)\qquad d\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0,\quad d\left(T\frac{dy}{ds}\right) = \varpi ds.$$

418. La première équation donne $T\frac{dx}{ds} = \text{const.}$ Appelons ϖh la tension au point le plus bas de la courbe, tension qui s'exerce horizontalement. On aura

$$T\frac{dx}{ds} = \varpi h,\quad \text{d'où}\quad T = \varpi h\frac{ds}{dx}.$$

Portant cette valeur dans la seconde équation, on a

$$(2)\qquad ds = hd\frac{dy}{dx}.$$

Telle est l'*équation différentielle de la chaînette*. Il s'agit maintenant de l'intégrer.

ÉQUATION DE LA CHAINETTE EN TERMES FINIS.

419. En remplaçant ds par $dx\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}$, puis $\frac{dy}{dx}$ par p, il vient

$$(1)\qquad dx = \frac{h\,dp}{\sqrt{1+p^2}},$$

d'où

$$(2)\qquad x = h\,l\left(\frac{dy}{dx} + \sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}\right).$$

Il faudrait ajouter une constante; mais on peut supposer cette constante nulle, si l'on prend pour axe des y la verticale qui passe par le point le plus bas de la courbe, sans du reste fixer l'origine; car, dans cette hypothèse, on doit avoir $x = 0$ pour $\frac{dy}{dx} = 0$.

420. On tire de l'équation (2)

$$\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}+\frac{dy}{dx}=e^{\frac{x}{h}},$$

$$\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}-\frac{dy}{dx}=e^{-\frac{x}{h}};$$

ajoutant et retranchant successivement ces équations l'une de l'autre, on a

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{h}}-e^{-\frac{x}{h}}\right),$$

$$\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{h}}+e^{-\frac{x}{h}}\right).$$

Ces deux équations s'intègrent immédiatement. La première donne

(3) $$y=\frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}}+e^{-\frac{x}{h}}\right),$$

et la seconde, en remplaçant le radical $\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}$ par $\frac{ds}{dx}$,

(4) $$s=\frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}}-e^{-\frac{x}{h}}\right).$$

Il n'y a pas de constante à ajouter dans ces deux intégrales, si l'on prend pour origine sur la verticale qui passe par le point B, un point tel que $OB=h$, et si en outre on convient de compter les arcs à partir du point B.

PROPRIÉTÉS DE LA CHAINETTE.

421. D'après son équation

(1) $$y=\frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}}+e^{-\frac{x}{h}}\right),$$

la chaînette est symétrique par rapport à l'axe des y.

En comparant les équations différentielles avec celles qui résultent de leur intégration, on trouve

(2) $$y = h\frac{ds}{dx},$$

(3) $$s = h\frac{dy}{dx},$$

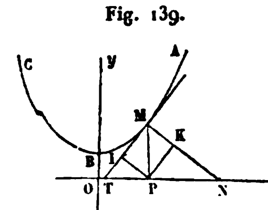
d'où

(4) $$y^2 - s^2 = h^2.$$

En voici l'interprétation géométrique :

La première signifie qu'en chaque point M de la chaînette, la projection MK de l'ordonnée de la courbe sur la normale MN est constante et égale à h. En effet,

Fig. 139.



$$MK = y\cos PMK = \frac{y}{\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}}.$$

L'équation (3) exprime que la projection MI de l'ordonnée sur la tangente MT est égale à l'arc BM, compté à partir du point le plus bas de la courbe. En effet

$$MI = IP\tang T = h\frac{dy}{dx};$$

mais $\frac{dy}{dx} = \frac{s}{h}$: donc

(5) $$MI = s.$$

Enfin l'équation (4), conséquence des deux autres, signifie que la longueur désignée par h, l'arc MB et l'ordonnée y forment un triangle rectangle dont l'ordonnée est l'hypoténuse.

422. On peut obtenir les formules précédentes d'une manière un peu différente. Reprenons l'équation (418)

(6) $$ds = hd\frac{dy}{dx}.$$

Elle donne d'abord l'équation (3). En y remplaçant *as*

par $dx\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}$, on a

$$(7)\qquad dx\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}=h\,d\frac{dy}{dx},$$

d'où

$$dy=\frac{dy}{dx}dx=\frac{dy}{dx}h\frac{d\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}},$$

d'où, en intégrant,

$$(8)\qquad y=h\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}=h\frac{ds}{dx}.$$

On verra comme précédemment qu'il n'y a pas de constantes à ajouter à ces valeurs.

423. La courbe, lieu des points I tels que MI = arc BM, est une développante de la chaînette. La droite IP est tangente à cette courbe au point I, et la longueur IP de cette tangente comprise entre le point I et l'axe des x est constante et égale à h.

424. *Le rayon de courbure de la chaînette est égal à la normale* MN, *mais dirigé en sens contraire.* En effet, l'équation

$$dx\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}=h\,d\frac{dy}{dx}$$

donne

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}}{h};$$

donc, si ρ désigne le rayon de courbure, on a

$$\rho=\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}=h\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right).$$

Mais l'équation

$$y = h\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}$$

donne

$$1+\frac{dy^2}{dx^2}=\frac{y^2}{h^2}.$$

Donc enfin

(9) $$\rho=\frac{y^2}{h}:$$

mais

$$MN = y\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}} = y\times\frac{y}{h}=\frac{y^2}{h};$$

donc

(10) $$\rho = MN.$$

D'ailleurs ce rayon de courbure est en sens inverse de la normale MN : en effet, on sait qu'il est toujours dans la concavité de la courbe ; mais celle-ci tourne sa convexité vers l'axe des x, puisque son équation étant $ds = h\,d\frac{dy}{dx}$, et s croissant en même temps que x, la dérivée seconde $\frac{d^2y}{dx^2}$ est toujours positive.

DE LA TENSION EN UN POINT DE LA CHAINETTE.

425. On a vu (418) que $T = \varpi h\frac{ds}{dx}$; donc, puisque $y = h\frac{ds}{dx}$, on a

(1) $$T = \varpi y$$

Ainsi *la tension de la chaînette en chaque point est proportionnelle à l'ordonnée de ce point.* Au point le plus bas, pour lequel $y = h$, on trouve $T = \varpi h$, comme on devait s'y attendre.

426. On peut encore obtenir la tension au moyen de la formule générale

$$dT = -\varepsilon(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

Ici on a

$$X = 0, \quad Z = 0, \quad Y = \varpi;$$

donc

$$dT = \varpi\, dy,$$

d'où

$$T = \varpi y.$$

On n'ajoute pas de constante, parce que l'on doit avoir $T = \varpi h$ pour $y = h$.

CONSTRUCTION DE LA CHAINETTE.

427. Menons (*fig.* 141, p. 59) la verticale CE et les horizontales AE et CG qui rencontrent l'axe des y en D et G. Posons

$$AE = a, \quad CE = b, \quad ABC = l;$$

$$AD = k, \quad DE = k', \quad OB = h, \quad BD = f.$$

a, b et l sont connues, et il s'agit de déterminer k, k', h et f.

On a d'abord une première relation en exprimant que la somme des arcs BA et BC est égale à l. Or de

$$s = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}}\right)$$

on tire

$$BA = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{k}{h}} - e^{-\frac{k}{h}}\right), \quad BC = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{k'}{h}} - e^{-\frac{k'}{h}}\right);$$

par conséquent

$$(1) \qquad l = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{k}{h}} - e^{-\frac{k}{h}} + e^{\frac{k'}{h}} - e^{-\frac{k'}{h}}\right).$$

On a une autre équation en calculant les ordonnées des points A et C et égalant leur différence à b :

$$(2) \qquad b = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{k}{h}} + e^{-\frac{k}{h}} - e^{\frac{k'}{h}} - e^{-\frac{k'}{h}}\right).$$

On peut remplacer ces deux équations par les deux suivantes :

$$(3)\qquad \begin{cases} l+b = h\left(e^{\frac{k}{h}} - e^{-\frac{k'}{h}}\right), \\ l-b = h\left(e^{\frac{k'}{h}} - e^{-\frac{k}{h}}\right), \end{cases}$$

qui, multipliées membre à membre et observant que $k + k' = a$, donnent

$$l^2 - b^2 = h^2\left(e^{\frac{a}{h}} + e^{-\frac{a}{h}} - 2\right),$$

d'où

$$(4)\qquad \sqrt{l^2 - b^2} = h\left(e^{\frac{a}{2h}} - e^{-\frac{a}{2h}}\right).$$

428. Cette équation ne contient que la seule inconnue h. Pour la résoudre, posons $\frac{a}{2h} = \theta$, $\sqrt{l^2 - b^2} = an$, d'où

$$\frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2\theta} = n,$$

et en développant le numérateur en série,

$$(5)\qquad \frac{\theta^2}{1.2.3} + \frac{\theta^4}{1.2.3.4.5} + \ldots = n - 1.$$

Observons que l'on a $n > 1$, car

$$n = \frac{\sqrt{l^2 - b^2}}{a} > \frac{\sqrt{\overline{AC}^2 - b^2}}{a} = 1:$$

or pour $\theta = 0$ le premier membre de l'équation (5) est nul, et il est infini pour $\theta = \infty$. D'ailleurs il croît avec θ d'une manière continue. Il existe donc toujours une valeur de θ, et une seule, qui rend le premier membre égal à $n - 1$.

429. Si l est peu supérieur à la corde AC, $n - 1$ et par suite θ est une quantité très-petite. On peut donc

avec une grande approximation, poser

$$\frac{\theta^2}{6} = n - 1,$$

d'où

$$\theta = \sqrt{6(n-1)} = \sqrt{6\left(\frac{\sqrt{l^2 - b^2}}{a} - 1\right)},$$

on aura ensuite h au moyen de la formule $h = \frac{a}{2\theta}$

430. L'équation

$$l + b = h\left(e^{\frac{k}{h}} - e^{-\frac{k'}{h}}\right),$$

à cause de $k + k' = a$ devient

$$l + b = h\left(1 - e^{-\frac{a}{h}}\right) e^{\frac{k}{h}},$$

d'où l'on tirera k. Enfin on aura k' par l'équation

$$k' = a - k,$$

et l'on obtiendra la quatrième inconnue f au moyen de l'équation évidente

$$h + f = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{k}{h}} + e^{-\frac{k}{h}}\right).$$

431. Si les deux points A et C sont à la même hauteur, on a $b = 0$ et les formules se simplifient. On a alors $k = k' = \frac{a}{2}$, puisque la courbe est symétrique par rapport à By.

REMARQUE SUR LE CENTRE DE GRAVITÉ DE LA CHAINETTE.

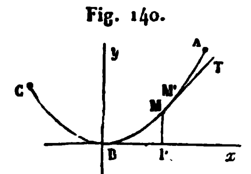
432. Le calcul des variations apprend que de toutes les courbes d'une longueur donnée, tracées sur un plan entre deux points donnés et qui tournent autour d'un

axe situé dans ce plan, la chaînette est celle qui engendre l'aire minimum. Il résulte de là que, de toutes les courbes qui remplissent les mêmes conditions, la chaînette est celle dont le centre de gravité est le plus voisin de cet axe, ou le plus bas si celui-ci est horizontal; car la surface engendrée ayant pour mesure, d'après le théorème de Guldin, la longueur de l'arc multipliée par la circonférence que décrit le centre de gravité de cet arc, on voit que cette circonférence sera la plus petite possible dans le cas de la surface de révolution minimum.

COURBE DES PONTS SUSPENDUS.

433. Soit un fil homogène ABC, suspendu à deux points fixes A et C, et dont les éléments sont sollicités par des forces verticales proportionnelles aux projections de ces éléments sur une horizontale Bx. La courbe affectée par ce fil est celle que forme la chaîne d'un pont suspendu lorsqu'on néglige le poids de la chaîne elle-même.

Fig. 140.



Il est clair d'abord que la courbe formée par cette chaîne est dans le plan vertical mené par AC. Traçons dans ce plan deux axes, l'un vertical, l'autre horizontal. En appelant T la tension au point M, et ϖ la force totale qui sollicite une portion de la chaîne dont la projection horizontale est égale à l'unité de longueur, on a par les formules générales (406)

$$(1) \qquad d\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0, \quad d\left(T\frac{dy}{ds}\right) = \varpi\, dx.$$

Si l'on appelle ϖh la tension de la courbe en son point le plus bas, on a, en intégrant la première équation,

$$(2) \qquad T\frac{dx}{ds} = \varpi h.$$

On voit déjà que la composante horizontale de la tension est constante. Portant cette valeur de T dans la seconde équation, on aura

$$hd\frac{dy}{dx} = dx,$$

d'où

(3) $$h\frac{dy}{dx} = x.$$

Il n'y a pas de constante à ajouter, si l'on convient de prendre pour origine le point le plus bas de la courbe, car alors on doit avoir $\frac{dy}{dx} = 0$ pour $x = 0$. En intégrant cette équation, l'on a

(4) $$2hy = x^2.$$

On n'ajoute pas de constante, parce qu'on doit avoir simultanément $x = 0$, $y = 0$.

On voit que la courbe est *une parabole* dont l'axe est vertical et dont le sommet est au point B.

VALEUR DE LA TENSION.

434. La tension T se détermine au moyen de la relation (2)

$$T = \varpi h\frac{ds}{dx}.$$

L'équation (4) donne $\frac{ds}{dx} = \frac{\sqrt{h^2 + x^2}}{h}$, et par conséquent

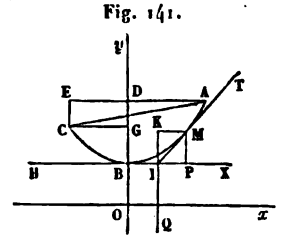
(5) $$T = \varpi\sqrt{h^2 + x^2}.$$

Ainsi la tension, égale à ϖh pour $x = 0$, augmente avec x.

AUTRE MANIÈRE D'OBTENIR LES RÉSULTATS PRÉCÉDENTS.

435. On peut arriver sans intégration aux résultats précédents. Soit ABC la courbe cherchée. Prenons pour axes la tangente BX au point le plus bas et la droite By perpendiculaire à BX.

Fig. 141.



Soient M un point quelconque de la courbe, T la tension en ce point, H la tension au point B. En supposant la partie BM solidifiée, il doit y avoir équilibre entre T, H et toutes les forces qui sollicitent les éléments compris entre les points B et M. Ces dernières ont une résultante Q dont la direction rencontre BP en son milieu I. En effet, si l'on partage l'arc BM en un très-grand nombre d'éléments ayant des projections égales, la force qui sollicite chaque élément pourra être considérée comme ayant son point d'application au milieu de la projection correspondante. Leur résultante Q doit donc passer par le milieu I de BP. Cette force devant faire équilibre aux tensions H et T, il faut que la tangente MT prolongée passe au point I. En outre les trois forces H, T, Q se faisant équilibre, on doit avoir

$$\frac{H}{Q}=\frac{IP}{IK}.$$

Or la force Q étant proportionnelle à x, on peut poser

$$Q=\varpi x,$$

en désignant par ϖ la force totale qui tire une portion de la corde dont la projection est égale à l'unité. Soit aussi comme précédemment $\varpi h = H$: comme $IP=\frac{x}{2}$, $IK=y$,

la proportion précédente peut s'écrire

$$\frac{\varpi h}{\varpi x} = \frac{\frac{x}{2}}{y},$$

d'où

$$2hy = x^2:$$

la courbe est donc une parabole.

436. On obtiendrait, d'une manière analogue, la tension au point M. On a, en effet,

$$\frac{T}{H} = \frac{IM}{IP},$$

ou

$$\frac{T}{\varpi h} = \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{4h^2}} : \frac{x}{2},$$

d'où

$$T = \varpi\sqrt{h^2 + x^2}.$$

CONSTRUCTION DE LA COURBE D'APRÈS LES DONNÉES

437. Menons (*fig.* 141, p. 59) les horizontales AE, CG et la verticale CE. Les quantités connues sont

$$AE = a, \quad CE = b, \quad ABC = l;$$

celles que l'on cherche sont

$$BD = f, \quad AD = k, \quad DE = k'$$

et la tension h.

De l'équation de la courbe

$$2hy = x^2$$

on déduit immédiatement

$$2hf = k^2, \quad 2h(f - b) = k'^2$$

d'où

$$2hb = k^2 - k'^2 = (k + k')(k - k') = a(k - k'),$$

à cause de $k + k' = a$. On a donc

$$k - k' = \frac{2hb}{a}, \quad k + k' = a,$$

d'où

$$k = \frac{a}{2} + \frac{bh}{a}, \quad k' = \frac{a}{2} - \frac{bh}{a}.$$

438. Il faut maintenant exprimer que la longueur de la courbe ABC est égale à l. Or on a

$$ds = dx\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = \frac{1}{h}\,dx\sqrt{h^2 + x^2},$$

d'où l'on tire facilement

$$s = \frac{x}{2h}\sqrt{h^2 + x^2} + \frac{h}{2}\,\mathrm{l}\left(x + \sqrt{h^2 + x^2}\right) - \frac{h}{2}\,\mathrm{l}\,h,$$

en déterminant la constante par la condition que l'on ait $s = 0$ pour $x = 0$.

En faisant tour à tour dans cette formule $x = k$, $x = k'$ et ajoutant les résultats, on aura

$$\begin{aligned} 2hl = k\sqrt{h^2 + k^2} + k'\sqrt{h^2 + k'^2} + h^2\,\mathrm{l}\left(k + \sqrt{h^2 + k^2}\right) \\ + h^2\,\mathrm{l}\left(k' + \sqrt{h^2 + k'^2}\right) - 2h^2\,\mathrm{l}\,h. \end{aligned}$$

Les valeurs de k et de k' étant substituées, on aura une équation transcendante d'une forme très-compliquée. Cette équation se simplifie, quand les points A et C sont à la même hauteur : alors $b = 0$, $k = k' = \frac{a}{2}$ et l'on a

$$hl = k\sqrt{h^2 + k^2} + h^2\,\mathrm{l}\,\frac{k + \sqrt{h^2 + k^2}}{h}.$$

TRENTE-TROISIÈME LEÇON.

PRINCIPE DES VITESSES VIRTUELLES.

Définition de la vitesse virtuelle. — Définition du moment virtuel. — Énoncé général du principe des vitesses virtuelles. — Démonstration de ce principe dans le cas d'un point matériel, — de deux points matériels dont la distance est invariable, — dans le cas général d'un système à liaisons complètes.

DÉFINITION DE LA VITESSE VIRTUELLE.

439. Soient A, A′, A″,..., des points matériels quelconques soumis à de certaines conditions, comme d'être assujettis à rester sur des courbes ou des surfaces données ou à se trouver à des distances invariables les uns des autres.

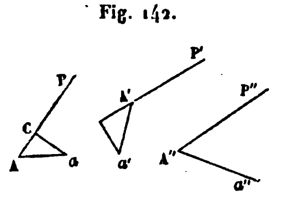
Supposons tout le système transporté de la position qu'il occupe dans une position infiniment voisine qui satisfasse à toutes les conditions données. On appelle *vitesse virtuelle* ou déplacement virtuel de l'un quelconque de ces points la droite infiniment petite Aa qui joint sa première position à la seconde. Le mot *virtuel* indique que le mouvement attribué au système est seulement possible, mais il n'a pas réellement lieu, et l'on n'a pas à considérer les forces qui seraient capables d'opérer ce mouvement.

DÉFINITION DU MOMENT VIRTUEL.

440. Supposons maintenant qu'on applique aux points matériels A, A′, A″,... des forces P, P′, P″,... et désignons par p, p', p'',... les projections des déplacements virtuels Aa, A′a',..., sur les directions de ces forces. Si AC $= p$ est l'une de ces projections, on convient de regarder p comme positive ou négative, selon qu'elle est

dirigée à partir du point A dans le même sens que la force P ou en sens contraire, ou, ce qui revient au même, selon que l'angle PAa formé par la direction de la force avec celle du déplacement est aigu ou obtus. On appelle *moment virtuel* (*) *de la force* P *le produit de la valeur absolue de cette force par la projection p du déplacement virtuel* Aa *de son point d'application.* Le moment virtuel Pp a donc le même signe que p. Il est nul si la droite Aa est perpendiculaire à la direction de la force P

Fig. 142.



441. On peut donner une autre forme à ce moment. On a

$$Pp = P \times Aa \times \cos PAa = P \cos PAa \times Aa;$$

mais si l'on désigne par T la composante de la force P suivant le déplacement Aa, on a $T = P \cos PAa$; donc

$$Pp = T \times Aa.$$

Ainsi *le moment virtuel est égal au produit du déplacement virtuel multiplié par la composante de la force suivant la direction du déplacement.*

On voit que le *moment virtuel* d'une force et la *quantité de travail élémentaire* ont la même expression; mais la première quantité ne suppose aucun mouvement du système dû aux forces qui le sollicitent actuellement.

ÉNONCÉ DU PRINCIPE DES VITESSES VIRTUELLES.

442. *Si des forces en nombre quelconque se font équilibre sur un système de points matériels assujettis à des conditions données, la somme des moments virtuels est*

(*) Cette quantité s'appelle aussi *travail virtuel de la force* P.

nulle pour tout déplacement virtuel compatible avec les conditions données, et réciproquement, *il y aura équilibre si la somme des moments virtuels est nulle pour tous les mouvements possibles du système.*

Ainsi la condition nécessaire et suffisante pour l'équilibre est que l'on ait

$$Pp + P'p' + P''p'' + \ldots = 0.$$

Nous démontrerons d'abord ce principe pour le cas d'un point unique et pour celui de deux points liés par une droite de longueur invariable.

ÉQUILIBRE D'UN POINT MATÉRIEL.

443. Soit R la résultante d'un nombre quelconque de forces P, P', P''.... appliquées à un même point A et soit Aa une droite quelconque finie ou infiniment petite menée par le point A. Appelons r, p, p', p'',... les projections de Aa sur R, P, P', P'',..., ces quantités étant affectées de signes d'après les conventions faites plus haut, je dis que *le moment virtuel de la résultante est égal à la somme des moments virtuels des composantes.*

Fig. 143.

En effet, si λ, α, α', α'',... désignent les angles que les forces R, P, P',... font avec Aa, on a

$$R\cos\lambda = P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + \ldots.$$

Soit $Aa = \sigma$, on aura

$$R\sigma\cos\lambda = P\sigma\cos\alpha + P'\sigma\cos\alpha' + P''\sigma\cos\alpha'' \ldots;$$

mais

$$\sigma\cos\lambda = r, \quad \sigma\cos\alpha = p, \quad \sigma\cos\alpha' = p';$$

donc on aura

$$Rr = Pp + P'p' + P''p'' + \ldots.$$

444. Il résulte de là que si les forces P, P', P'' se font

équilibre et si le point A est libre dans l'espace, on aura pour tout déplacement du point A, puisque $R = 0$,

$$Pp + P'p' + P''p'' + \ldots = 0,$$

ce qui démontre le principe des vitesses virtuelles dans le cas particulier d'un seul point matériel entièrement libre dans l'espace.

445. Ce principe se vérifie aussi facilement quand le point A est assujetti à demeurer sur une surface donnée

Fig. 144.

S. Tout déplacement infiniment petit Aa de ce point s'effectue alors dans le plan tangent à la surface. Il en résulte que pour l'équilibre du point A il faut et il suffit que la résultante R soit normale à la surface, et qu'on ait par conséquent R ou $Rr = 0$, ou

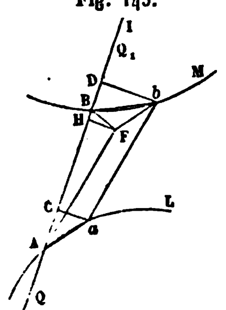
$$Pp + P'p' + P''p'' + \ldots = 0.$$

Même démonstration si le point A était assujetti à se trouver sur une courbe donnée.

ÉQUILIBRE DE DEUX POINTS MATÉRIELS UNIS PAR UNE DROITE RIGIDE.

446. *Si l'on applique aux extrémités d'une droite rigide et inflexible* AB *deux forces égales et contraires dirigées suivant cette droite, leurs moments virtuels seront égaux et de signes contraires.*

Fig. 145.



Supposons que le mouvement virtuel amène AB en ab : menons la droite AF parallèle et égale à ab. La figure AFba étant un parallélogramme, les projections AC et HD de Aa et Fb sont égales et dirigées

dans le même sens, en allant de A vers C, puis de H vers D. Or il suffit évidemment de faire voir que le rapport des projections $AC = q$, $BD = q_1$, tend vers l'unité, lorsque les points a et b se rapprochent de A et de B, en se mouvant sur des courbes quelconques AL et BM, et qu'en outre ces deux projections, en devenant infiniment petites, sont dirigées dans le même sens, l'une de A vers C, l'autre de B vers D.

Maintenant on a

$$\frac{HB}{HD} = \frac{HB}{BF}\frac{BF}{HD} = \frac{HB}{BF}\frac{BF}{AC};$$

mais dans le cercle décrit du point A comme centre, avec AB comme rayon, et qui passe par le point F, on a

$$\overline{BF}^2 = BH.2AB;$$

par conséquent

$$\frac{BH}{BF} = \frac{BF}{2AB}.$$

Donc

$$\lim \frac{BH}{BF} = 0.$$

D'un autre côté $\lim \frac{BF}{AC}$ n'est pas infinie, à moins que Aa ne soit perpendiculaire à AB. En effet, BF et AC sont deux grandeurs indépendantes l'une de l'autre, puisque pour transporter AB en ab, on peut d'abord faire tourner cette droite autour du point A, puis la transporter parallèlement à elle-même en ab. On conçoit alors que le rapport des droites BF et AC doit tendre en général vers une limite finie qui dépend de la nature des courbes AL et BM.

Le rapport $\frac{HB}{HD}$ a donc pour limite 0. Il s'ensuit que le rapport

$$\frac{BD}{HD} = \frac{BC}{AC} = \frac{q_1}{q}$$

tend vers l'unité et que BD est dirigé dans le sens HD ou AC. Ainsi les projections infiniment petites q_1 et q sont égales et dirigées dans le même sens. D'ailleurs les forces Q et Q_1 sont égales et contraires. Donc leurs moments sont égaux et de signes contraires, et l'on a

$$Qq + Q_1 q_1 = 0.$$

447. La même chose peut se démontrer par le calcul. Soient $x, y, z; x', y', z'$, les coordonnées rectangulaires des points A et B. Ces points peuvent être regardés comme assujettis à se mouvoir le long de deux courbes arbitraires AL et BM, avec la condition que l'on ait toujours

$$(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 = l^2,$$

l désignant la longueur de AB. On aura donc, puisque l est une constante,

$$\begin{aligned}&\frac{(x' - x)}{l} dx + \frac{y' - y}{l} dy + \frac{z' - z}{l} dz \\ &= \frac{x' - x}{l} dx' + \frac{y' - y}{l} dy' + \frac{z' - z}{l} dz'.\end{aligned}$$

Soient $ds = \mathrm{A}a$, $ds' = \mathrm{B}b$ les éléments des courbes AL, BM correspondant à une position infiniment voisine de la droite AB. La relation précédente peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned}&ds\left(\frac{x' - x}{l}\frac{dx}{ds} + \frac{y' - y}{l}\frac{dy}{ds} + \frac{z' - z}{l}\frac{dz}{ds}\right) \\ &= ds'\left(\frac{x' - x}{l}\frac{dx'}{ds'} + \frac{y' - y}{l}\frac{dy'}{ds'} + \frac{z' - z}{l}\frac{dz'}{ds'}\right);\end{aligned}$$

mais on a

$$\cos \mathrm{BA}a = \frac{x' - x}{l}\frac{dx}{ds} + \frac{y' - y}{l}\frac{dy}{ds} + \frac{z' - z}{l}\frac{dz}{ds},$$

$$\cos \mathrm{IB}b = \frac{x' - x}{l}\frac{dx'}{ds'} + \frac{y' - y}{l}\frac{dy'}{ds'} + \frac{z' - z}{l}\frac{dz'}{ds'},$$

pourvu que ds et ds' soient positifs, condition qui peut

toujours être remplie en prenant convenablement les origines de ces arcs. On a donc

$$ds \cos \mathrm{BA}a = ds' \cos \mathrm{IB}b$$

ou

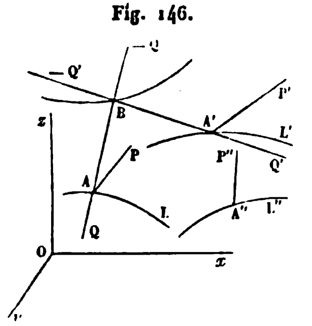
$$q = q_1;$$

d'ailleurs les forces Q et Q_1 sont égales et de sens contraires : donc la somme de leurs moments virtuels est nulle.

DÉMONSTRATION DU PRINCIPE DES VITESSES VIRTUELLES DANS LE CAS D'UN SYSTÈME A LIAISONS COMPLÈTES.

448. Soient A (x, y, z), A′ (x', y', z'), A″ (x'', y'', z''),... un nombre quelconque n de points assujettis à des conditions données. Ces conditions seront ordinairement exprimées par un certain nombre d'équations entre les coordonnées de ces points. Le nombre des équations doit d'ailleurs être moindre que $3n$, sans quoi chaque point aurait une position fixe et resterait en repos quelles que fussent les forces appliquées au système; mais il peut être égal à $3n - 1$. Dans ce cas, où le système est dit à *liaisons complètes*, tous les points sont assujettis à demeurer sur des courbes données AL, A′L′,..., et le déplacement de l'un des points entraîne celui de tous les autres. En effet, en éliminant x', y', z', x'', y'', z'', etc., on tirera des équations données les valeurs de y et de z en fonction de x, savoir :

Fig. 146.



$$y = \varphi(x), \quad z = \psi(x),$$

et ces équations représenteront une courbe AL, sur laquelle le point A (x, y, z) sera obligé de demeurer. On

verra de la même manière que les autres points ne peuvent se mouvoir que sur des courbes déterminées. En outre, toutes les variables moins une, x, pouvant s'exprimer en fonction de celle-ci, quand on connaîtra la position de l'un des points, A par exemple, celles de tous les autres seront déterminées : les déplacements infiniment petits qu'on peut faire subir aux points du système ont donc avec l'un d'eux des relations qui résultent des $3n - 1$ équations données.

449. Chaque point peut se mouvoir sur la courbe dans deux sens contraires, ce qui donne lieu à deux moments virtuels égaux et de signes contraires. C'est d'ailleurs ce qu'on peut voir par le calcul. Soit

$$f(x, y, z, x', y', z', \ldots) = 0,$$

une des $3n - 1$ équations de condition. On peut la différentier en y regardant une seule des variables comme indépendante, ce qui donne

$$\frac{df}{dx}\delta x + \frac{df}{dy}\delta y + \frac{df}{dz}\delta z + \frac{df}{dz'}\delta x' + \ldots = 0.$$

On aurait en tout $3n - 1$ équations semblables. Or si elles sont satisfaites par de certaines valeurs de δx, δy, δz, $\delta x'$, ..., elles le sont évidemment aussi par les mêmes valeurs prises avec des signes contraires, d'où résulte pour chaque point deux déplacements égaux et dirigés en sens contraires.

450. Supposons qu'on applique aux points A, A', A'', ..., des forces P, P', P'', ..., telles, qu'il y ait équilibre. Nous pouvons ne considérer qu'une seule force en chaque point, puisque, s'il y en avait plusieurs, la somme de leurs moments virtuels serait égale au moment virtuel de leur résultante. Prenons sur une surface quelconque un point B qui soit lié avec les points A et A' par deux droites rigides AB, A'B, mobiles autour du point

B. Appliquons en A et B, suivant AB, deux forces Q, — Q égales et contraires, puis en A et B, suivant A′B, deux forces Q′, — Q′ égales et contraires. L'état du système ne sera pas changé.

Quand le point B se déplace infiniment peu, il est obligé de se mouvoir sur une courbe déterminée, car il doit être sur une surface donnée et rester à des distances également données des points A et A′. Cela posé, appelons toujours $p, p', p'', \ldots$, les projections positives ou négatives des vitesses virtuelles des points d'application, A, A′, A″, etc. Désignons par Qq le moment virtuel de la force Q appliquée au point A, et par $Q'q'$ celui de la force Q′ appliquée au point A′. L'intensité de Q′ étant arbitraire, on peut en disposer de manière que les forces P′ et Q′ appliquées au point A′ tiennent ce point en équilibre sur la courbe A′L′. Il est nécessaire et suffisant, pour cela, que la somme de leurs moments virtuels soit nulle (446) ou que l'on ait

$$P'p' + Q'q' = 0.$$

On peut alors supprimer P′ et Q′ appliquées en A′. On peut aussi disposer de l'intensité de la force Q, de sorte que les deux forces — Q, — Q′ tiennent le point B en équilibre sur la courbe où il est obligé de demeurer, ce qui exige, puisque les moments virtuels de ces deux forces sont, d'après le lemme précédent, $-Qq$ et $-Q'q'$, que l'on ait

$$Qq + Q'q' = 0;$$

de là et de l'équation précédente on déduit

$$Qq = P'p'.$$

Ainsi l'état du système ne sera pas changé si l'on supprime la force P′ appliquée au point A′, pourvu que l'on applique au point A une force Q dont le moment virtuel soit égal à celui de la force P′.

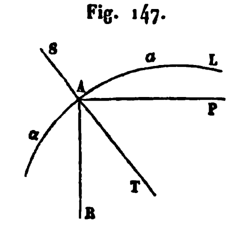
On pourra de même supprimer les forces appliquées aux autres points A'', A''',..., pourvu qu'on applique au point A des forces dont les moments soient égaux à $P''p''$, $P'''p'''$,....

On n'aura donc plus que des forces appliquées au point A. Donc, pour que le système soit en équilibre, il faut et il suffit que ces forces se fassent équilibre et par conséquent que la somme de leurs moments soit nulle. On aura donc

$$Pp + P'p' + P''p'' + \ldots = 0.$$

451. S'il n'y a pas équilibre, les forces appliquées au point A donneront une résultante R qui ne sera ni nulle ni normale à la courbe Aa et qui par conséquent aura un moment virtuel Rr plus grand ou plus petit que zéro, selon qu'elle tendra à faire mouvoir le point A dans le sens Aa ou dans le sens contraire, c'est-à-dire selon qu'elle fera avec Aa un angle aigu ou un angle obtus.

Fig. 147.



Or

$$Rr = Pp + P'p' + \ldots = \Sigma Pp;$$

donc selon que la somme ΣPp sera positive ou négative, les forces tendent à mouvoir le système dans le sens Aa ou dans le sens contraire. Et si le mouvement Aa est empêché, il faut et il suffit, pour qu'il y ait équilibre, que ΣPp soit nulle ou négative.

TRENTE-QUATRIÈME LEÇON.

SUITE DU PRINCIPE DES VITESSES VIRTUELLES.

Démonstration du principe dans le cas d'un système à liaisons incomplètes. — Cas où les liaisons sont exprimées par des inégalités. — Autre forme de l'équation des vitesses virtuelles. — Usage de cette équation pour trouver les conditions d'équilibre.

SYSTÈME A LIAISONS INCOMPLÈTES.

452. Nous allons maintenant étendre le principe des vitesses virtuelles à un système à liaisons incomplètes, ou dans lequel les coordonnées des points sont liées entre elles par un nombre i d'équations, i étant $< 3n - 1$.

Je dis d'abord que s'il y a équilibre, la somme des moments virtuels est nulle. Considérons en effet l'un quelconque des déplacements compatibles avec les liaisons du système. On peut établir de nouvelles liaisons au nombre de $3n - 1 - i$, telles, que le déplacement virtuel en question devienne le seul possible. Mais alors les forces qui agissent sur tous ces points dont le système est devenu à liaisons complètes, se faisant encore équilibre, la somme de leurs moments virtuels doit être égale à zéro. Cette somme est donc nulle pour tout mouvement virtuel compatible avec les conditions du système.

453. Réciproquement, quand la somme des moments virtuels est nulle, l'équilibre existe. En effet, si les forces appliquées au système pouvaient le mettre en mouvement, tous les points éprouveraient simultanément des déplacements très-petits pendant un temps très-court. On pourrait, sans changer ce mouvement, établir de nouvelles conditions qui rendraient le système à liaisons

complètes, et qui empêcheraient tout le mouvement virtuel différent de celui qu'on suppose avoir lieu. On aurait donc un système à liaisons complètes, dans lequel la somme des moments virtuels serait nulle et qui ne serait pas en équilibre.

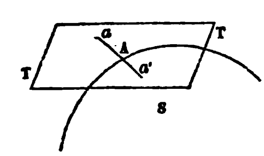
Le théorème des vitesses virtuelles se trouve donc étendu à un système quelconque.

LIAISONS QUI S'EXPRIMENT PAR DES INÉGALITÉS.

434. Quand les liaisons qui existent entre les différents points d'un système sont exprimées par des équations, chacun d'eux peut éprouver deux déplacements égaux et de sens contraires. Mais dans certains systèmes il n'en est pas ainsi.

Par exemple, concevons un point A placé sur une surface fixe S, dans l'intérieur de laquelle il lui est impossible de pénétrer, c'est-à-dire qu'il peut se mouvoir d'un côté du plan tangent, mais non de l'autre. Il est clair que s'il se meut dans le plan tangent, il pourra toujours se déplacer dans deux sens opposés Aa et Aa'; mais pour tout autre mouvement son déplacement sera possible dans un sens et impossible dans l'autre.

Fig. 148.



435. Les conditions de cette espèce sont ordinairement exprimées par des inégalités. Par exemple, si un point est posé sur un plan fixe et ne peut se déplacer que d'un côté de ce plan, en prenant celui-ci pour plan des xy et prenant l'axe des z dans le sens de son mouvement possible, on aura pour ce point $z \geqq 0$, et il faudra exprimer que la variation de z est nulle ou positive, c'est-à-dire poser l'inégalité

$$\delta z \geqq 0.$$

De plus on exprimera qu'un point ne peut pénétrer

dans l'intérieur d'une sphère fixe dont le centre serait à l'origine des coordonnées, au moyen de la relation

$$x^2 + y^2 + z^2 \overline{\gtrless} R^2,$$

R étant le rayon de la sphère, et si le point est actuellement posé sur la surface sphérique, on aura en le déplaçant

$$x\delta x + y\delta y + z\delta z \overline{\gtrless} 0.$$

456. Si le système A, A′, A″,.... est assujetti à des conditions de ce genre, le principe des vitesses virtuelles subit une modification. Il suffit alors, pour l'équilibre, que la somme des moments virtuels des forces soit nulle ou négative pour chaque mouvement virtuel de cette espèce. Si le système est à liaisons complètes, cela résulte de ce que nous avons dit plus haut (457) dans le cas où le mouvement du point A est empêché dans un certain sens. Si le système est à liaisons incomplètes, le théorème se démontre en introduisant un certain nombre de conditions telles, que le système devienne à liaisons complètes.

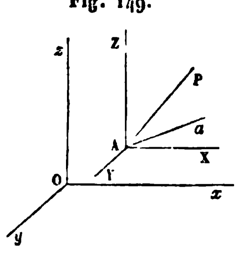
AUTRE FORME DE L'ÉQUATION DES VITESSES VIRTUELLES.

457. L'équation

$$(1) \qquad Pp + P'p' + P''p'' + \ldots = 0$$

peut se mettre sous une forme plus commode. Soient X, Y, Z les composantes parallèles aux axes de la force P appliquée en A. Désignons par δx, δy, δz les variations des coordonnées de ce point pour un déplacement virtuel Aa, compatible avec l'état du système, de sorte que les coordonnées du point a soient $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$.

Fig. 149.



Le moment virtuel de la force P étant égal à la somme

des moments virtuels de ses composantes, on a

$$Pp = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z;$$

on a de même

$$P'p' = X'\delta x' + Y'\delta y' + Z'\delta z',$$

et ainsi de suite. En substituant ces valeurs dans l'équation (1), elle devient

$$(2) \qquad \Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0.$$

CONDITIONS D'ÉQUILIBRE D'UN SYSTÈME.

458. Voici maintenant comment on déduit du principe général des vitesses virtuelles les conditions d'équilibre d'un système donné. Supposons que les liaisons qui existent entre les divers points du système soient exprimées par les équations

$$(3) \qquad L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0, \ldots.$$

Ces équations devant être satisfaites par les nouvelles coordonnées des points, après un déplacement infiniment petit compatible avec l'état du système, on aura

$$(2) \quad \begin{cases} \dfrac{dL}{dx}\delta x + \dfrac{dL}{dy}\delta y + \dfrac{dL}{dz}\delta z + \dfrac{dL}{dx'}\delta x' + \ldots = 0, \\ \dfrac{dM}{dx}\delta x + \dfrac{dM}{dy}\delta y + \dfrac{dM}{dz}\delta z + \dfrac{dM}{dx'}\delta x' + \ldots = 0, \\ \dfrac{dN}{dx}\delta x + \dfrac{dN}{dy}\delta y + \dfrac{dN}{dz}\delta z + \dfrac{dN}{dx'}\delta x' + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Pour bien comprendre ces équations, il faut concevoir qu'aux i équations données on ait ajouté $3n - 1 - i$ équations nouvelles, telles, que le déplacement considéré devienne le seul possible. Alors toutes les variables moins une deviennent fonctions de celles-ci, et on peut, sous ce point de vue, différentier les équations (1). D'ailleurs on ne diminue pas ainsi la généralité de la question, puisque le déplacement particulier que l'on considère

peut être l'un quelconque de ceux qui sont compatibles avec l'état du système.

459. Les équations (2) au nombre de i contiennent $3n$ variations δx, δy, δz,...; il y en a $3n - i$ qui sont arbitraires, et les autres, au nombre de i, dépendent de celles-là. Si on porte les valeurs des dernières dans l'équation

$$(3) \qquad \sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0,$$

celle-ci contiendra seulement $3n - i$ termes multipliés chacun par l'une des $3n - i$ variations arbitraires, et comme la relation (3) doit être vérifiée quelles que soient ces variations, il faudra égaler à zéro leurs $3n - i$ coefficients. On aura ainsi $3n - i$ équations qui, jointes aux équations (1), donneront $3n$ équations nécessaires et suffisantes pour l'équilibre, entre les composantes des forces et les coordonnées de leurs points d'application.

460. L'élimination de i variations au moyen du système (2) peut se faire par la méthode des multiplicateurs. Multiplions la première par λ, la seconde par μ, etc., et ajoutons-les membre à membre avec l'équation (3). Déterminons les quantités λ, μ,... qui sont au nombre de i par la condition que les coefficients de i variations soient nuls et égalons à zéro les $3n - i$ autres coefficients. Nous aurons les $3n$ équations suivantes :

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} X + \lambda \dfrac{dL}{dx} + \mu \dfrac{dM}{dx} + \nu \dfrac{dN}{dx} + \ldots = 0, \\ Y + \lambda \dfrac{dL}{dy} + \mu \dfrac{dM}{dy} + \nu \dfrac{dN}{dy} + \ldots = 0, \\ Z + \lambda \dfrac{dL}{dz} + \mu \dfrac{dM}{dz} + \nu \dfrac{dN}{dz} + \ldots = 0. \\ X' + \lambda \dfrac{dL}{dx'} + \mu \dfrac{dM}{dy'} + \nu \dfrac{dN}{dz'} + \ldots = 0. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

461. Réciproquement, si ces équations ont lieu, je dis que les forces se font équilibre; car, en multipliant ces équations respectivement par δx, δy, δz, $\delta x'$,... et ajoutant, on retrouve l'équation

$$\left(X + \lambda \frac{dL}{dx} + \mu \frac{dM}{dx} + \ldots\right)\delta x$$
$$+ \left(Y + \lambda \frac{dL}{dy} + \mu \frac{dM}{dy} + \ldots\right)\delta y + \ldots = o,$$

qui se réduit à l'équation (3), en ayant égard aux relations (2) : or l'équation (3) exprime que la somme des moments virtuels est nulle.

462. Les équations (4) conduisent à une conséquence remarquable. On voit qu'elles resteront les mêmes et que l'équilibre actuel du système subsistera si l'on supprime la condition $L = o$, à laquelle le système devait satisfaire dans tous ses déplacements, pourvu qu'on joigne aux forces primitives de nouvelles forces, savoir une force appliquée en A et dont les composantes parallèles aux axes seraient

$$\lambda \frac{dL}{dx}, \quad \lambda \frac{dL}{dy}, \quad \lambda \frac{dL}{dz},$$

une force appliquée en A' et dont les composantes seraient

$$\lambda \frac{dL}{dx'}, \quad \lambda \frac{dL}{dy'}, \quad \lambda \frac{dL}{dz'},$$

et ainsi de suite. La liaison exprimée par l'équation $L = o$ produit donc ces forces.

L'intensité de la force qu'il faut appliquer au point A, par exemple, est égale à

$$\lambda \sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2},$$

et sa direction est celle de la normale à la surface représentée par l'équation

$$L = o,$$

quand on y regarde x, y, z comme seules variables, puisque les cosinus des angles que la normale fait avec les axes sont proportionnels à $\frac{dL}{dx}$, $\frac{dL}{dy}$, $\frac{dL}{dz}$.

Les conditions $M = o$, $N = o$, etc., peuvent de même être supprimées, pourvu que l'on applique à tous les points du système des forces convenables. Ces forces auxiliaires, qui peuvent tenir lieu des liaisons qui existent entre tous les points, sont celles qui produisent les tensions et les pressions dans les liaisons du système.

Enfin, si l'on supprime toutes les liaisons, ce qui rend tous les points libres, on voit que les forces $P, P', \ldots$ appliquées à ces points libres sont détruites par les forces

$$\lambda\frac{dL}{dx}, \quad \mu\frac{dM}{dx}, \quad \nu\frac{dN}{dx}, \ldots$$
$$\lambda\frac{dL}{dy}, \quad \mu\frac{dM}{dy}, \quad \nu\frac{dN}{dy}, \ldots$$
$$\lambda\frac{dL}{dz}, \quad \mu\frac{dM}{dz}, \quad \nu\frac{dN}{dz}, \ldots$$

appliquées au point A,

$$\lambda\frac{dL}{dx'}, \quad \mu\frac{dM}{dx'}, \quad \nu\frac{dN}{dx'}, \ldots$$
$$\lambda\frac{dL}{dy'}, \quad \mu\frac{dM}{dy'}, \quad \nu\frac{dN}{dy'}, \ldots$$
$$\lambda\frac{dL}{dz'}, \quad \mu\frac{dM}{dz'}, \quad \nu\frac{dN}{dz'}, \ldots$$

appliquées au point A', ainsi de suite.

SUR LES DIVERS MOUVEMENTS VIRTUELS D'UN SYSTÈME.

463. Un mouvement virtuel quelconque se compose de $3n - i$ mouvements virtuels particuliers et distincts.

Soient $\delta_1 x$, $\delta_1 y$, $\delta_1 z$, $\delta_1 x'$, ... les variations des coordonnées des points pour un premier mouvement; $\delta_2 x$, $\delta_2 y$, $\delta_2 z$, $\delta_2 x'$, ... pour un second mouvement. Enfin, k étant égal à $3n - i$, soient $\delta_k x$, $\delta_k y$, $\delta_k z$, $\delta_k x'$, ... les variations des coordonnées pour un $k^{\text{ième}}$ mouvement. On a les équations

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dL}{dx}\delta x + \dfrac{dL}{dy}\delta y + \dfrac{dL}{dz}\delta z + \dfrac{dL}{dx'}\delta x' + \ldots = 0, \\ \dfrac{dM}{dx}\delta x + \dfrac{dM}{dy}\delta y + \dfrac{dM}{dz}\delta z + \dfrac{dM}{dx'}\delta x' + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

auxquelles on satisfera de la manière la plus générale, en supposant

$$(2)\quad \begin{cases} \delta x = a_1\delta_1 x + a_2\delta_2 x + a_3\delta_3 x + \ldots + a_k\delta_k x, \\ \delta y = a_1\delta_1 y + a_2\delta_2 y + a_3\delta_3 y + \ldots + a_k\delta_k y, \\ \delta z = a_1\delta_1 z + a_2\delta_2 z + a_3\delta_3 z + \ldots + a_k\delta_k z, \\ \delta x' = a_1\delta_1 x' + a_2\delta_2 x' + a_3\delta_3 x' + \ldots + a_k\delta_k x', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

a_1, a_2, ..., a_k étant des indéterminées au nombre de k ou de $3n - i$. En effet ces valeurs satisferont aux équations (1); ensuite parmi les $3k$ variations, il y en a k auxquelles on peut donner des valeurs tout à fait arbitraires. En déterminant convenablement les k facteurs a_1, a_2, ..., a_k, ces variations restant au nombre de i se trouvent déterminées par les formules (2) de manière à satisfaire à toutes les équations (1). Donc, etc.

Il faut toutefois qu'il n'y ait pas de relations linéaires entre $\delta_1 x$, $\delta_1 y$, ... de la forme

$$\begin{gathered} b_1\delta_1 x + b_2\delta_2 x + \ldots + b_k\delta_k x = 0, \\ b_1\delta_1 y + b_2\delta_2 y + \ldots + b_k\delta_k y = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_1\delta_1 x' + b_2\delta_2 x' + \ldots + b_k\delta_k x' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

c'est-à-dire qu'aucun des déterminants provenant du système

$$\begin{array}{l} \delta_1 x, \ \delta_1 y, \ \delta_1 z, \ \delta_1 x', \ldots, \\ \delta_2 x, \ \delta_2 y, \ \delta_2 z, \ \delta_2 x', \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \delta_k x, \ \delta_k y, \ \delta_k z, \ \delta_k x', \ldots, \end{array}$$

ne soit égal à zéro.

464. Ainsi comme application la plus simple, pour l'équilibre d'un point libre il faut et il suffit que la somme des moments virtuels soit nulle pour trois déplacements virtuels quelconques du point, et l'on choisit les trois déplacements virtuels parallèles aux axes. Tout autre déplacement virtuel est *composé* de ces trois-là.

Pour un point situé sur une surface donnée, deux déplacements particuliers suffisent, et sur une courbe un seul déplacement est possible.

465. En général soient $L = 0$, $M = 0, \ldots$ les équations de condition. On prendra $3n - i$ quantités $\varphi, \psi, \theta, \ldots$ fonctions de $x, y, z, x', \ldots$ et dont les variations seront toutes arbitraires. L'équation des vitesses virtuelles deviendra

$$\Phi\,\delta\varphi + \Psi\,\delta\psi + \Theta\,d\theta + \ldots + \lambda\,\delta L + \mu\,\delta M + \ldots = 0;$$

et comme δL, $\delta M, \ldots$ sont nulles et que $\delta\varphi$, $\delta\psi, \ldots$ sont arbitraires, on aura

$$\Phi = 0, \quad \Psi = 0, \quad \Theta = 0 \ldots$$

TRENTE-CINQUIÈME LEÇON.

APPLICATIONS DU PRINCIPE DES VITESSES VIRTUELLES.

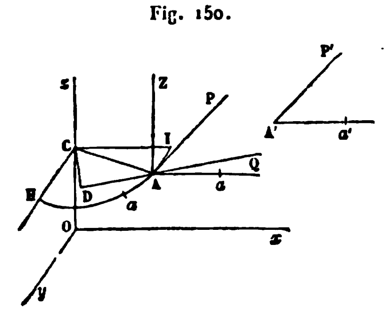
Équilibre d'un système invariable. — Cas où le système est gêné par quelque obstacle. — Équilibre du polygone funiculaire. — Propriété de l'équilibre.

ÉQUILIBRE D'UN SOLIDE INVARIABLE.

466. On peut déduire du principe des vitesses virtuelles les conditions d'équilibre d'un système solide, formé de n points matériels liés entre eux d'une manière invariable. Cherchons d'abord le nombre de ces conditions. Trois points étant pris au hasard dans le corps, pour exprimer que leurs distances mutuelles ne changent pas, il faut trois équations. Il en faut ensuite $3(n-3)$ ou $3n-9$ autres pour exprimer que les $n-3$ autres points restent à des distances invariables des trois premiers. Ainsi les liaisons du système établissent $3n-9+3$ ou $3n-6$ équations entre les coordonnées de tous ces points. Comme on doit avoir en tout $3n$ équations pour déterminer les coordonnées des n points du système, il y aura donc six équations d'équilibre.

467. On pourrait obtenir ces équations en appliquant la méthode générale; mais il est plus simple d'imprimer au système six mouvements virtuels arbitraires et indépendants les uns des autres, de telle sorte que les relations qui en résulteront entre les forces, ne pou-

Fig. 150.



vant se déduire les unes des autres, seront précisément les six équations d'équilibre.

Le déplacement le plus simple consistera à faire mouvoir le corps parallèlement à l'un des axes, Ox par exemple, de telle sorte que tous ses points décrivent de petites droites Aa, $A'a'$, toutes égales. Alors δy, δz, $\delta y'$, $\delta z'$,..., sont nuls et $\delta x = \delta x' = \delta x''$,....

Dans ce cas l'équation générale

$$(1) \qquad \sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0$$

devient, en supprimant le facteur commun δx,

$$(2) \qquad \sum X = 0;$$

on aura de même

$$(3) \qquad \sum Y = 0,$$

$$(4) \qquad \sum Z = 0.$$

468. On obtiendra les trois autres équations d'équilibre en faisant tourner le corps successivement autour des trois axes. Supposons d'abord que la rotation s'effectue autour de Oz. Le point A décrira un élément Aa d'une circonférence IAH de rayon $AC = r$ et parallèle au plan xOy. Soit l'angle $ACI = \omega$. On a d'abord $\delta z = 0$, puis à cause de

$$x = r\cos\omega, \quad y = r\sin\omega,$$

on a, la rotation étant mesurée par l'angle $\delta\omega$,

$$\delta x = -r\sin\omega\,\delta\omega, \quad \delta y = r\cos\omega\,\delta\omega$$

ou bien

$$\delta x = -y\,\delta\omega, \quad \delta y = x\,\delta\omega.$$

Donc

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = (Yx - Xy)\,\delta\omega,$$

et de même

$$X'\,\delta x' + Y'\,\delta y' + Z'\,\delta z' = (Y'x' - X'y')\,\delta\omega.$$

On a donc, en substituant ces valeurs dans l'équation (1) et supprimant le facteur constant $\delta\omega$,

$$(5) \qquad \sum (Yx - Xy) = 0,$$

et de même

$$(6) \qquad \sum (Zy - Yz) = 0,$$

$$(7) \qquad \sum (Xz - Zx) = 0.$$

69. On peut déduire du principe des vitesses virtuelles les équations des moments sous leur seconde forme (367).

Décomposons la force P (*fig.* 150, p. 81) en deux autres, l'une Z parallèle à Oz, l'autre Q située dans le plan du cercle IAH parallèle au plan xOy. Imprimons au corps un mouvement de rotation, de manière que le point A décrive un petit arc de cercle Aa dont le rayon AC est perpendiculaire à Oz. Abaissons $CD = q$ perpendiculaire sur la direction de la force Q et imaginons celle-ci transportée au point D. La force P est remplacée par les deux forces Z et Q. Or le moment virtuel de Z est nul, puisque l'élément Aa est perpendiculaire à cette force. Quant au moment virtuel de la force Q appliquée au point D, c'est le produit de cette force par $q\,\delta\omega$. On a donc, en appelant Pp le moment virtuel de la force P,

$$Pp = Qq\,\delta\omega.$$

On aura de même pour les autres forces

$$P'p' = Q'q'\,\delta\omega, \quad P''p'' = Q''q''\,\delta\omega, \ldots,$$

et l'équation d'équilibre (5) devient

$$\sum Qq = 0.$$

Elle exprime, comme nous l'avons vu, que la somme des moments des forces par rapport à l'axe Oz est nulle.

AUTRE MANIÈRE D'OBTENIR LES CONDITIONS D'ÉQUILIBRE D'UN SYSTÈME SOLIDE.

470. Concevons les points du corps rapportés à un nouveau système d'axes rectangulaires. Les coordonnées (x, y, z) d'un point seront liées aux nouvelles coordonnées par les équations

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \alpha + a\,x_1 + b\,y_1 + c\,z_1,\\ y &= \beta + a'\,x_1 + b'\,y_1 + c'\,z_1,\\ z &= \gamma + a''x_1 + b''y_1 + c''z_1;\end{aligned}\right.$$

et l'on aura entre les constantes $a, a', \ldots$ les équations de condition

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} a^2 + a'^2 + a''^2 &= 1,\\ b^2 + b'^2 + b''^2 &= 1,\\ c^2 + c'^2 + c''^2 &= 1;\end{aligned}\right.$$

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} ab + a'b' + a''b'' &= 0,\\ ac + a'c' + a''c'' &= 0,\\ bc + b'c' + b''c'' &= 0.\end{aligned}\right.$$

Le systeme étant solide, si l'on conçoit que les axes des x_1, y_1, z_1, en fassent partie, un déplacement quelconque du système changera la position de ces axes, aussi bien que x, y, z, mais ne changera pas x_1, y_1, z_1. Donc

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \delta x &= \delta\alpha + x_1\,\delta a + y_1\,\delta b + z_1\,\delta c,\\ \delta y &= \delta\beta + x_1\,\delta a' + y_1\,\delta b' + z_1\,\delta c',\\ \delta z &= \delta\gamma + x_1\,\delta a'' + y_1\,\delta b'' + z_1\,\delta c''.\end{aligned}\right.$$

Supposons qu'avant le déplacement les axes des x_1, y_1, z_1, coïncident avec les axes des x, y, z, alors on aura

$$x = x_1,\quad y = y_1,\quad z = z_1,$$

et par consequent

$$\begin{array}{lll} a = 1, & b = 0, & c = 0, \\ a' = 0, & b' = 1, & c' = 0, \\ a'' = 0, & b'' = 0, & c'' = 1, \\ \delta a = 0, & \delta b' = 0, & \delta c'' = 0 \ (^*), \end{array}$$

et les équations de condition (3) donneront, par la différentiation,

$$\delta b + \delta a' = 0, \quad \delta c + \delta a'' = 0, \quad \delta c' + \delta b'' = 0.$$

Posons

$$\delta a' = -\delta b = \delta\omega, \quad \delta c = -\delta a'' = \delta\psi, \quad \delta b'' = -\delta c' = \delta\varphi,$$

on aura

$$\begin{aligned} \delta x &= \delta\alpha - y\delta\omega + z\delta\psi, \\ \delta y &= \delta6 + x\delta\omega - z\delta\varphi, \\ \delta z &= \delta\gamma - x\delta\psi - y\delta\varphi; \end{aligned}$$

et en substituant dans l'équation générale

$$\sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0,$$

il vient

$$(5) \left\{ \begin{aligned} &\delta\alpha \sum X + \delta6 \sum Y + \delta\gamma \sum Z + \delta\omega \sum (Yx - Xy) \\ &\qquad + \delta\varphi \sum (Zy - Yz) + \delta\psi \sum (Xz - Zx) = 0. \end{aligned} \right.$$

Les variations $\delta\alpha$, $\delta6$,... étant arbitraires, cette équation ne peut avoir lieu que si les coefficients de ces variations sont nuls; on retrouve ainsi les conditions exprimées plus haut (467, 468).

ÉQUILIBRE D'UN SYSTÈME SOLIDE GÊNÉ PAR UN OBSTACLE.

471. Si le système renferme un point fixe O, on prendra ce point pour origine des coordonnées et on exprimera, au moyen de trois équations, que les distances

---

(*) Ces dernières équations peuvent s'obtenir en différentiant les formules (2) et en introduisant les hypothèses $a = 1$, $a = 0$,....

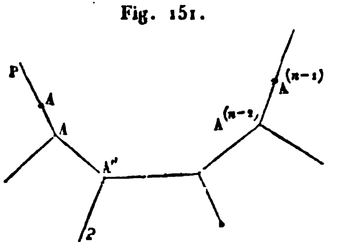
mutuelles des points A, A′ et O sont constantes; puis par 3 $(n-2)$ équations que les distances des $n-2$ autres points à A, A′ et O restent invariables, ce qui fait en tout $3n-6+3$ ou $3n-3$ équations de condition entre les coordonnées des points du système. Donc il y aura, dans ce cas, seulement 3 équations d'équilibre entre les forces. On obtiendra ces trois équations en faisant tourner le système successivement autour des trois axes. Il est évident d'ailleurs qu'à cause de la fixité du point O, il est impossible de faire mouvoir le corps parallèlement à un axe comme lorsqu'il était libre.

472. S'il y a deux points fixes O et H, ou, ce qui revient au même, un axe fixe OH, on prendra cette ligne pour axe des z. On exprimera, par deux équations, que les distances du point A aux points O et H sont invariables et, par 3 $(n-1)$ équations, que les distances des $n-1$ autres points aux points O, A, H sont également invariables, ce qui fait en tout $3n-3+2$ ou $3n-1$ relations entre les coordonnées des différents points du corps. Ainsi le système est à liaisons complètes; et, en effet, un seul déplacement est possible, c'est un mouvement de rotation autour de l'axe OH. C'est par ce déplacement virtuel qu'on parviendra à la seule équation d'équilibre à laquelle les forces appliquées au corps doivent satisfaire (373).

ÉQUILIBRE DU POLYGONE FUNICULAIRE.

473. Soient A, A′, A″, ..., $A^{(n-1)}$, n points unis par des cordes formant un polygone de $n-1$ côtés dont les sommets sont tirés par n forces P, P′, P″, ..., $P^{(n-1)}$. Il faut d'abord exprimer que les longueurs des côtés sont données et égales à l, l',

Fig. 151.



l'',...; en désignant par $x, y, z, x', y', z', \ldots$ les coordonnées des points A, A',... par rapport à trois axes rectangulaires, on aura les $n-1$ équations

$$l - \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2} = 0,$$
$$l' - \sqrt{(x''-x')^2 + (y''-y')^2 + (z''-z')^2} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

En différentiant ces équations, on aura

$$\frac{x'-x}{l}\delta x + \frac{x-x'}{l}\delta x' + \frac{y'-y}{l}\delta y$$
$$+ \frac{y-y'}{l}\delta y' + \frac{z'-z}{l}\delta z + \frac{z-z'}{l}\delta z' = 0$$

et $n-2$ équations analogues. A ces $n-1$ équations il faudra joindre la suivante

$$\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0.$$

474. En employant pour l'élimination des n variations la méthode générale des multiplicateurs et en faisant usage des mêmes notations, on obtient les $3n$ équations

$$(1)\quad \begin{cases} X + \lambda\dfrac{x'-x}{l} = 0, \\ Y + \lambda\dfrac{y'-y}{l} = 0, \\ Z + \lambda\dfrac{z'-z}{l} = 0, \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} X' + \lambda\dfrac{x-x'}{l} + \mu\dfrac{x''-x'}{l'} = 0, \\ Y' + \lambda\dfrac{y-y'}{l} + \mu\dfrac{y''-y'}{l'} = 0, \\ Z' + \lambda\dfrac{z-z'}{l} + \mu\dfrac{z''-z'}{l'} = 0, \end{cases}$$

et

$$(3)\quad \begin{cases} X'' + \mu \dfrac{x' - x''}{l'} + \nu \dfrac{x''' - x''}{l''} = 0, \\ Y'' + \mu \dfrac{y' - y''}{l'} + \nu \dfrac{y''' - y''}{l''} = 0, \\ Z'' + \mu \dfrac{z' - z''}{l'} + \nu \dfrac{z''' - z''}{l''} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

On aperçoit facilement la loi d'après laquelle ces équations sont formées. En éliminant entre elles les $n - 1$ indéterminées $\lambda, \mu, \nu, \ldots$, on aura $3n - (n - 1)$ ou $2n + 1$ conditions d'équilibre.

475. Les quantités auxiliaires $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ ne sont autre chose que les tensions des divers cordons, en supposant ces quantités positives. En effet $\lambda \dfrac{x' - x}{l}$, $\lambda \dfrac{y' - y}{l}$, $\lambda \dfrac{z' - z}{l}$ sont les composantes parallèles aux axes d'une force égale à λ, agissant suivant AA' de A vers A'. Or les relations (1) font voir que cette force λ et la force P, appliquées au point A, se détruisent. Ainsi λ mesure la tension du cordon AA'. On retrouve en même temps ce résultat connu (389) que la force P est dirigée suivant le prolongement de AA' lorsque le polygone est en équilibre.

Les équations (2), outre les composantes de P, contiennent celles d'une force égale et directement contraire à λ, c'est-à-dire agissant au point A', suivant AA' de A' vers A. Les mêmes équations renferment les valeurs des composantes parallèles aux axes, d'une force égale à μ et dirigée suivant A'A'' de A' vers A'' si la quantité μ est positive. Ces trois forces se font donc équilibre au point A'. Ainsi μ mesure la tension du cordon A'A''. On verrait de même que ν est la tension du cordon A''A''', et ainsi de suite.

476. Il est facile de prouver que la tension d'un cordon quelconque est la résultante des forces qui agissent d'un même côté de celui-ci, transportées parallèlement à elles-mêmes en un point de sa direction. Ce qui précède le démontre pour le premier cordon. Pour le second, il suffit d'ajouter deux à deux les équations (1) et (2) : on a ainsi

$$X + X' + \mu \frac{x'' - x'}{l'} = 0,$$

$$Y + Y' + \mu \frac{y'' - y'}{l'} = 0,$$

$$Z + Z' + \mu \frac{z'' - z'}{l'} = 0.$$

Il résulte de là que les forces P, P' et la tension μ du cordon $A'A''$, cette dernière agissant de A' vers A'', se font équilibre. Donc une force égale et contraire à μ qui mesure aussi la tension du cordon $A'A''$ est la résultante des forces P et P'. On verrait ensuite, en ajoutant trois à trois les équations (1), (2), (3), que la tension du cordon suivant est la résultante des forces P, P' transportées en A'' et de la force P'', et ainsi de suite.

477. Si $\lambda, \mu, \nu,\ldots$ n'étaient pas toutes positives, le polygone funiculaire ne serait pas en équilibre; car si μ, par exemple, était négative, les points A' et A'' seraient tirés par deux forces égales et contraires qui tendraient à les rapprocher. Cependant l'équilibre aurait encore lieu si les cordons étaient remplacés par des droites rigides, car on a exprimé que les distances $AA', A'A'',\ldots$ doivent être constantes.

SUR UNE PROPRIÉTÉ DE L'ÉQUILIBRE.

478. La formule des vitesses virtuelles conduit à une remarque importante.

Supposons que le premier membre de l'équation

$$\sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0$$

soit la variation exacte d'une fonction de $x, y, z, x', y', z', \ldots$, considérées soit comme des variables indépendantes, soit comme des variables liées entre elles par les équations $L = 0$, $M = 0$, etc., on aura

$$\sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = \delta f(x, y, z, x', y', z', \ldots).$$

Il faut et il suffit pour cela que $X, Y, Z, X', \ldots$ soient les dérivées partielles de la fonction f, par rapport à $x, y, z, x', \ldots$. Alors pour la position d'équilibre et seulement pour celle-là, la valeur correspondante de la fonction $f(x, y, z, \ldots)$ est un maximum ou un minimum, si toutefois cette fonction est susceptible d'un maximum ou d'un minimum; car pour toute autre position du système, sa variation est différente de zéro. On démontre que l'équilibre est toujours stable quand le maximum existe; cela veut dire que si l'on écarte un peu le corps de sa position d'équilibre, il tend à y revenir et atteint cette position après un temps plus ou moins long. Si le minimum a lieu, l'équilibre peut être instable, auquel cas le corps un peu dérangé de sa position d'équilibre n'y revient plus.

479. L'expression

$$\sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)$$

est une variation exacte quand les forces motrices sont dirigées vers des centres fixes et fonctions des distances de leurs points d'application aux centres. Supposons, pour simplifier, qu'il n'y ait qu'un seul centre $K(a, b, c)$; soit $R(X, Y, Z)$ l'intensité de la force qui agit au point $A(x, y, z)$ suivant AK; supposons-la attractive et soit

$AK = r$. On aura

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = R\frac{a-x}{r}\delta x + R\frac{b-y}{r}\delta y + R\frac{c-z}{r}\delta z,$$

ou bien

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = -R\delta r,$$

à cause de

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2.$$

On trouverait $+R\delta r$, si la force était répulsive. De même en désignant par $R'(X', Y', Z')$, $R''(X'', Y'', Z'')$, ... les forces attractives ou répulsives qui agissent aux points A', A'', ..., situés aux distances r', r'', ... du centre fixe, on aura

$$\sum(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = -R\delta r - R'\delta r' - R''\delta r'' - \ldots.$$

Cette fonction est une différentielle exacte, si, comme on le suppose, R est une fonction de r, R' une fonction de r', etc.

480. Si les forces R, R', R'', ... supposées attractives ont pour expressions

$$R = \frac{\mu}{r^2},\quad R' = \frac{\mu}{r'^2},\quad R'' = \frac{\mu}{r''^2},\ldots,$$

μ étant un coefficient constant, le second membre sera la différentielle exacte de

$$\mu\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} + \cdots\right).$$

Ainsi, dans ce cas, la fonction

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} + \cdots$$

est un maximum ou un minimum quand il y a équilibre.

481. Le premier membre de l'équation générale des vitesses virtuelles est encore une différentielle exacte, quand les forces considérées proviennent des actions mutuelles des points du système et qu'elles sont simplement fonctions des distances mutuelles des points qui agissent les uns sur les autres.

Soit en effet R la force avec laquelle deux points $A(x, y, z)$ et $A'(x', y', z')$ agissent l'un sur l'autre. La force qui tire A vers A' a pour composantes parallèles aux axes

$$R\frac{x'-x}{r},\quad R\frac{y'-y}{r},\quad R\frac{z'-z}{r},$$

et les composantes de la force égale à R qui tire A' vers A sont

$$-R\frac{x'-x}{r},\quad -R\frac{y'-y}{r},\quad -R\frac{z'-z}{r};$$

ces forces introduisent donc dans $\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)$ un groupe de termes

$$-R\frac{x'-x}{r}(\delta x'-\delta x)-R\frac{y'-y}{r}(\delta y'-\delta y)-R\frac{z'-z}{r}(\delta z'-\delta z)$$

ou $-R\delta r$, à cause de l'équation

$$r^2=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2.$$

Il en résulte que

$$\sum(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)=-\sum R\delta r.$$

Or d'après l'hypothèse $\sum R\delta r$ est une différentielle exacte.

S'il n'y avait que deux points et qu'ils fussent assujettis à demeurer à une distance constante l'un de l'autre, on aurait $\delta r=0$ et $\mp R\delta r=0$. Par conséquent la somme des moments virtuels de deux forces égales et contraires agissant suivant AA' est nulle; c'est le lemme dont on a fait usage au n° 446.

482. Considérons encore un système de points pesants. Soient $p, p', p'', \ldots$ leurs poids et supposons qu'il n'y ait pas d'autres forces que la pesanteur. Si nous prenons l'axe des z vertical ou dirigé dans le sens de cette force, l'équation des moments virtuels se réduit à

$$p\delta z + p'\delta z' + \ldots = 0 :$$

on a donc

$$\delta(pz + p'z' + p''z'' + \ldots) = 0.$$

Soient P la somme de ces poids et z_1 le z du centre de gravité du système, on a

$$pz + p'z' + p''z'' + \ldots = Pz_1$$

et

$$\delta(Pz_1) = 0$$

ou

$$\delta z_1 = 0.$$

Ainsi, dans la position d'équilibre le centre de gravité est le plus haut ou le plus bas possible. C'est ce qu'on avait déjà remarqué à propos de la chaînette.

FIN DE LA STATIQUE

DYNAMIQUE

DEUXIÈME PARTIE.

TRENTE-SIXIÈME LEÇON.

PRINCIPE DE D'ALEMBERT.

Démonstration du principe de d'Alembert. — Remarque sur ce principe. — Équation générale du mouvement d'un système. — Conséquences de cette équation.

DÉMONSTRATION DU PRINCIPE DE D'ALEMBERT.

483. Le mouvement d'un système de points assujettis à des conditions quelconques et soumis à des forces quelconques se détermine au moyen d'un principe très-général que l'on doit à d'Alembert. Mais avant de le démontrer, nous allons rappeler la définition générale de l'équilibre.

On dit que des forces appliquées à un point ou à un système de points se font équilibre, quand l'état de celui-ci n'est nullement changé par leur suppression. Cette définition ne suppose pas le système en repos. Il peut être en mouvement, et alors on dit que les forces se font équilibre quand, en les ôtant, on ne modifie pas le mouvement du système.

484. Considérons un système de points en mouvement M, M′, M″,...; soient m, m', m'',... leurs masses et P, P′, P″,... les forces qui les sollicitent. Ces points sont assujettis à certaines conditions, ordinairement exprimées par des équations entre leurs coordonnées.

Considérons en particulier un de ces points, par exemple le point M qui est sollicité par la force P. Le mouvement de ce point n'est pas le même que s'il était libre. Soit Q la force qu'il faudrait lui appliquer, s'il était libre, pour lui donner le mouvement qu'il a réellement. Les composantes de la force Q parallèles aux axes

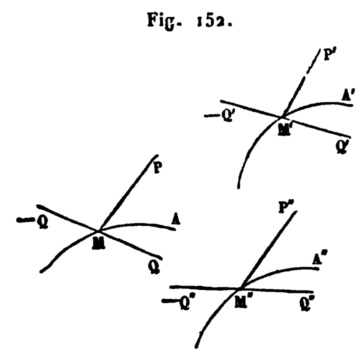


Fig. 152.

$$m\frac{d^2x}{dt^2},\quad m\frac{d^2y}{dt^2},\quad m\frac{d^2z}{dt^2},$$

sont des fonctions du temps connues ou inconnues, mais déterminées. Soient de même Q′, Q″,... les forces qu'il faudrait appliquer aux points M′, M″,..., s'ils étaient libres, pour leur conserver le mouvement qu'ils ont dans le système. On voit que si l'on substitue les forces Q, Q′, Q″,... aux forces P, P′, P″,..., tous les points prendront le même mouvement qu'auparavant, sans que les mêmes conditions analytiques cessent d'être remplies; car, puisque leur mouvement est le même dans les deux cas, les équations de conditions seront encore satisfaites. Ainsi, au système des points assujettis aux conditions données et sollicités par les forces P, P′, P″,..., on pourra substituer le système des points assujettis aux mêmes conditions et sollicités par les forces Q, Q′, Q″,....

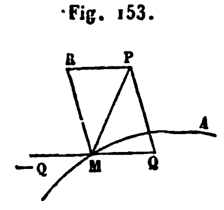
485. Cela posé, le système étant sollicité par les forces P, P′, P″,..., on ne modifiera point son mouvement, si l'on applique respectivement aux points M, M′, M″,... les forces égales et directement opposées Q, — Q, Q′, — Q′,..., qui se font équilibre deux à deux. On

vient de voir que, sans qu'on ait à changer les liaisons du système, les forces Q, Q′, Q″,... produisent le mouvement effectif. Donc les forces P, P′, P″, ..., — Q, — Q′, — Q″,... se font équilibre, puisque le mouvement n'est pas changé par leur suppression. On arrive donc ainsi au principe qui porte le nom de d'Alembert, savoir que *les forces motrices d'un système font à chaque instant équilibre à des forces égales et contraires aux forces qui produiraient son mouvement effectif, si tous ses points devenaient libres.*

REMARQUES SUR LE PRINCIPE DE D'ALEMBERT.

486. On peut présenter le principe de d'Alembert sous une autre forme, utile dans quelques cas. Décomposons la force P appliquée au point M en deux, dont l'une soit la force désignée par Q, et l'autre une force que nous appellerons R. Nommons de même Q′, R′, Q″, R″,... les composantes analogues des autres forces P′, P″,...

Fig. 153.



On peut remplacer les forces P, P′, P″,... par les forces Q, R, Q′, R′,.... Mais alors on voit que les forces R, R′, R″,... doivent se faire équilibre, puisque les composantes Q, Q′, Q″,... donnent le même mouvement que les forces P, P′, P″,.... Ces forces sont dites les *forces perdues*. Quant aux composantes Q, Q′, Q″,..., on pourrait les appeler *forces effectives*, puisqu'elles ont sur le système le même effet que les forces motrices P, P′, P″,.... On peut donc dire qu'à chaque instant *les forces perdues se font équilibre.*

Cet énoncé revient au précédent; car chaque force R est la résultante des forces P et — Q. Dire que les forces R se font équilibre, revient donc à dire que leurs composantes P, — Q, P′, — Q′,... se font équilibre.

487. Il est bon d'observer qu'on pourrait remplacer d'une infinité de manières les forces données par d'autres susceptibles d'imprimer le même mouvement au système, non plus libre, mais assujetti aux conditions données. En effet, supposons que des forces R, R′, R″,... se fassent équilibre. On pourra décomposer chaque force P en deux forces R et Q. Comme les forces R se détruisent, il ne restera que les forces Q qui produiront le même mouvement que les forces P. Il en résulte que le système P, P′, P″,... et celui des forces — Q, — Q′, — Q″,..., égales et opposées aux forces Q définies en dernier lieu, se font équilibre. Mais cette conséquence est peu utile dans les applications, parce qu'on n'a pas l'expression analytique des nouvelles forces.

ÉQUATION GÉNÉRALE DU MOUVEMENT D'UN SYSTÈME.

488. En vertu du principe de d'Alembert, toutes les questions de mouvement se trouvent ramenées à des questions d'équilibre. Voici comment on s'en servira pour obtenir les équations du mouvement d'un système dans lequel les points sont assujettis à certaines conditions.

Soient

$$(1) \qquad L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0, \ldots,$$

i équations de condition, exprimant les liaisons du système. Ces équations contiendront en général, outre les coordonnées des différents points, le temps t, de sorte que les conditions peuvent varier avec le temps.

Soit P la force appliquée au point M, dont la masse est m. Nommons X, Y, Z ses composantes parallèles à trois axes rectangulaires; celles de la force que nous avons appelée — Q sont égales à

$$-m\frac{d^2x}{dt^2}, \quad -m\frac{d^2y}{dt^2}, \quad -m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Les deux forces P et — Q peuvent donc être remplacées par trois forces parallèles aux axes et qui ont pour expression

$$X - m\frac{d^2x}{dt^2},$$

$$Y - m\frac{d^2y}{dt^2},$$

$$Z - m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

On aura des expressions analogues pour les autres points M′, M″,.... Comme les forces P, — Q, P′, — Q′,..., se font équilibre, il faut que la somme de leurs moments virtuels soit nulle, c'est-à-dire que l'on ait

$$\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z + \left(X' - m'\frac{d^2x'}{dt^2}\right)\delta x' + \ldots = 0,$$

ou, par une notation plus abrégée,

$$\sum\left[\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right] = 0.$$

Cette équation est vérifiée à chaque instant. Ainsi à une époque quelconque le premier membre est nul, en ayant égard aux équations (1), et δx, δy, δz, $\delta x'$, $\delta y'$,... représentant les variations qui résultent de ces équations pour les coordonnées des divers points du système. Il ne faut pas confondre ces variations, qui sont les projections sur les axes des déplacements virtuels des points du système, avec les différentielles dx, dy, dz, dx',... qui sont les accroissements infiniment petits des coor-

données dans le mouvement effectif et pendant l'intervalle de temps dt (*).

CONSÉQUENCES DE L'ÉQUATION GÉNÉRALE.

489. Voyons maintenant comment au moyen de la relation

$$(1)\quad \sum\left[\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right] = 0,$$

on obtiendra, dans chaque cas, les équations du mouvement. Les conditions

$$(2)\qquad L = 0,\quad M = 0,\quad N = 0,\ldots,$$

devant être satisfaites par le système dans sa position actuelle et dans celle qui correspond à un déplacement quelconque, il faudra différentier les équations (2) par rapport à $x, y, z, x', \ldots$, sans faire varier le temps. On aura ainsi entre les variations $\delta x, \delta y, \delta z, \delta x', \ldots$,

(*) Les déplacements $\delta x, \delta y, \ldots$ satisfont aux équations $\delta L = 0$, $\delta M = 0, \ldots$, c'est-à-dire

$$\frac{dL}{dx}\delta x + \frac{dL}{dy}\delta y + \ldots = 0, \ldots,$$

tandis que l'on a

$$\frac{dL}{dt}dt + \frac{dL}{dx}dx + \frac{dL}{dy}dy + \ldots = 0, \ldots.$$

On ne pourra donc pas prendre en général $\delta x = dx$, on ne pourra le faire que si $\frac{dL}{dt} = 0$, $\frac{dM}{dt} = 0, \ldots$, c'est-à-dire que si les liaisons $L = 0$, $M = 0, \ldots$ sont indépendantes du temps.

les i équations suivantes :

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{dL}{dx}\delta x + \dfrac{dL}{dy}\delta y + \dfrac{dL}{dz}\delta z + \dfrac{dL}{dx'}\delta x' + \ldots = 0, \\ \dfrac{dM}{dx}\delta x + \dfrac{dM}{dy}\delta y + \dfrac{dM}{dz}\delta z + \dfrac{dM}{dx'}\delta x' + \ldots = 0, \\ \dfrac{dN}{dx}\delta x + \dfrac{dN}{dy}\delta y + \dfrac{dN}{dz}\delta z + \dfrac{dN}{dx'}\delta x' + \ldots = 0. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Si n est le nombre des points du système, il y aura donc $3n - i$ variations arbitraires et i variations fonctions de celles-là déterminées par les i équations précédentes. On portera les valeurs de ces i variations dans l'équation (1), et égalant à 0 les coefficients des $3n - i$ variations restantes, on aura $3n - i$ équations différentielles entre le temps, les forces et les coordonnées des points du système. En y joignant les i relations (2), on aura $3n$ équations pour déterminer les $3n$ variables $x, y, z, x', y', z', \ldots$, en fonction du temps t. Il restera à intégrer ces équations pour connaître la position de chaque point du système à une époque quelconque du mouvement.

490. On peut, comme on l'a fait dans une autre occasion (460), employer la méthode des multiplicateurs. En multipliant les équations (3) par des coefficients indéterminés $\lambda, \mu, \nu, \ldots$, les ajoutant avec l'équation (1), puis égalant à 0 les coefficients des $3n$ variations, on a les $3n$ équations suivantes :

$$(4)\quad \begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = X + \lambda\dfrac{dL}{dx} + \mu\dfrac{dM}{dx} + \nu\dfrac{dN}{dx} + \ldots, \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = Y + \lambda\dfrac{dL}{dy} + \mu\dfrac{dM}{dy} + \nu\dfrac{dN}{dy} + \ldots, \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2} = Z + \lambda\dfrac{dL}{dz} + \mu\dfrac{dM}{dz} + \nu\dfrac{dN}{dz} + \ldots, \\ m'\dfrac{d^2x'}{dt^2} = X' + \lambda\dfrac{dL}{dx'} + \mu\dfrac{dM}{dx'} + \nu\dfrac{dN}{dx'} + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

L'élimination des i indéterminées λ, μ, ν,... entre ces équations donnera $3n - i$ équations : en y joignant les i équations (2), on aura $3n$ équations pour déterminer les valeurs des $3n$ coordonnées x, y, z, x',... en fonction du temps.

491. Les facteurs λ, μ, ν,... représentent les forces perdues et font connaître les tensions et pressions qui s'exercent dans les liens physiques du système. Pour le bien comprendre, décomposons, comme nous l'avons fait plus haut (486), la force P dans les deux forces $-$Q et R, et opérons la même décomposition pour les forces P', P'',.... On sait que si l'on supprime les forces R, R', R''',..., chaque point conservera encore son mouvement. On sait, de plus, que sous l'action des forces Q, Q', Q'',... chaque point aurait encore le même mouvement, quand bien même il deviendrait entièrement libre; de sorte que les points assujettis aux liaisons données se meuvent alors sans exercer aucune action les uns sur les autres, et par conséquent les liens physiques du système n'éprouvent ni tensions ni pressions lorsqu'on a supprimé les composantes R, R',....

Si l'on rétablit ces composantes, elles se font équilibre à l'aide des liaisons du système, et le mouvement demeure le même. On voit donc que ces dernières forces produisent seules les tensions et pressions dans les liens du système. Par conséquent, lorsqu'on connaîtra R, R', R'',..., on pourra déterminer les actions que les liaisons produisent sur les points du système, et par suite les tensions et pressions que les liens éprouvent, comme on l'a vu, dans un système de points assujettis à des conditions quelconques et soumis à des forces données qui se font équilibre.

492. On a d'ailleurs les expressions des forces perdues R, R', R'',.... Les composantes de R, parallèles aux axes,

sont

$$X - m\frac{d^2x}{dt^2},$$

$$Y - m\frac{d^2y}{dt^2},$$

$$Z - m\frac{d^2z}{dt^2};$$

celles de R′ sont

$$X' - m'\frac{d^2x'}{dt^2},$$

$$Y' - m'\frac{d^2y'}{dt^2},$$

$$Z' - m'\frac{d^2z'}{dt^2};$$

. . . .

Or les équations (4) donnent

$$X - m\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\lambda\frac{dL}{dx} + \mu\frac{dM}{dx} + \nu\frac{dN}{dx} + \ldots\right),$$

$$Y - m\frac{d^2y}{dt^2} = -\left(\lambda\frac{dL}{dy} + \mu\frac{dM}{dy} + \nu\frac{dN}{dy} + \ldots\right),$$

$$Z - m\frac{d^2z}{dt^2} = -\left(\lambda\frac{dL}{dz} + \mu\frac{dM}{dz} + \nu\frac{dN}{dz} + \ldots\right),$$

$$X' - m'\frac{d^2x'}{dt^2} = -\left(\lambda\frac{dL}{dx'} + \mu\frac{dM}{dx'} + \nu\frac{dN}{dx'} + \ldots\right),$$

. . . .

expressions dans lesquelles il faut remplacer $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ par leurs valeurs déterminées au moyen des équations (4).

TRENTE-SEPTIÈME LEÇON.

EXTENSION ET APPLICATIONS DU PRINCIPE DE D'ALEMBERT.

Des forces instantanées ou percussions. — Extension du principe de d'Alembert aux forces instantanées. — Manière d'appliquer ce principe. — Mouvement de deux points matériels unis par un fil et reposant sur deux plans inclinés. — Autre manière de traiter ce problème. — Cas où il y a des percussions.

DES FORCES INSTANTANÉES.

493. L'observation montre qu'il n'y a pas de force capable de produire, dans un instant indivisible, un changement fini, soit en grandeur, soit en direction, dans la vitesse d'un corps quelconque. Mais il existe des forces qu'on appelle *instantanées* et qu'on désigne aussi sous le nom de *percussions* ou *impulsions* qui, agissant avec une très-grande intensité, pendant un temps extrêmement court et presque toujours inappréciable, communiquent à un corps, dans cet intervalle de temps, une vitesse finie qui peut même être considérable.

Supposons un corps ou point matériel sollicité par une pareille force P suivant une droite Ox. L'équation de son mouvement est

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \text{P},$$

m étant la masse de ce corps. Si l'on intègre cette équation à partir de $t = 0$ jusqu'à $t = \theta$, θ étant un intervalle de temps très-petit, comme une fraction de seconde, on a, si u est la vitesse du corps au bout du temps θ, la vitesse

initiale étant nulle,

$$mu = \int_0^\theta P\,dt.$$

Au delà du temps θ, la force P cesse d'agir, et par conséquent le mobile conserve sa vitesse acquise u. Mais alors la quantité de mouvement mu, possédée par le corps et égale à $\int_0^\theta P\,dt$, peut avoir et aura une valeur finie, pourvu que l'intensité de la force P soit très-grande pendant la durée très-petite de θ.

494. Quand la direction de la force P est variable pendant le temps θ, on a les trois équations

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z,$$

X, Y, Z étant les composantes de la force motrice à chaque instant. On aura au bout du temps θ :

$$m\frac{dx}{dt} = \int_0^\theta X\,dt,$$

$$m\frac{dy}{dt} = \int_0^\theta Y\,dt,$$

$$m\frac{dz}{dt} = \int_0^\theta Z\,dt.$$

Si l'on assimile la quantité de mouvement mu à une force dirigée suivant la tangente à la trajectoire, $m\frac{dx}{dt}$, $m\frac{dy}{dt}$, $m\frac{dz}{dt}$ seront les composantes de cette force fictive. C'est pourquoi on les appelle les composantes de la quantité de mouvement. Les équations précédentes donnent les expressions de ces composantes en fonction des composantes de la percussion.

EXTENSION DU PRINCIPE DE D'ALEMBERT AUX FORCES DE PERCUSSION.

495. Le principe de d'Alembert s'applique aux forces de percussion, en remplaçant ces forces par les quantités de mouvement qu'elles sont capables de produire. Reprenons la formule générale

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sum\left[\left(\mathrm{X} - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(\mathrm{Y} - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y \right.\\ &\qquad\qquad\left. + \left(\mathrm{Z} - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right] = 0. \end{aligned}\right.$$

Considérons le système depuis le temps t_0 jusqu'au temps $t_0 + \theta$, pendant lequel la percussion agit. Cet intervalle étant très-court, on peut regarder les variations δx, δy, δz, $\delta x'$,..., comme constantes pendant toute sa durée. En effet, si ces points sont liés entre eux par i équations de condition,

$$(2)\qquad \mathrm{L} = 0,\quad \mathrm{M} = 0,\quad \mathrm{N} = 0,\ldots,$$

les variations sont assujetties aux i relations

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d\mathrm{L}}{dx}\delta x + \frac{d\mathrm{L}}{dy}\delta y + \frac{d\mathrm{L}}{dz}\delta z + \frac{d\mathrm{L}}{dx'}\delta x' + \ldots = 0,\\ &\frac{d\mathrm{M}}{dx}\delta x + \frac{d\mathrm{M}}{dy}\delta y + \frac{d\mathrm{M}}{dz}\delta z + \frac{d\mathrm{M}}{dx'}\delta x' + \ldots = 0,\\ &\frac{d\mathrm{N}}{dx}\delta x + \frac{d\mathrm{N}}{dy}\delta y + \frac{d\mathrm{N}}{dz}\delta z + \frac{d\mathrm{N}}{dx'}\delta x' + \ldots = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Or, pendant le temps très-court θ, les points du système n'éprouvent que des déplacements insensibles, de sorte qu'on peut regarder leurs coordonnées x, y, z, x', y', z',..., comme constantes, d'où il suit que les valeurs de δx, δy,..., restent aussi constantes.

496. Cela posé, multiplions l'équation (1) par dt et regardant δx, δy,..., comme des constantes, intégrons par rapport à t, entre les limites t_0 et $t_0+\theta$. On aura

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \sum\Bigg[&\left(\int_{t_0}^{t_0+\theta} \mathrm{X}\,dt + m\frac{dx_0}{dt} - m\frac{dx}{dt}\right)\delta x \\ &+\left(\int_{t_0}^{t_0+\theta} \mathrm{Y}\,dt + m\frac{dy_0}{dt} - m\frac{dy}{dt}\right)\delta y \\ &+\left(\int_{t_0}^{t_0+\theta} \mathrm{Z}\,dt + m\frac{dz_0}{dt} - m\frac{dz}{dt}\right)\delta z\Bigg] = 0, \end{aligned}\right.$$

les lettres affectées de l'indice o désignant les valeurs relatives à l'époque t_0, et les lettres sans indice les valeurs relatives à l'époque $t_0+\theta$.

Voyons maintenant ce que signifie cette équation. La force P dont les composantes X, Y, Z sont appliquées pendant le temps θ à la masse m, communiquerait au point matériel, s'il était libre, une quantité de mouvement mu, dont les composantes sont (494) $\int \mathrm{X}\,dt$, $\int \mathrm{Y}\,dt$, $\int \mathrm{Z}\,dt$. Les termes $m\frac{dx}{dt}$, $m\frac{dy}{dt}$, $m\frac{dz}{dt}$ sont les composantes de la quantité de mouvement mv que le point m possède au bout du temps $t_0+\theta$. De même la vitesse étant v_0 pour $t=t_0$, les composantes de la quantité de mouvement mv_0 de la masse m à l'époque t_0 sont $m\frac{dx_0}{dt}$, $m\frac{dy_0}{dt}$, $m\frac{dz_0}{dt}$. Si l'on convient de considérer les quantités de mouvement comme des forces, on voit que l'équation (4) exprime qu'*il y a équilibre entre les quantités de mouvement que les percussions communiqueraient aux différents points s'ils étaient libres, les quantités de mouvement qu'ils possèdent au moment où les percussions commencent à agir et celles qu'ils ont après leur action, ces dernières étant prises en sens contraire*. Cet énoncé suppose toutefois qu'on néglige pendant le temps θ les

forces ordinaires, telles que la pesanteur, qui n'ont pas une intensité très-grande.

497. L'équation (4) se simplifie lorsque le système part du repos. Alors $m\frac{dx_0}{dt}$, $m\frac{dy_0}{dt}$, $m\frac{dz_0}{dt}$, $m'\frac{dx'_0}{dt}$, ..., disparaissent, et l'on peut dire qu'*il y a équilibre entre les quantités de mouvement que les forces donneraient aux divers points du système s'ils étaient libres et celles qui ont lieu effectivement, et avec lesquelles ce système commence à se mouvoir, au bout du temps θ, ces dernières étant prises en sens contraire.*

MARCHE A SUIVRE POUR APPLIQUER LE PRINCIPE DE D'ALEMBERT DANS LE CAS DES PERCUSSIONS.

498. Pour appliquer le principe de d'Alembert, étendu au cas des percussions, il faut suivre la marche indiquée au n° 490. Des équations

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{dL}{dx}\delta x + \frac{dL}{dy}\delta y + \frac{dL}{dz}\delta z + \ldots = 0, \\ \frac{dM}{dx}\delta x + \frac{dM}{dy}\delta y + \frac{dM}{dz}\delta z + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

on peut déduire les valeurs de i variations et les porter dans l'équation

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} \sum\left[\left(\int_{t_0}^{t_0+\theta} X\,dt + m\frac{dx_0}{dt} - m\frac{dx}{dt}\right)\delta x \right. \\ \quad + \left(\int_{t_0}^{t_0+\theta} Y\,dt + m\frac{dy_0}{dt} - m\frac{dy}{dt}\right)\delta y \\ \quad \left. + \left(\int_{t_0}^{t_0+\theta} Z\,dt + m\frac{dz_0}{dt} - m\frac{dz}{dt}\right)\delta z \right] = 0, \end{array}\right.$$

puis on égalera à o les coefficients des $3n - i$ variations

restantes. Mais il vaut mieux employer la méthode des multiplicateurs. On a, par ce dernier procédé, en appelant $\lambda, \mu, \nu, \ldots, i$ coefficients indéterminés, les $3n$ équations suivantes :

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} m\dfrac{dx}{dt} - m\dfrac{dx_0}{dt} = \displaystyle\int X\,dt + \lambda\frac{dL}{dx} + \mu\frac{dM}{dx} + \ldots, \\ m\dfrac{dy}{dt} - m\dfrac{dy_0}{dt} = \displaystyle\int Y\,dt + \lambda\frac{dL}{dy} + \mu\frac{dM}{dy} + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Dans celles-ci $\int X\,dt$, $\int Y\,dt$, $\int Z\,dt$ sont les composantes de la quantité de mouvement que la force P serait capable de communiquer dans le temps θ au point m s'il était libre, laquelle est connue par l'expérience. On remplacera de même $\int X'\,dt$, $\int Y'\,dt$, $\int Z'\,dt, \ldots$, par leurs valeurs. On a ensuite $3n - i$ équations provenant de l'élimination de $\lambda, \mu, \nu, \ldots$, entre les $3n$ équations précédentes.

D'un autre côté, si l'on différentie par rapport au temps les équations de condition, on aura i équations, telles que

$$\frac{dL}{dt} + \frac{dL}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dL}{dy}\frac{dy}{dt} + \frac{dL}{dz}\frac{dz}{dt} + \frac{dL}{dx'}\frac{dx'}{dt} + \ldots = 0,$$

d'où l'on tire i équations, telles que

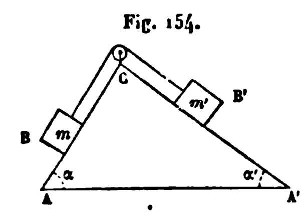
$$\frac{dL}{dx}\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx_0}{dt}\right) + \frac{dL}{dy}\left(\frac{dy}{dt} - \frac{dy_0}{dt}\right) + \ldots = 0,$$

en regardant comme constantes les fonctions $\frac{dL}{dt}, \frac{dL}{dx}, \ldots$, qui ne varient pas sensiblement pendant la très-courte durée de la percussion. On a donc en tout $3n$ équations pour déterminer les $3n$ inconnues $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, \frac{dx'}{dt}, \ldots$, c'est-à-dire les composantes de la vitesse de chaque point.

MOUVEMENT DE DEUX CORPS LIÉS PAR UN FIL ET PLACÉS SUR DEUX PLANS INCLINÉS.

499. Deux corps pesants m et m' dont les masses sont m et m' sont placés sur deux plans inclinés AC, A′C′, et unis par un fil passant sur une poulie située au sommet des deux plans. Les deux parties du fil sont respectivement parallèles à ces deux plans et passent par les centres de gravité des deux corps. Quelle est la loi du mouvement de cet assemblage?

Fig. 154.



On peut supposer que chacune des masses soit réunie à son centre de gravité. Soient $Cm = x$, $Cm' = x'$; nommons α et α' les angles CAA′, CA′A, et l la longueur totale du fil.

En négligeant les frottements, la force motrice du point m, dans la direction de son mouvement, est $mg\sin\alpha$, et celle qui donnerait à ce point supposé libre le mouvement qu'il a réellement est $m\dfrac{d^2x}{dt^2}$. D'après le principe de d'Alembert, la force $mg\sin\alpha - m\dfrac{d^2x}{dt^2}$ doit faire équilibre à la force analogue $m'g\sin\alpha' - m'\dfrac{d^2x'}{dt^2}$, qui serait appliquée au point m' et tirerait ce dernier en sens inverse. On a donc

$$(1)\qquad m\left(g\sin\alpha - \frac{d^2x}{dt^2}\right) = m'\left(g\sin\alpha' - \frac{d^2x'}{dt^2}\right).$$

On peut éliminer x' au moyen de la relation

$$x + x' = l;$$

on en tire d'abord

$$\frac{dx'}{dt} = -\frac{dx}{dt}.$$

Ainsi à chaque instant les vitesses des deux points sont égales et de sens contraires, ce qui était bien évident *à priori*. Il en résulte aussi

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = -\frac{d^2x}{dt^2},$$

d'où l'on conclut, en substituant dans l'équation (1),

$$(2) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = g\frac{(m\sin\alpha - m'\sin\alpha')}{m+m'}.$$

Sans aller plus loin, on voit que la force accélératrice du point m étant constante, son mouvement est uniformément accéléré. D'ailleurs on déduit de cette équation, par deux intégrations successives,

$$(3) \qquad v \text{ ou } \frac{dx}{dt} = g\frac{(m\sin\alpha - m'\sin\alpha')}{m+m'}t + c,$$

$$(4) \qquad x = \frac{g(m\sin\alpha - m'\sin\alpha')}{m+m'}\frac{t^2}{2} + ct + c',$$

les constantes c et c' étant les valeurs de v et de x relatives à la position initiale du mobile m.

Si l'on avait

$$m\sin\alpha = m'\sin\alpha',$$

on aurait

$$v = c, \quad x = ct + c',$$

et le mouvement serait uniforme. Si en outre on avait $c = 0$, on aurait $v = 0$ et $x = c'$. Ainsi le corps resterait en repos, ce qui s'accorde bien avec les conditions connues de l'équilibre de deux corps placés comme dans l'exemple actuel.

AUTRE MANIÈRE DE TRAITER LE PROBLÈME PRÉCÉDENT.

500. On peut dans cet exemple particulier se dispenser d'employer le principe de d'Alembert, en introduisant la tension T. On a

$$(1)\qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = mg\sin\alpha - \mathrm{T},$$

$$(2)\qquad m'\frac{d^2x'}{dt^2}\, m'g\sin\alpha' - \mathrm{T},$$

d'où, en éliminant la tension T,

$$(3)\qquad m\left(g\sin\alpha - \frac{d^2x}{dt^2}\right) = m'\left(g\sin\alpha' - \frac{d^2x'}{dt^2}\right).$$

Pour avoir la tension T, on tirera de cette équation, en remplaçant $\frac{d^2x'}{dt^2}$ par $-\frac{d^2x}{dt^2}$,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{g(m\sin\alpha - m'\sin\alpha')}{m + m'}$$

et, portant cette valeur dans l'équation (1),

$$(4)\qquad \mathrm{T} = \frac{gmm'(\sin\alpha + \sin\alpha')}{m + m'}.$$

Ainsi la tension du fil est constante pendant toute la durée du mouvement.

501. Dans la détermination précédente, nous n'avons pas fait usage du principe des vitesses virtuelles. On arrive au même résultat en l'employant. Comme les deux forces

$$m\left(g\sin\alpha - \frac{d^2x}{dt^2}\right),\quad m'\left(g\sin\alpha' - \frac{d^2x'}{dt^2}\right)$$

se font équilibre, on aura, en vertu de ce principe,

$$(5)\quad m\left(g\sin\alpha - \frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + m'\left(g\sin\alpha' - \frac{d^2x'}{dt^2}\right)\delta x' = 0;$$

mais d'ailleurs, à cause de $x + x' = l$, on a

$$(6)\qquad \delta x + \delta x' = 0.$$

Éliminant le rapport $\frac{\delta x}{\delta x'}$ entre ces deux équations, on a comme plus haut

$$m\left(g\sin\alpha - \frac{d^2x}{dt^2}\right) - m'\left(g\sin\alpha' - \frac{d^2x'}{dt^2}\right) = 0.$$

Si l'on employait la méthode des multiplicateurs pour cette élimination, il serait bien facile de montrer que le coefficient λ que l'on emploierait n'est autre que la tension T du fil. En effet, multipliant l'équation (6) par $-\lambda$ et ajoutant à l'équation (5), on aura

$$\left[m\left(g\sin\alpha - \frac{d^2x}{dt^2}\right) - \lambda\right]\delta x + \left[m'\left(g\sin\alpha' - \frac{d^2x'}{dt^2}\right) - \lambda\right]\delta x' = 0,$$

et, en égalant séparément à zéro les coefficients de δx et de $\delta x'$,

$$m\left(g\sin\alpha - \frac{d^2x}{dt^2}\right) = \lambda,$$

$$m'\left(g\sin\alpha' - \frac{d^2x'}{dt^2}\right) = \lambda.$$

Ces équations ne diffèrent des équations (1) et (2) qu'en ce que T est remplacé par λ. Ainsi λ est bien la tension désignée plus haut (500) par T.

502. Le problème que nous venons de traiter donne la théorie complète de la machine d'Atwood, en posant $\alpha = \alpha' = 90°$, ce qui réduit les formules (3) et (4) du

n° 499, et (4) du n° 500, aux suivantes :

$$v = \frac{g(m - m')}{m + m'} t + c,$$

$$x = \frac{g(m - m')}{m + m'} \frac{t^2}{2} + ct +$$

$$T = \frac{2gmm'}{m + m'}.$$

CAS OU IL Y A DES PERCUSSIONS.

503. Nous avons supposé que l'on connaissait les vitesses initiales des deux masses. Concevons maintenant que celles-ci soient mises en mouvement par des percussions et déterminons, dans cette hypothèse, leurs vitesses initiales. Soient a et a' les vitesses que ces percussions imprimeraient aux masses m et m' si chacune d'elles était libre, et désignons par c la vitesse effective du point m après la percussion. La vitesse initiale du point m' sera $-c$; car, à cause de $x + x' = l$, on a

$$\frac{dx'}{dt} = -\frac{dx}{dt}.$$

D'après le principe de d'Alembert étendu aux quantités de mouvement finies, il doit y avoir équilibre entre les quantités de mouvement que les percussions communiqueraient aux deux points s'ils étaient libres et celles avec lesquelles ils commenceraient à se mouvoir, ces dernières étant prises en sens contraire. On aura donc

$$m(a - c) = m'(a' + c),$$

d'où

$$c = \frac{ma - m'a'}{m + m'}.$$

TRENTE-HUITIÈME LEÇON.

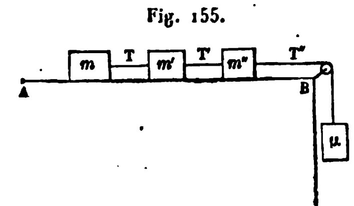
SUITE DES APPLICATIONS DU PRINCIPE DE D'ALEMBERT.

Mouvement de plusieurs corps liés par des cordons. — Autre solution. — Mouvement d'une chaîne sur deux plans inclinés. — Mouvement de deux points dont la distance est invariable et assujettis à demeurer sur deux courbes données.

MOUVEMENT DE CORPS LIÉS PAR DES CORDONS.

504. Proposons-nous de trouver la loi du mouvement d'un système de corps dont les masses sont m, m', m'', et qui, liés entre eux par des fils ou des cordons, sont mobiles sur un plan horizontal. Nous supposerons que la force motrice est le poids d'un corps dont la masse est μ et qui tire le dernier cordon.

Fig. 155.



A un instant quelconque, tous les points du système ont une même vitesse v. Donc $m\frac{dv}{dt}$, $m'\frac{dv}{dt}$, $m''\frac{dv}{dt}$, $\mu\frac{dv}{dt}$ représentent les forces qui seraient capables de donner à ces masses, si elles étaient libres, leur mouvement effectif. D'ailleurs μg est la force motrice du système, et cette force doit faire équilibre aux précédentes prises en sens contraire. L'équation du mouvement est donc

$$\mu g - \mu\frac{dv}{dt} - m\frac{dv}{dt} - m'\frac{dv}{dt} - m''\frac{dv}{dt} = 0,$$

ou plus simplement

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\mu g}{M},$$

en posant

$$\mu + m + m' + m'' = M.$$

Ainsi le mouvement est uniformément accéléré, et la force accélératrice est à g comme la masse μ du poids moteur est à celle de tout le système.

505. Si l'on voulait tenir compte du frottement, il faudrait supposer appliquée à chaque masse une force qui lui fût proportionnelle et dirigée en sens contraire du mouvement. Le mouvement serait encore uniformément accéléré.

AUTRE SOLUTION.

506. On peut encore résoudre ce problème sans faire usage du principe de d'Alembert. Soient T, T', T'' les tensions des trois fils. La tension T', par exemple, est égale à l'une quelconque des deux forces égales et contraires qu'il faudrait appliquer aux points m' et m'' pour remplacer le fil qui les unit, s'il venait à être supprimé. Or on a évidemment

$$m\frac{dv}{dt} = T,$$

$$m'\frac{dv}{dt} = T' - T,$$

$$m''\frac{dv}{dt} = T'' - T',$$

$$\mu\frac{dv}{dt} = \mu g - T''.$$

En ajoutant toutes ces équations, on a encore

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\mu g}{M}.$$

Il est ensuite facile d'obtenir les valeurs des tensions. On a

$$T = m\frac{\mu g}{M},$$

$$T' = (m + m')\frac{\mu g}{M},$$

$$T'' = (m + m' + m'')\frac{\mu g}{M}.$$

On voit donc qu'on a

$$T < T' < T'',$$

et cela doit être, car la tension T'' met en mouvement trois masses, tandis que T' n'en fait mouvoir que deux et T qu'une seule.

Dans ce qui précède on a négligé la masse des cordons. Si l'on en tenait compte, la tension serait variable dans l'étendue d'un même cordon.

MOUVEMENT D'UNE CHAINE SUR DEUX PLANS INCLINÉS.

507. Soit BCB' une chaîne pesante homogène qui repose sur deux plans inclinés disposés comme dans la *fig.* 154, p. 109, et faisant avec l'horizon des angles $CAA' = \alpha$, $CA'A = \alpha'$. Soient l la longueur de la chaîne. ρ la masse de l'unité de longueur. Posons $x = BC$, $x' = B'C$, en sorte que l'on ait

(1) $$x + x' = l.$$

Considérons une molécule μ prise sur la portion CB. Les forces qui la sollicitent sont la force motrice $\mu g \sin\alpha$, et la force effective $\mu\frac{d^2x}{dt^2}$. Toutes les forces motrices des molécules de la partie CB et leurs forces effectives prises en sens contraire se composent en une seule

$$\left(g\sin\alpha - \frac{d^2x}{dt^2}\right)\Sigma\mu,$$

ou bien

$$\rho x\left(g\sin\alpha-\frac{d^2x}{dt^2}\right).$$

De même la différence entre les forces effectives et les forces motrices de la partie CB′ sera

$$\rho x'\left(g\sin\alpha'-\frac{d^2x'}{dt^2}\right).$$

On aura donc, d'après le principe de d'Alembert,

$$(2)\qquad x\left(g\sin\alpha-\frac{d^2x}{dt^2}\right)=x'\left(g\sin\alpha'-\frac{d^2x'}{dt^2}\right)$$

d'où, en éléminant x' à l'aide de l'équation $x+x'=l$,

$$(3)\qquad \frac{d^2x}{dt^2}-g\frac{(\sin\alpha+\sin\alpha')}{l}x+g\sin\alpha'=0.$$

Telle est l'équation du mouvement.

508. Pour intégrer cette équation, posons, afin de simplifier,

$$(4)\qquad \frac{g(\sin\alpha+\sin\alpha')}{l}=n^2,$$

l'équation (3) devient

$$\frac{d^2x}{dt^2}-n^2\left(x-\frac{l\sin\alpha'}{\sin\alpha+\sin\alpha'}\right)=0,$$

ou bien

$$(5)\qquad \frac{d^2y}{dt^2}-n^2y=0,$$

en posant

$$(6)\qquad x-\frac{l\sin\alpha'}{\sin\alpha+\sin\alpha'}=y.$$

L'équation (5) a pour intégrale

$$y = Ae^{nt} + Be^{-nt};$$

on aura donc

$$x = \frac{l \sin \alpha'}{\sin \alpha + \sin \alpha'} + Ae^{nt} + Be^{-nt}, \tag{7}$$

A et B étant deux constantes. Pour les déterminer, on peut supposer connues la position et la vitesse initiale du point B. Si pour $t = 0$ on a $CB = x_0$ et $\frac{dx}{dt} = v_0$, on aura

$$x_0 = \frac{l \sin \alpha'}{\sin \alpha + \sin \alpha'} + A + B,$$

$$v_0 = n(A - B).$$

Au bout d'un certain temps facile à déterminer, toute la chaîne se trouve sur le même plan. Le mouvement change alors de nature et devient uniformément accéléré.

509. La condition nécessaire et suffisante pour que la chaîne reste en repos est que l'on ait

$$A = 0, \quad B = 0.$$

En effet, en remontant à la valeur de v ou de $\frac{dx}{dt}$, on reconnaît que l'on doit avoir

$$Ae^{nt} - Be^{-nt} = 0,$$

quel que soit t, ou, en multipliant par e^{-nt},

$$Ae^{2nt} = B.$$

Or cette équation ne peut pas avoir lieu pour toutes les valeurs de t, à moins que l'on n'ait en même temps $A = 0$, $B = 0$. Dans ce cas on a

$$x = CB = \frac{l \sin \alpha'}{\sin \alpha + \sin \alpha'},$$

$$x' = CB' = \frac{l \sin \alpha}{\sin \alpha + \sin \alpha'},$$

et par conséquent

$$\frac{CB}{CB'} = \frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha}.$$

Cette équation exprime que la droite BB' est horizontale, ce que l'on pouvait prévoir.

510. On peut encore trouver l'équation de ce mouvement en s'appuyant sur le principe des vitesses virtuelles. Ainsi les forces

$$\rho x\left(g\sin\alpha - \frac{d^2x}{dt^2}\right),\quad \rho x'\left(g\sin\alpha' - \frac{d^2x'}{dt^2}\right),$$

étant respectivement appliqués aux points B et B' dans la direction du mouvement que ces points peuvent prendre, il faut, pour l'équilibre, que l'on ait

$$\rho x\left(g\sin\alpha - \frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \rho x'\left(g\sin\alpha' - \frac{d^2x'}{dt^2}\right)\delta x' = 0.$$

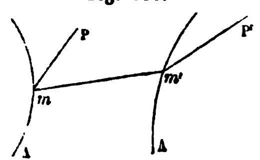
D'ailleurs $\delta x' = -\delta x$, puisque $x + x' = l$. Substituant $-\delta x$ à $\delta x'$, on arrive à l'équation précédemment obtenue.

MOUVEMENT DE DEUX POINTS ASSUJETTIS A DEMEURER SUR DEUX COURBES DONNÉES ET DONT LA DISTANCE EST INVARIABLE.

511. Voici un problème propre à bien faire comprendre l'usage des fonctions λ, μ, ν,..., introduites dans les équations du mouvement pour opérer une élimination.

Soient m et m' deux points matériels sollicités par deux forces P et P', constantes ou variables. Ces deux points sont assujettis à rester à une distance constante $mm' = l$ l'un de l'autre et à demeurer séparément sur deux courbes données mA et m'A'. On suppose, pour plus de simplicité,

Fig. 156.



les forces et les courbes comprises dans un même plan xOy.

Prenons, dans ce plan, des axes rectangulaires Ox, Oy. Soient X, Y, X′, Y′ les composantes, parallèles à ces axes, des forces P et P′. D'après le principe de d'Alembert et en conservant les notations habituelles, l'équation du mouvement sera

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y \\ &+\left(X' - m'\frac{d^2x'}{dt^2}\right)\delta x' + \left(Y' - m'\frac{d^2y'}{dt^2}\right)\delta y' = 0. \end{aligned}\right.$$

Soient

$$(2)\qquad f(x, y) = 0,\quad \varphi(x, y) = 0$$

les équations des courbes mA et $m'A'$. On aura les trois équations de condition

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &f(x, y) = 0, \\ &\varphi(x', y') = 0, \\ &(x - x')^2 + (y - y')^2 = l^2. \end{aligned}\right.$$

Le système est, comme on voit, à liaisons complètes. Ces premières équations donnent

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{df}{dx}\delta x + \frac{df}{dy}\delta y = 0, \\ &\frac{d\varphi}{dx'}\delta x' + \frac{d\varphi}{dy'}\delta y' = 0, \\ &\frac{x - x'}{l}(\delta x - \delta x') + \frac{y - y'}{l}(\delta y - \delta y') = 0. \end{aligned}\right.$$

Multiplions les équations (4) par trois facteurs indéterminés λ, λ', μ, puis ajoutons-les avec l'équation (1). Égalons ensuite à zéro les coefficients de δx, δy, $\delta x'$, $\delta y'$,

nous aurons

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X + \lambda\frac{df}{dx} + \mu\frac{x-x'}{l},\\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y + \lambda\frac{df}{dy} + \mu\frac{y-y'}{l},\\ m'\frac{d^2x'}{dt^2} &= X' + \lambda'\frac{d\varphi}{dx'} - \mu\frac{x-x'}{l},\\ m'\frac{d^2y'}{dt^2} &= Y' + \lambda'\frac{d\varphi}{dy'} - \mu\frac{y-y'}{l}.\end{aligned}\right.$$

Ces équations font voir que les points m et m' se mouvraient comme des points libres, si l'on appliquait au point m deux nouvelles forces dont les composantes parallèles aux axes fussent égales respectivement à

$$\lambda\frac{df}{dx},\quad \lambda\frac{df}{dy},\quad \mu\frac{x-x'}{l},\quad \mu\frac{y-y'}{l};$$

et au point m' deux forces dont les composantes fussent

$$\lambda'\frac{d\varphi}{dx'},\quad \lambda'\frac{d\varphi}{dy'},\quad -\mu\frac{x-x'}{l},\quad -\mu\frac{y-y'}{l}.$$

Or $\lambda\frac{df}{dx}$ et $\lambda\frac{df}{dy}$ sont les composantes d'une force égale à $\lambda\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2+\left(\frac{df}{dy}\right)^2}$ et normale à la courbe mA. Cette force est égale et contraire à la pression que supporte la courbe mA dans le mouvement du point m.

Pareillement $\mu\frac{x-x'}{l}$, $\mu\frac{y-y'}{l}$ sont les composantes d'une force dirigée suivant mm' et dont l'intensité est μ.

Les mêmes remarques s'appliquent au point m'.

Les deux forces égales et contraires dirigées suivant mm' expriment les actions que les deux points m, m' exercent l'un sur l'autre par le moyen du lien mm' : chacune de ces forces est égale à la tension ou pression qu'éprouve ce lien.

On éliminera λ, λ', μ, μ' en multipliant les équations (5) par dx, dy, dx', dy', les ajoutant et en ayant égard aux équations (3), il viendra

$$m\frac{d^2x}{dt^2}dx + m\frac{d^2y}{dt^2}dy + m\frac{d^2x'}{dt^2}dx' + m\frac{d^2y'}{dt^2}dy'$$
$$= X dx + Y dy + X' dx' + Y' dy',$$

équation qui revient à remplacer dans l'équation (1) δx, δy, $\delta x'$, $\delta y'$ par dx, dy, dx', dy'.

TRENTE-NEUVIÈME LEÇON.

MOMENTS D'INERTIE.

Définitions. — Moments d'inertie d'un parallélipipède rectangle. — Ellipsoïde. — Solides de révolution. — Relation entre les moments d'inertie d'un corps par rapport à des axes parallèles, — par rapport à des axes qui passent par le même point.

DÉFINITIONS.

512. On appelle *moment d'inertie d'un point matériel* par rapport à un axe le produit de la masse de ce point par le carré de sa distance à l'axe.

513. Le moment d'inertie d'un système de points matériels dont la forme est invariable, par rapport à un axe, est la somme des moments d'inertie de tous ces points par rapport à cet axe. Ainsi $m, m', m'', \ldots,$ étant les masses des molécules et $r, r', r'', \ldots$ leurs distances respectives à l'axe, le moment d'inertie du système sera

$$mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + \ldots .$$

Nous le désignerons ordinairement par Σmr^2.

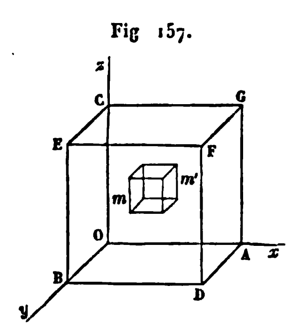
514. Les points matériels qui composent un corps n'y sont pas répandus d'une manière continue : on sait, au contraire, qu'ils sont séparés entre eux par des espaces vides qu'on appelle des *pores*. Cependant on peut dans chaque cas obtenir le moment d'inertie, en supposant la masse distribuée d'une manière continue dans le corps. Cela revient à prendre, au lieu de Σmr^2, l'intégrale définie de $r^2 dm$, pour toute l'étendue du corps, et, comme on l'a vu en Statique à l'occasion des

centres de gravité des corps solides, les résultats de ces deux hypothèses diffèrent très-peu, pourvu que les pores soient extrêmement petits relativement au volume de tout le corps. Il suffira donc de décomposer le corps en une infinité d'éléments infiniment petits; on prendra le moment d'inertie d'un élément quelconque, et l'on aura celui du corps par des intégrations.

MOMENTS D'INERTIE D'UN PARALLÉLIPIPÈDE RECTANGLE.

515. Soit AE un parallélipipède rectangle, et proposons-nous de trouver ses moments par rapport aux trois arêtes contiguës OA, OB, OC.

Fig 157.



Soit $m(x, y, z)$ un point quelconque de ce solide. L'élément qui correspond à ce point est un parallélipipède mm' infiniment petit dont le volume est $dx\,dy\,dz$ et la masse $\rho\,dx\,dy\,dz$, ρ étant la densité de ce corps que nous supposons constante dans toute son étendue. La distance du point m à l'axe Oz est $\sqrt{x^2+y^2}$. Donc le moment d'inertie de cet élément par rapport à Oz est

$$(x^2+y^2)\,\rho\,dx\,dy\,dz,$$

et, par suite, le moment du parallélipipède est

$$\rho\int\int\int(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz.$$

Cette intégrale triple doit s'étendre à toutes les valeurs positives de x, y, z respectivement plus petites que a, b, c ou que les longueurs OA, OB, OC des arêtes du parallélipipède.

Comme z n'entre que par sa différentielle sous le signe d'intégration, il paraît plus simple de commencer à inté-

grer par rapport à cette variable entre les limites o et c, ce qui donne

$$c\rho \int\int (x^2+y^2)\, dx\, dy.$$

On intègre ensuite par rapport à y depuis $y=0$ jusqu'à $y=b$ et enfin par rapport à x, de $x=0$ à $x=a$. On trouve ainsi

$$\rho \frac{abc}{3}(a^2+b^2)$$

pour le moment d'inertie du parallélipipède. En appelant M la masse du corps, on a $M=\rho abc$. L'expression précédente sera donc $\frac{M}{3}(a^2+b^2)$. La même chose se dira des autres axes, en sorte que les moments d'inertie du parallélipipède par rapport aux axes Ox, Oy, Oz son

$$\frac{M}{3}(b^2+c^2),\quad \frac{M}{3}(a^2+c^2),\quad \frac{M}{3}(a^2+b^2).$$

Si l'on suppose

$$a>b>c,$$

on aura

$$a^2+b^2>a^2+c^2>b^2+c^2,$$

et l'on voit que, des trois moments d'inertie, le plus grand correspond à la plus petite arête et le plus petit à la plus grande.

ELLIPSOIDE HOMOGÈNE.

516. Soit

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

l'équation d'un ellipsoide rapporté à ses diamètres principaux : le premier membre sera moindre que 1 pour tout point intérieur, et plus grand que 1 pour tout point extérieur.

Soit ρ la densité du solide. On verra, comme dans l'exemple précédent, que le moment d'inertie par rapport à l'axe Oz est égal à

$$\rho \int\int\int (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz,$$

intégrale triple qui doit s'étendre à toutes les valeurs de x, y, z, telles que l'on ait

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} < 1.$$

517. En supposant d'abord x et y constants, il faut intégrer par rapport à z depuis la valeur

$$z = -c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

jusqu'à

$$z = +c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

Ces valeurs doivent être réelles. On aura pour résultat

$$2c\rho \int\int (x^2 + y^2)\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dx\, dy,$$

ou bien

$$2c\rho \int\int x^2 dx \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dy$$
$$+ 2c\rho \int\int y^2 dy \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dx$$

Ces deux intégrales s'étendent à toutes les valeurs de x et de y, telles que l'on ait

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1,$$

parce que le radical $\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ doit être réel.

En posant

$$b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2} = r^2,$$

on voit que

$$\int\int x^2 dx \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dy = \frac{1}{b} \int_{-a}^{a} x^2 dx \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - y^2}\, dy.$$

Mais $\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - y^2}\, dy$ est égale à la moitié de l'aire du cercle dont le rayon est r, c'est-à-dire à $\frac{\pi r^2}{2}$ ou $\frac{\pi b^2}{2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$.

518. Il reste à intégrer $x^2 dx \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$ de $x = -a$ à $x = +a$, car l'inégalité

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$$

donne

$$1 - \frac{x^2}{a^2} > \frac{y^2}{b^2} > 0,$$

et, par conséquent, x doit être comprise entre $-a$ et $+a$. On aura ainsi

$$\int\int x^2 dx \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dy = \frac{2\pi a^3 b}{15}.$$

On obtiendrait de même

$$\int\int y^2 dy \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx = \frac{2\pi b^3 a}{15},$$

en changeant b en a et a en b. Donc si l'on désigne par C le moment d'inertie de l'ellipsoïde par rapport à l'axe des z, on aura

$$C = \frac{4\pi\rho abc}{15}(a^2 + b^2),$$

ou, en posant

$$(2) \qquad M = \frac{4\pi\rho abc}{3},$$

M étant la masse de l'ellipsoïde,

$$(3) \qquad C = \frac{M}{5}(a^2 + b^2).$$

On aura de la même manière les moments d'inertie par rapport aux autres axes Ox et Oy. Ainsi, en résumé, M étant la masse de l'ellipsoïde et A, B, C désignant ses moments d'inertie par rapport aux axes Ox, Oy, Oz, on aura

$$(4) \qquad \begin{cases} A = \frac{M}{5}(b^2 + c^2), \\ B = \frac{M}{5}(a^2 + c^2), \\ C = \frac{M}{5}(a^2 + b^2). \end{cases}$$

519. Si l'on fait

$$a = b = c = r,$$

on trouvera

$$\frac{2M}{5} r^2 \quad \text{ou} \quad \frac{8\pi\rho r^5}{15}$$

pour le moment d'inertie d'une sphère par rapport à un diamètre quelconque.

Si le rayon de la sphère augmente de dr, son moment d'inertie s'accroît de sa différentielle $\frac{8}{3}\pi\rho r^4 dr$, qui est par conséquent le moment d'inertie de la couche infiniment mince comprise entre les deux surfaces sphériques concentriques dont les rayons sont r et $r + dr$.

On conclut de là que

$$\frac{8\pi}{3}\int_a^b \rho r^4 dr = \frac{8\pi\rho}{15}(b^5 - a^5)$$

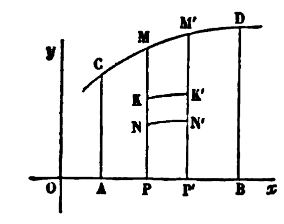
est le moment d'inertie, relativement à un diamètre quelconque, d'une couche sphérique dont les rayons intérieur et extérieur sont a et b, et dans laquelle la densité ρ, supposée la même pour tous les points situés à une même distance du centre, est variable avec cette distance.

SOLIDES DE RÉVOLUTION.

520. On peut connaître, par une seule intégration, le moment d'inertie d'un solide de révolution, par rapport à son axe.

Soient CD la courbe méridienne et Ox l'axe de révolution. Prenons cette droite pour axe des x, et pour axe des y une perpendiculaire Oy située dans le plan du méridien.

Fig. 158.



Soient MP et M'P' deux ordonnées infiniment voisines, et NKK'N' un rectangle compris entre ces deux ordonnées; si l'on pose

$$PN = u, \quad OP = x,$$

on aura

$$NKK'N' = du\,dx,$$

et le volume du solide engendré par la révolution de ce rectangle sera

$$2\pi u\,du\,dx.$$

Donc le moment d'inertie de ce solide sera

$$2\pi\rho u\,du\,dx\,u^2 \quad \text{ou} \quad 2\pi\rho u^3 du\,dx,$$

et celui du solide engendré par PMM'P'

$$2\pi \int_0^y \rho u^3 du\,dx,$$

c'est-à-dire $\frac{\pi}{2}\rho y^4\,dx$; et enfin le moment d'inertie du vo-

lume engendré par la révolution de l'aire ACDB sera

$$\frac{1}{2}\pi\rho\int_a^b y^4\,dx,$$

en désignant par a et b les abscisses OA et OB des extrémités de la courbe CD.

521. Cherchons, par exemple, le moment d'inertie du segment sphérique. Il suffira de supposer que la courbe CD est le cercle qui a pour équation

$$y^2 = 2rx - x^2.$$

Si l'on porte cette valeur dans l'expression

$$\frac{1}{2}\pi\rho\int_a^b y^4\,dx,$$

on aura l'intégrale

$$\frac{1}{2}\pi\rho\int_0^b (2rx - x^2)^2\,dx.$$

On trouve, en effectuant l'intégration,

$$\frac{1}{2}\pi\rho b^3\left(\frac{4r^2}{3} + \frac{b^2}{5} - rb\right),$$

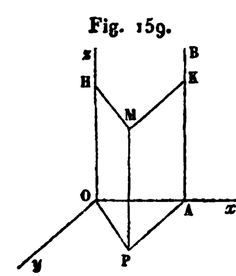
expression qui donne $\frac{8\pi\rho r^5}{15}$ pour le moment d'inertie de la sphère entière, en faisant $b = 2r$.

RELATION ENTRE LES MOMENTS D'INERTIE PAR RAPPORT A DEUX AXES PARALLÈLES.

522. Étant donné le moment d'inertie d'un corps solide par rapport à un axe qui passe par son centre de gravité, il est facile d'avoir son moment d'inertie par rapport a un autre axe parallèle au premier.

Prenons le centre de gravité pour origine des coordonnées, le premier axe pour axe des z, et pour plan des xz le plan des deux axes parallèles. Soit a leur plus courte distance OA.

Fig. 159.



Considérons un point quelconque M(x, y, z) du système, et soit m la masse de ce point : nommons r et R ses distances MH, MK à Oz et à AB. On a

$$R^2 = (x - a)^2 + y^2 = x^2 + y^2 - 2ax + a^2,$$

ou, à cause de $x^2 + y^2 = r^2$,

$$R^2 = r^2 - 2ax + a^2.$$

Par suite

(1) $$mR^2 = mr^2 - 2amx + ma^2.$$

On aurait des équations analogues pour tous les points du système. Donc en les ajoutant et désignant par M la masse du corps, on a

$$\sum mR^2 = \sum mr^2 - 2a \sum mx + Ma^2.$$

L'origine des coordonnées étant le centre de gravité du corps, on a

(2) $$\sum mx = 0.$$

On a donc enfin

(3) $$\sum mR^2 = \sum mr^2 + Ma^2.$$

Ainsi *le moment d'inertie d'un système de points par rapport à un axe quelconque est égal à celui de ce*

système par rapport à un axe parallèle à celui-ci mené par le centre de gravité, augmenté du produit de la masse du corps par le carré de la distance des deux axes.

On conclut de là que *le moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe qui passe par son centre de gravité est moindre que pour tout autre axe parallèle à celui-ci;* que *ce moment est le même pour tous les axes parallèles et également éloignés du centre de gravité,* et qu'*il augmente à mesure que l'axe s'éloigne de ce point.*

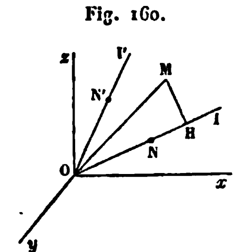
Si l'on représente $\sum mr^2$ par Mk^2, l'équation précédente peut s'écrire

$$(4) \qquad \sum m R^2 = M(k^2 + a^2).$$

RELATION ENTRE LES MOMENTS D'INERTIE PAR RAPPORT A DIFFÉRENTS AXES QUI PASSENT PAR LE MÊME POINT.

523. Soient OI un axe quelconque et Ox, Oy, Oz trois axes rectangulaires. Désignons par m la masse d'un point quelconque $M(x, y, z)$. Abaissons MH perpendiculaire sur OI et posons

Fig. 160.



$$OM = u, \quad MH = r.$$

On a

$$(1) \qquad r^2 = u^2 - (u \cos MOH)^2;$$

or α, β, γ étant les angles que OI fait avec Ox, Oy, Oz, on a

$$u \cos MOH = x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma.$$

D'ailleurs

$$u^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Par conséquent

$$(2) \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2,$$

que l'on peut écrire ainsi :

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} r^2 = {} & (x^2+y^2+z^2)(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) \\ & - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2, \end{aligned} \right.$$

à cause de

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

En développant l'équation (3), on a

$$(4) \left\{ \begin{aligned} r^2 = {} & (y^2+z^2)\cos^2\alpha + (x^2+z^2)\cos^2\beta + (x^2+y^2)\cos^2\gamma \\ & - 2yz\cos\beta\cos\gamma - 2xz\cos\alpha\cos\gamma - 2xy\cos\alpha\cos\beta. \end{aligned} \right.$$

Multiplions cette équation par m et ajoutons toutes les équations analogues relatives aux autres points du système : nous aurons, en désignant par μ le moment d'inertie de tout le système par rapport à l'axe OI,

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \mu = {} & \cos^2\alpha \sum m(y^2+z^2) + \cos^2\beta \sum m(x^2+z^2) \\ & + \cos^2\gamma \sum m(x^2+y^2) - 2\cos\beta\cos\gamma \sum myz \\ & - 2\cos\alpha\cos\gamma \sum mxz - 2\cos\alpha\cos\beta \sum mxy. \end{aligned} \right.$$

Les coefficients des cosinus dans le second membre sont des valeurs indépendantes de la direction de l'axe OI. Posons

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} A &= \sum m(y^2+z^2), \quad D = \sum myz, \\ B &= \sum m(x^2+z^2), \quad E = \sum mxz, \\ C &= \sum m(x^2+y^2), \quad F = \sum mxy. \end{aligned} \right.$$

A, B, C sont les moments d'inertie du système par rapport aux axes de coordonnées. La valeur de μ devient

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} \mu = {} & A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma \\ & - 2D\cos\beta\cos\gamma - 2E\cos\alpha\cos\gamma - 2F\cos\alpha\cos\beta. \end{aligned} \right.$$

QUARANTIÈME LEÇON.

SUITE DES MOMENTS D'INERTIE. — ROTATION AUTOUR D'UN AXE.

Ellipsoïde central. — Axes principaux. — Relation entre les axes principaux relatifs à différents points. — Lieu des points dont les moments principaux sont égaux. — Rotation d'un corps autour d'un axe fixe.

ELLIPSOÏDE CENTRAL.

524. On peut représenter par la construction géométrique suivante la relation qui existe entre les moments d'inertie pris par rapport à différents axes concourants.

Sur la droite OI (*fig.* 160, p. 132) prenons une longueur $ON = \frac{1}{\sqrt{\mu}}$. Sur une autre droite OI' prenons également une longueur $ON' = \frac{1}{\sqrt{\mu'}}$, μ' étant le moment d'inertie du système par rapport à OI'. Concevons qu'on ait fait la même construction pour toutes les droites menées par le point O. Quand on connaîtra le lieu des points N, N', ..., on aura le moment d'inertie par rapport à tout axe donné en élevant au carré l'inverse de la portion de cet axe compris entre le point O et le lieu des points N.

Soient X, Y, Z les coordonnées du point N. On a

$$\cos\alpha = \frac{X}{ON}, \quad \cos6 = \frac{Y}{ON}, \quad \cos\gamma = \frac{Z}{ON},$$

c'est-à-dire

$$\cos\alpha = X\sqrt{\mu}, \quad \cos6 = Y\sqrt{\mu}, \quad \cos\gamma = Z\sqrt{\mu}.$$

Portant ces valeurs dans l'équation (7) du n° 523 et

supprimant le facteur commun μ, on a

$$(1)\quad AX^2 + BY^2 + CZ^2 - 2DYZ - 2EXZ - 2FXY = 0.$$

Or ce lieu géométrique est un ellipsoïde puisque cette équation représente une surface du second degré ayant le centre pour origine et que le rayon vecteur mené par le centre et égal à $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$ est toujours réel et fini; car la quantité $\mu = \sum mr^2$ est finie et positive.

AXES PRINCIPAUX.

525. On peut choisir les axes coordonnés tels, que les rectangles de l'équation (1) disparaissent, en les prenant dirigés suivant les axes principaux de l'ellipsoïde. On a dans ce cas, d'après les valeurs de D, E, F (523),

$$\sum myz = 0, \quad \sum mxz = 0, \quad \sum mxy = 0.$$

Ces trois axes sont appelés les *axes principaux d'inertie* du système relatifs au point O, et les moments d'inertie correspondants sont dits *moments principaux*.

526. Le système des axes principaux est unique, à moins que l'ellipsoïde ne soit de révolution ou n'ait deux de ses axes égaux. Dans ce cas l'axe de révolution et deux diamètres perpendiculaires entre eux et à cet axe forment un système d'axes principaux. Il y en a alors une infinité. On en trouve encore un nombre infini si les trois axes principaux de l'ellipsoïde sont égaux entre eux. Dans ce cas l'ellipsoïde devient une sphère; on a $A = B = C$, et trois diamètres quelconques perpendiculaires entre eux sont des axes principaux, pour lesquels $\sum myz$, $\sum mxz$, $\sum mxy$ ou D, E, F sont toujours nulles. De plus, les

moments d'inertie par rapport à ces axes sont égaux. C'est ce qu'on peut vérifier en faisant dans la valeur générale de μ (523) l'hypothèse actuelle :

$$D = 0, \quad E = 0, \quad F = 0, \quad A = B = C,$$

ce qui donne

$$\mu = A(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = A.$$

Ainsi la valeur de μ est indépendante des angles α, β, γ, c'est-à-dire de la direction OI.

527. Revenons au cas où A, B, C sont différents entre eux. On a

$$\mu = A\cos^2\alpha - B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma,$$

ou, à cause de $\cos^2\alpha = 1 - \cos^2\beta - \cos^2\gamma$,

$$\mu = A - (A - B)\cos^2\beta - (A - C)\cos^2\gamma.$$

Donc si l'on suppose

$$A > B > C,$$

on aura

$$\mu < A.$$

On a de même

$$\mu = C + (A - C)\cos^2\alpha + (B - C)\cos^2\beta,$$

d'où

$$\mu > C.$$

Ainsi A est le plus grand et C le plus petit de tous les moments d'inertie relatifs aux divers axes qui passent par le point O. En d'autres termes, le moment d'inertie le plus grand correspond au plus petit axe de l'ellipsoïde, et le plus petit correspond au plus grand. Cela résulte d'ailleurs de la forme connue de l'ellipsoïde et de ce que le moment d'inertie correspondant à un axe est en raison inverse de la racine carrée du diamètre correspondant.

528. On peut prendre des axes coordonnés tels, que deux des rectangles disparaissent dans l'équation de l'ellipsoïde et qu'elle prenne la forme

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 - 2FXY = 1.$$

L'axe des z est alors un axe de l'ellipsoïde et par conséquent l'un des axes principaux du corps relatifs au point O. L'axe des x et l'axe des y sont dans le plan perpendiculaire à Oz, qui contient les deux autres axes principaux du corps, avec lesquels ils coïncideront quand la troisième somme $\sum mxy$ sera nulle en même temps que les deux autres $\sum myz, \sum mxz$.

RELATION ENTRE LES AXES PRINCIPAUX RELATIFS A DIFFÉRENTS POINTS.

529. *Les axes principaux relatifs à un point quelconque d'un corps sont parallèles aux axes principaux relatifs au centre de gravité de ce corps lorsque la droite qui joint le premier point au second est un axe principal relatif au second.*

Soient O le centre de gravité d'un système de points et Ox, Oy, Oz les axes principaux relatifs à ce point. Par un point O' de l'axe Oz menons $O'x'$, $O'y'$ parallèles à Ox et à Oy. Je dis que $O'z$, $O'x'$, $O'y'$ sont les axes principaux du système relatifs au point O'.

Soit M un point du système ayant x, y, z pour coordonnées par rapport aux axes Ox, Oy, Oz, et x', y', z' par rapport aux axes $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$. Puisque les premiers axes Ox, Oy, Oz sont des axes principaux par rapport au centre de gravité, on a

$$\sum myz = 0, \quad \sum mxz = 0, \quad \sum mxy = 0.$$

Mais, si l'on suppose le point O' situé sur l'axe des z à

une distance h du point O, on a

$$x = x', \quad y = y', \quad z = z' + h:$$

donc on a d'abord

$$\sum mx'y' = \sum mxy = 0;$$

ensuite

$$\sum my'z' = \sum myz - h\sum my.$$

Mais $\sum myz$ est nul par hypothèse et $\sum my$ également, puisque le point O est le centre de gravité du système : donc $\sum my'z'$ est nul, et $O'y'$ est un axe principal relativement à O'. On démontrerait de même que $O'x'$ est un axe principal relatif au même point.

POINTS POUR LESQUELS LES MOMENTS PRINCIPAUX D'INERTIE D'UN CORPS SONT ÉGAUX.

530. PROBLÈME. — *Quel est le point d'un corps pour lequel les trois moments principaux et par suite tous les moments relatifs à des axes quelconques passant par ce point sont égaux entre eux?*

Prenons pour axes coordonnés Ox, Oy, Oz, les trois axes principaux relatifs au centre de gravité du système donné. Soient α, β, γ les coordonnées d'un point O' remplissant la condition exigée. Alors trois axes rectangulaires quelconques ayant le point O' pour origine seront des axes principaux du système. Donc si l'on prend trois axes $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ parallèles aux premiers, on aura

$$\sum my'z' = 0, \quad \sum mx'z' = 0, \quad \sum mx'y' = 0;$$

mais on a

$$x = x' + \alpha, \quad y = y' + \beta, \quad z = z' + \gamma.$$

et, puisque les axes primitifs sont des axes principaux,

$$\sum myz = 0, \quad \sum mxz = 0, \quad \sum mxy = 0,$$

l'équation $\sum mx'y' = 0$ revient à

$$\sum m(x-\alpha)(y-\beta) = 0,$$

ou bien

$$\sum mxy - \beta\sum mx - \alpha\sum my + \alpha\beta\sum m = 0.$$

Mais $\sum mxy$, $\sum mx$, $\sum my$ sont nulles; donc

$$\alpha\beta = 0,$$

et l'on trouverait de même

$$\alpha\gamma = 0, \quad \beta\gamma = 0.$$

Il résulte de là que deux des trois inconnues α, β, γ doivent être nulles. Supposons que ce soient β et γ. Alors le point O' est sur l'axe Ox.

531. Jusqu'à présent nous avons exprimé que les axes principaux relatifs au point O' sont parallèles aux axes Ox, Oy, Oz. Il faut exprimer que les moments correspondants aux nouveaux axes sont égaux. Or, d'après un théorème démontré (522), ces moments sont

$$A, \quad B + M\alpha^2, \quad C + M\alpha^2;$$

on doit donc avoir

$$A = B + M\alpha^2 = C + M\alpha^2;$$

donc

$$B = C,$$

et ensuite

$$\alpha = \pm\sqrt{\frac{A - B}{M}},$$

ce qui exige que l'on ait $A > B$. Il faut que l'ellipsoïde relatif au point O soit de révolution autour de son petit axe, actuellement dirigé suivant l'axe des x et auquel se rapporte le moment A. Il existe alors deux points O′ et O_1, symétriques par rapport au point O et situés à une distance de ce point égale à $\sqrt{\frac{A - B}{M}}$.

532. Prenons pour exemple l'ellipsoïde,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

On a vu (518) que, M étant la masse de cet ellipsoïde, les moments par rapport aux axes sont

$$A = \frac{1}{5} M (b^2 + c^2),$$

$$B = \frac{1}{5} M (a^2 + c^2),$$

$$C = \frac{1}{5} M (a^2 + b^2).$$

Or le centre de l'ellipsoïde est son centre de gravité et ses axes sont les axes principaux d'inertie; car on a évidemment pour ce point

$$\sum mxy = 0, \quad \sum mxz = 0, \quad \sum myz = 0.$$

Supposons $a < b$, alors $A > B$, et pour qu'il existe un point O′, il faut qu'on ait $B = C$, c'est-à-dire $b = c$. Donc l'ellipsoïde doit être de révolution autour de l'axe OA. Il y aura donc deux points répondant à la ques-

tion, situés sur le plus petit axe et à des distances de l'origine égales à $\pm\sqrt{\frac{b^2-a^2}{5}}$.

Ces points seront en dedans ou en dehors de l'ellipsoïde, suivant que l'on aura $\frac{b^2-a^2}{5} \lessgtr a^2$ ou $b \lessgtr a\sqrt{6}$. Ils seront aux extrémités du petit axe, si l'on a $b = a\sqrt{6}$.

MOUVEMENT DE ROTATION D'UN SYSTÈME SOLIDE AUTOUR D'UN AXE FIXE.

533. Dans un pareil mouvement, tous les points du système décrivent des arcs de cercles semblables, dont les rayons sont leurs distances à l'axe. Ces rayons décrivent autour de l'axe des angles égaux, dans un même temps. Tous les points situés à la même distance de l'axe ont à chaque instant la même vitesse, et celle des points situés à une distance égale à l'unité est ce qu'on appelle la *vitesse angulaire* ou de rotation du système. Nous la désignerons par ω : c'est généralement une fonction du temps. La vitesse $\frac{ds}{dt}$ d'un point quelconque est proportionnelle à sa distance r à l'axe, et par conséquent elle est représentée par $r\omega$. En effet, soient ds et $d\sigma$ les arcs infiniment petits parcourus par le point considéré et par un autre point situé à l'unité de distance de l'axe; ces arcs étant semblables, on a

$$ds = r\,d\sigma,$$

et par suite

$$\frac{ds}{dt} = r\frac{d\sigma}{dt} = r\omega.$$

534. Un mouvement de rotation est dit *uniforme* quand la vitesse de rotation est constante. Ce mouvement a lieu lorsque les points du système ne sont sollicités par aucune force motrice ou par des forces motrices qui se font équilibre autour de l'axe fixe.

En effet, soit P la force motrice d'un point m, qui décrit autour de l'axe Oz un arc de cercle MmM' d'un rayon $Km = r$. La force qu'il faudrait appliquer à ce point, s'il était libre, pour lui donner son mouvement effectif, c'est-à-dire pour lui faire parcourir l'arc MmM', est la résultante de deux forces : l'une la force tangentielle

$$m\frac{dv}{dt} \quad \text{ou} \quad mr\frac{d\omega}{dt};$$

l'autre, la force centripète, dirigée suivant le rayon mK :

$$m\frac{v^2}{r} \quad \text{ou} \quad mr\omega^2.$$

Décomposons la force motrice P en deux autres, l'une Z, parallèle à l'axe Oz, et l'autre Q, située dans le plan du cercle MM', à une distance $KL = q$, de l'axe Oz.

Fig. 161.

D'après le principe de d'Alembert, toutes les forces motrices du système font équilibre, à chaque instant, aux forces effectives prises en sens contraire. Mais, pour tous les points du corps, les composantes $mr\omega^2$ et Z sont toujours détruites par la résistance de l'axe fixe. D'ailleurs les autres composantes étant dans des plans perpendiculaires à l'axe, il faut et il suffit que la somme de leurs moments par rapport à celui-ci soit nulle, d'où résulte

$$\sum mr^2\frac{d\omega}{dt} = \sum Qq,$$

ou, puisque $\frac{d\omega}{dt}$ est le même pour tous les points du système,

$$\frac{d\omega}{dt}\sum mr^2 = \sum Qq,$$

et, par conséquent,

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{\sum Qq}{\sum mr^2}.$$

Cette équation détermine la vitesse angulaire à une époque quelconque. C'est l'équation du mouvement.

On en déduit que si les forces motrices sont nulles, on a $\frac{d\omega}{dt}=0$ ou $\omega=$ constante. Le mouvement est donc uniforme.

Il est encore uniforme quand les forces se font équilibre autour de l'axe; car on a dans ce cas $\sum Qq=0$, et comme $\sum mr^2$ n'est pas nulle, on aura $\frac{d\omega}{dt}=0$, et la vitesse angulaire ω sera constante.

QUARANTE ET UNIÈME LEÇON.

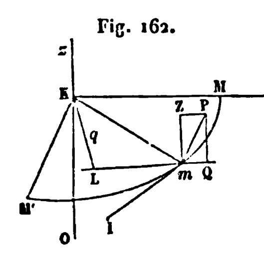
MOUVEMENT DE ROTATION AUTOUR D'UN AXE (SUITE).

Cas où le corps est mis en mouvement par des percussions. — Calcul des percussions exercées sur l'axe fixe. — Cas où l'axe n'éprouve aucune percussion. — Condition pour qu'il n'y ait de percussion qu'en un point de l'axe.

CAS OU LE CORPS EST MIS EN MOUVEMENT PAR DES PERCUSSIONS.

535. Supposons que tous les points du système soient mis en mouvement par des percussions simultanées. Décomposons chaque force intantanée P en deux : l'une Z, parallèle à l'axe Oz et qui est détruite par la résistance de cet axe; l'autre Q, située dans le plan MmM', perpendiculaire à cet axe. Soit v la vitesse que cette dernière composante qu'il suffit de considérer serait capable d'imprimer au point m s'il était libre : mv sera la quantité de mouvement correspondante. Si ω est la vitesse de rotation du système, la quantité de mouvement effective du point m situé à une distance r de l'axe est $mr\omega$. Donc si l'on appelle q la perpendiculaire KL abaissée du point K sur la direction de la force Q, on aura, en exprimant qu'il y a équilibre entre les quantités de mouvement imprimées et les quantités de mouvement effectives, celles-ci étant prises en sens

Fig. 162.



contraire :

$$\sum mvq - \omega \sum mr^2 = 0,$$

d'où

(1) $$\omega = \frac{\sum mvq}{\sum mr^2}.$$

536. Supposons que toutes les vitesses v, v', v'', ..., communiquées à différents points du système par des percussions, soient égales et parallèles, et désignons par μ la somme des masses des points qui reçoivent directement cette vitesse commune v, que les liaisons du système les empêchent de prendre réellement. Appelons f la distance du centre de gravité de la masse μ à un plan passant par l'axe et parallèle à la direction des vitesses. On a, d'après les propriétés connues du centre de gravité,

$$\sum mvq = v \sum mq = v\mu f,$$

et la formule (1) devient

(2) $$\omega = \frac{\mu v f}{\sum mr^2}.$$

Remarquons que μ peut n'être pas la masse totale du système ; mais $\sum mr^2$ est son moment d'inertie total.

Si le système est un corps solide continu, il faut remplacer $\sum mr^2$ par l'intégrale $\int r^2 dm$ prise dans toute l'étendue du corps.

537. La formule (2) convient à un corps solide C

mobile autour d'un axe fixe Oz, choqué par un autre corps C_1 qui après le choc reste attaché en C_2 au premier et dont tous les points sont animés de vitesses égales et parallèles. Il faut alors supposer que μ est la masse du corps C_1, v sa vitesse, f la distance de son centre de gravité à un plan passant par l'axe et parallèle à la direction de la vitesse v : enfin que $\sum mr^2$ est le moment d'inertie du système invariable formé par les corps C et C_2. Il est évident que cela revient à imprimer aux points de la partie C_2 du système (C, C_2) des percussions capables de donner à tous les points de cette masse μ des vitesses égales et parallèles à v.

Fig. 163.

538. Si le corps C est choqué simultanément par plusieurs masses $\mu, \mu', \mu'', \ldots$, animées de vitesses différentes et qui lui demeurent attachées après tous ces chocs, on aura

$$\omega = \frac{\sum \mu v f}{\sum mr^2}.$$

$\sum \mu v f$ indiquant la somme de toutes les quantités analogues à $\mu v f$ et relatives aux masses $\mu, \mu', \mu'', \ldots$.

539. La formule (1) peut se déduire de l'équation (534)

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sum Qq}{\sum mr^2},$$

de la même manière qu'on étend le principe de d'Alembert aux quantités de mouvement finies. Il suffit de supposer que la force Q qui agit perpendiculairement à l'axe est une percussion. Le temps θ de son action étant très-court, il est permis de supposer que q reste constant pendant cet intervalle de temps. Alors, si l'on intègre l'équation précédente depuis $t = 0$ jusqu'à $t = \theta$, on obtient

$$\omega = \frac{1}{\sum mr^2} \sum q \int_0^\theta Q\,dt;$$

or on a

$$\int_0^\theta Q\,dt = mv:$$

donc

$$\omega = \frac{\sum mvq}{\sum mr^2}.$$

540. Si le système, au lieu d'éprouver des percussions simultanées, reçoit une suite de chocs se succédant à des époques quelconques, la vitesse angulaire sera toujours donnée par la formule

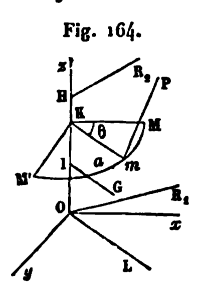
$$\omega = \frac{\mu v f + \mu' v' f' + \ldots}{\sum mr^2};$$

car, après un premier choc, le mouvement est le même que si le choc avait lieu à cet instant-là, le corps étant en repos; par conséquent on peut supposer que le corps reçoive le premier choc et le second au même instant pour déterminer la vitesse angulaire après la seconde percussion, et il en sera de même pour de nouvelles percussions.

CALCUL DES PERCUSSIONS EXERCÉES SUR L'AXE FIXE.

541. Supposons que le corps soit mis en mouvement par une force instantanée qui imprimerait une vitesse V à une certaine masse μ au centre de gravité de laquelle elle serait appliquée. Cette force instantanée ou percussion a pour mesure la quantité de mouvement μV. Prenons toujours l'axe fixe pour axe des z, et pour plan des xy le plan perpendiculaire à l'axe fixe mené par le point du corps auquel est appliquée la force instantanée. Nous désignerons par α et 6 les coordonnées de ce point d'application. On sait que les quantités de mouvement imprimées aux différents points doivent faire équilibre aux quantités de mouvement effectives, prises en sens contraire, et cet équilibre doit avoir lieu en vertu de la fixité de l'axe. On peut rendre cet axe immobile en fixant deux de ses points pris à volonté. Prenons le point O, origine des coordonnées, et un autre point H quelconque sur Oz. En supposant que ces points cessent d'être fixes, on pourra détruire les percussions exercées sur l'axe et maintenir cet axe en repos, en appliquant aux deux points O et H deux forces instantanées R_1 et R_2 d'intensités et de directions convenables. Si l'on introduit ces deux forces, qui représentent la résistance des points, l'équilibre aura encore lieu en regardant le corps comme entièrement libre. Il faut donc appliquer à ce système de forces les conditions d'équilibre connues d'un corps entièrement libre.

Fig. 164.



Soient X, Y, Z les composantes de la quantité de mouvement μV, et X_1, Y_1, Z_1 celles de la résistance du point O; X_2, Y_2, Z_2 celles de la résistance du point H; enfin

$m\frac{dx}{dt}$, $m\frac{dy}{dt}$, $m\frac{dz}{dt}$ les composantes de la quantité de mouvement effective pour le point m : soit $OH = h$. On aura d'abord les trois équations

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} X - \sum m\frac{dx}{dt} + X_1 + X_2 = 0, \\ Y - \sum m\frac{dy}{dt} + Y_1 + Y_2 = 0, \\ Z - \sum m\frac{dz}{dt} + Z_1 + Z_2 = 0, \end{array}\right.$$

et les équations des moments

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} Y_2 h - Z\beta + \sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = 0, \\ Z\alpha - X_2 h + \sum m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) = 0, \\ X\beta - Y\alpha + \sum m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = 0. \end{array}\right.$$

542. On peut transformer ces équations. En remarquant d'abord que z est constante, puisque chaque point décrit un cercle parallèle au plan des xy, on a

$$\frac{dz}{dt} = 0.$$

De plus, en désignant par θ l'angle que mK fait avec une parallèle à l'axe des x menée par le point K, on a

$$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{dx}{dt} = -y\omega,\quad \frac{dy}{dt} = x\omega,$$

puisque $\frac{d\theta}{dt}$ n'est autre chose que la vitesse angulaire ω.

On aura donc

$$\sum m \frac{dx}{dt} = -\sum m y \omega = -\omega M y_1,$$

$$\sum m \frac{dy}{dt} = \sum m x \omega = \omega M x_1,$$

x_1 et y_1 désignant les coordonnées du centre de gravité du corps entier, et M la masse totale du système. D'après cela, les équations d'équilibre deviennent

(3) $$X + \omega M y_1 + X_1 + X_2 = 0,$$

(4) $$Y - \omega M x_1 + Y_1 + Y_2 = 0,$$

(5) $$Z + Z_1 + Z_2 = 0;$$

(6) $$Y_2 h - Z\beta - \omega \sum m x z = 0,$$

(7) $$Z\alpha - X_2 h - \omega \sum m y z = 0,$$

(8) $$X\beta - Y\alpha + \omega \sum m r^2 = 0.$$

La dernière, équation, ne contenant pas les composantes des résistances aux points O et H, sera l'équation du mouvement, c'est-à-dire qu'elle déterminera la vitesse angulaire ω. On en tire

(9) $$\omega = \frac{Y\alpha - X\beta}{\sum m r^2},$$

et cette valeur de ω s'accorde avec la formule

$$\omega = \frac{\mu v f}{\sum m r^2},$$

en désignant par v la projection de la vitesse V sur un plan perpendiculaire à l'axe. En effet $\mu v f$ est le moment par rapport à l'axe Oz de la percussion appliquée au corps, au point du plan xOy qui a pour coordonnées

α, 6, et l'on sait que ce moment est aussi représenté par $Y\alpha - X6$.

543. Les équations (6) et (7) déterminent X_2 et Y_2. Les équations (3) et (4) feront ensuite connaître X_1 et Y_1. L'équation (5) donnera la somme $Z_1 + Z_2$. On ne peut pas déterminer séparément Z_1 et Z_2, parce que ces deux forces agissent suivant la même droite Oz et se composent en une seule égale à leur somme. Si l'on fait varier la distance h, les équations (6) et (7) montrent que X_2 et Y_2 varient en raison inverse de h.

CONDITIONS POUR QUE L'AXE N'ÉPROUVE AUCUNE PERCUSSION. — CENTRE DE PERCUSSION.

544. Proposons-nous maintenant de chercher les conditions qui doivent être remplies pour que l'axe n'éprouve aucune percussion. Il faut pour cela que les composantes des résistances soient toutes nulles. Si l'on introduit ces hypothèses dans les cinq premières équations (542), elles deviennent

$$(1)\qquad X + \omega M y_1 = 0,$$

$$(2)\qquad Y - \omega M x_1 = 0,$$

$$(3)\qquad Z = 0,$$

$$(4)\qquad \sum mxz = 0,$$

$$(5)\qquad \sum myz = 0.$$

L'équation $Z = 0$ exprime que la percussion appliquée à la masse μ doit agir dans un plan perpendiculaire à l'axe. Les deux dernières expriment que Oz doit être l'un des axes principaux d'inertie relatifs au point O.

545. Pour interpréter les équations (1) et (2), faisons passer le plan des xz par le centre de gravité de tout le

corps; alors on a

$$y_1 = 0, \quad x_1 = \text{GI} = a,$$

et les deux premières conditions deviennent

$$\text{X} = 0, \quad \text{Y} = \omega \text{M} a.$$

La première indique que la percussion se réduit à sa composante Y, puisque l'on a déjà $Z = 0$, c'est-à-dire que la percussion doit être perpendiculaire au plan zOG qui passe par l'axe et par le centre de gravité du corps. La seconde va nous donner la valeur de f, c'est-à-dire la plus courte distance de cette force à l'axe; car on a

$$\text{Y} = \mu v, \quad \omega = \frac{\mu v f}{\sum mr^2},$$

et l'équation $\text{Y} = \omega \text{M} a$ devient

$$\mu v = \frac{\mu v f}{\sum mr^2} \text{M} a$$

d'où

$$f = \frac{\sum mr^2}{\text{M} a}.$$

Soit $\text{M}k^2$ le moment d'inertie par rapport à un axe mené par le centre de gravité G du corps et parallèle à Oz : on a

$$\sum mr^2 = \text{M}(a^2 + k^2),$$

et, par conséquent,

$$f = a + \frac{k^2}{a}.$$

546. En résumé, on a les trois conditions suivantes pour que l'axe n'éprouve aucune percussion :

1° La direction de la percussion doit être perpendicu-

laire au plan qui passe par l'axe fixe et par le centre de gravité du corps.

2° Cet axe doit être un des axes principaux pour le point où il rencontre le plan qui lui est perpendiculaire et qui contient la force instantanée.

3° Enfin la distance de cette force à l'axe doit être égale à $a + \frac{k^2}{a}$, a étant la distance du centre de gravité du corps à l'axe et Mk^2 le moment d'inertie du corps relativement à un axe mené par ce centre de gravité parallèlement à l'axe fixe.

547. On appelle *centre de percussion* le point auquel la percussion doit être appliquée dans le plan passant par l'axe et le centre de gravité pour qu'il n'y ait pas d'effort exercé sur l'axe fixe : la distance du centre de percussion à l'axe fixe est $a + \frac{k^2}{a}$.

Si l'axe passait par le centre de gravité, il éprouverait toujours une percussion. En effet, pour qu'il n'y ait pas d'effort exercé sur l'axe, la percussion appliquée au corps doit être égale à $\omega M a$ (545). Elle doit donc être nulle si a est nulle, c'est-à-dire si l'axe passe par le centre de gravité du corps : mais alors $f = \infty$. Le centre de percussion serait donc à l'infini.

548. Réciproquement, si le corps est en mouvement autour de l'axe, on pourra l'arrêter brusquement sans qu'il existe aucune percussion contre l'axe en appliquant au centre de percussion une force instantanée égale à $\omega M a$, perpendiculaire au plan mené par l'axe et par le centre de gravité du corps.

CONDITION POUR QU'IL N'Y AIT DE PERCUSSION QU'EN UN POINT DE L'AXE.

549. Si ce point est le point H, il faut que X_1, Y_1, Z_1, composantes de la quantité de mouvement due à la force

appliquée au point O, soient nulles, ce qui donne, en supposant $y_1 = o$, $x_1 = a$,

$$X_2 = -X, \quad Y_2 = -Y + \omega M a, \quad Z_2 = -Z:$$

puis,

$$\omega = \frac{Y\alpha - X6}{\sum mr^2} = \frac{\mu v f}{\sum mr^2},$$

et si $Z = o$,

$$h = \frac{\omega E}{\omega M a - Y} = \frac{\omega D}{X},$$

en posant

$$D = \sum myz, \quad E = \sum mxz.$$

L'équation de condition est donc

$$DY + EX = \omega M a.$$

Si en même temps D et E sont nulles, c'est-à-dire si Oz est un axe principal d'inertie pour le point O, on a $h = o$ et la percussion est appliquée au point O.

QUARANTE-DEUXIÈME LEÇON.

ROTATION D'UN CORPS AUTOUR D'UN AXE (SUITE).

Rotation d'un corps sollicité par des forces quelconques. — Pressions sur l'axe. — Cas où il n'y a pas de forces motrices. — Cas où les forces motrices se réduisent à un couple dans un plan perpendiculaire à l'axe. — Mouvement du treuil.

ROTATION D'UN CORPS SOLLICITÉ PAR DES FORCES QUELCONQUES.

550. Nous allons déterminer le mouvement d'un corps assujetti à tourner autour d'un axe fixe et sollicité par des forces motrices quelconques, qui agissent d'une manière continue. Nous calculerons ensuite les pressions exercées sur l'axe à chaque instant, pressions qu'il faut bien distinguer des percussions initiales.

Soient (*fig.* 164, p. 149) X, Y, Z les composantes de la force motrice P du point m (x, y, z), qui décrit autour de l'axe Oz le cercle MmM'. Les composantes de la force effective du même point prise en sens contraire sont

$$-m\frac{d^2x}{dt^2},\quad -m\frac{d^2y}{dt^2},\quad -m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

D'après le principe de d'Alembert, ces forces et les forces analogues pour les autres points du corps doivent se faire équilibre au moyen de l'axe, ce qui exige que la somme de leurs moments par rapport à celui-ci soit nulle. On a donc pour équation du mouvement

$$\sum\left[\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)y - \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)x\right] = 0$$

ou

$$(1) \qquad \sum m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = \sum (\mathrm{Y}x - \mathrm{X}y).$$

Cette équation contient les coordonnées variables avec le temps, de tous les points du corps. On peut la simplifier et n'avoir plus qu'une seule variable, fonction de t. Soient, en effet, $m\mathrm{K} = r$ et $m\mathrm{KM} = \theta$. On a

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

d'où l'on déduit (542)

$$\frac{dx}{dt} = -y\omega, \quad \frac{dy}{dt} = x\omega,$$

donc

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = (x^2 + y^2)\,\omega = r^2\omega,$$

d'où, en différentiant,

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = r^2\frac{d\omega}{dt}.$$

Par suite, l'équation (1) devient

$$\sum mr^2\frac{d\omega}{dt} = \sum (\mathrm{Y}x - \mathrm{X}y),$$

ou bien, en faisant passer hors du signe $\sum$ le facteur $\frac{d\omega}{dt}$, qui est le même à chaque instant pour tous les points,

$$(2) \qquad \frac{d\omega}{dt} = \frac{\sum (\mathrm{Y}x - \mathrm{X}y)}{\sum mr^2},$$

équation qui s'accorde avec celle qu'on a déjà trouvée (534), puisque

$$\mathrm{Q}q = \mathrm{Y}x - \mathrm{X}y.$$

PRESSIONS SUR L'AXE.

551. On pourra considérer le corps comme entièrement libre, pourvu qu'on applique à deux points quelconques O et H, pris sur l'axe, deux forces $R_1(X_1, Y_1, Z_1)$ et $R_2(X_2, Y_2, Z_2)$, égales et contraires aux pressions exercées sur ces deux points à chaque instant du mouvement. On aura donc, en posant $OH = h$, les six équations :

$$\sum\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right) + X_1 + X_2 = 0,$$
$$\sum\left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right) + Y_1 + Y_2 = 0,$$
$$\sum\left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right) + Z_1 + Z_2 = 0,$$
$$\sum\left[\left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)z - \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)y\right] + Y_2h = 0,$$
$$\sum\left[\left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)x - \left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)z\right] - X_2h = 0,$$
$$\sum\left[\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)y - \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)x\right] = 0.$$

552. On simplifie ces équations en y introduisant les dérivées de ω. D'abord z étant une constante, on a

$$\frac{dz}{dt} = 0, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

On a ensuite

$$\frac{dx}{dt} = -y\omega, \quad \frac{dy}{dt} = x\omega,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -y\frac{d\omega}{dt} - \omega\frac{dy}{dt} \quad \text{ou} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -y\frac{d\omega}{dt} - x\omega^2,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = x\frac{d\omega}{dt} + \omega\frac{dx}{dt} \quad \text{ou} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = x\frac{d\omega}{dt} - y\omega^2.$$

Si l'on porte ces valeurs dans les six équations qui pré-

cèdent, on aura, en désignant par (x_1, y_1, z_1) les coordonnées du centre de gravité du système et par M sa masse,

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}
&\sum X + \frac{d\omega}{dt} My_1 + \omega^2 Mx_1 + X_1 + X_2 = 0,\\
&\sum Y - \frac{d\omega}{dt} Mx_1 + \omega^2 My_1 + Y_1 + Y_2 = 0,\\
&\sum Z + Z_1 + Z_2 = 0,\\
&\sum (Zy - Yz) + \frac{d\omega}{dt} \sum mxz + \omega^2 \sum myz - Y_2 h = 0,\\
&\sum (Xz - Zx) + \frac{d\omega}{dt} \sum myz - \omega^2 \sum mxz + X_2 h = 0,\\
&\sum (Yx - Xy) - \frac{d\omega}{dt} \sum mr^2 = 0.
\end{aligned}\right.$$

553. De ces six équations, la dernière ne contient pas les composantes des résistances R_1 et R_2. C'est l'équation du mouvement déjà trouvée.

Quand on saura intégrer cette équation, les équations 4ᵉ et 5ᵉ du système (3) feront connaître X_2 et Y_2, dont les valeurs sont, comme on voit, en raison inverse de h. La raison en est que $X_2 h$ et $Y_2 h$ sont les moments des couples qui résulteraient de la translation, au point O, des composantes X_2 et Y_2 de la force R_2. Or ces moments doivent être indépendants de la position du point H, puisque chacun de ces couples doit détruire d'autres couples qui en sont eux-mêmes indépendants. Les composantes X_2 et Y_2 étant connues, on aura X_1 et Y_1 par les deux premières équations du système, et la suivante donnera $Z_1 + Z_2$ sans déterminer en particulier aucune de ces composantes. En effet, comme on l'a vu ailleurs, au lieu d'appliquer les deux forces Z_1 et Z_2 aux deux points O et H, il revient au même d'appliquer la force unique $Z_1 + Z_2$ au point O.

CAS OU IL N'Y A PAS DE FORCES MOTRICES.

554. Dans le cas eù il n'y a pas de forces motrices, X, Y, Z sont nulles pour tous les points du corps, et l'équation (2) du n° 550 donne $\frac{d\omega}{dt} = 0$, et $\omega = \text{const.}$, ce que l'on sait déjà. Le système (3) se réduit alors à

$$(1) \quad \begin{cases} X_2 = -\frac{\omega^2}{h}\sum mxz, \\ Y_2 = -\frac{\omega^2}{h}\sum myz, \\ X_1 = \frac{\omega^2}{h}\sum mxz - \omega^2 M x_1, \\ Y_1 = \frac{\omega^2}{h}\sum myz - \omega^2 M y \\ Z_1 + Z_2 = 0. \end{cases}$$

Cette dernière équation montre que les résistances R_1 et R_2 se réduisent à deux forces perpendiculaires à l'axe, puisque leurs composantes parallèles à cet axe donnent une somme nulle.

Il est aisé de voir que les résistances R_1 et R_2 font équilibre aux forces centrifuges de tous les points du corps qui agissent sur l'axe perpendiculairement à sa direction. La force tangentielle est nulle pour chaque point. D'après les formules (1), les résistances sont proportionnelles au carré de la vitesse constante ω.

555. Le point H n'éprouve aucune pression si X_2 et Y_2 sont nulles, et pour cela il faut et il suffit qu'on ait les deux conditions

$$(2) \qquad \sum mxz = 0, \quad \sum myz = 0,$$

c'est-à-dire que l'axe Oz soit un des axes principaux relatifs au point O. Donc, *si un corps retenu par un seul*

point fixe commence à tourner autour d'un des axes principaux relatifs à ce point, il continuera à tourner uniformément autour de cet axe comme s'il était fixe.

Le système (1) donne encore

$$X_1 = -\omega^2 M x_1, \quad Y_1 = -\omega^2 M y_1 :$$

donc

$$R_1 = \omega^2 M a,$$

a étant la distance du centre de gravité à l'axe. On a de plus

$$\frac{X_1}{Y_1} + \frac{x_1}{y_1},$$

ce qui fait voir que la force R_1 ou la pression sur le point O est dirigée dans le plan zOG qui passe par l'axe Oz et par le centre de gravité G. C'est ce qu'on trouverait aussi en prenant ce plan pour le plan zOx à l'instant que l'on considère.

556. Il peut se faire que le point O ne supporte aucune pression. Alors l'axe n'en éprouve aucune. Il faut et il suffit pour cela que X_1 et Y_1 soient nulles, et par conséquent que x_1 et y_1 soient nulles. Ainsi le centre de gravité doit être sur l'axe de rotation, et alors le mouvement ayant commencé autour de cet axe, supposé fixe, continuera uniformément autour du même axe lorsqu'on le rendra entièrement libre. L'axe de rotation est alors un axe principal pour tous les points de sa direction.

CAS OU LES FORCES MOTRICES SE RÉDUISENT A UN COUPLE.

557. Les conséquences précédentes subsistent quand les forces motrices se réduisent à un couple situé dans un plan perpendiculaire à l'axe. On a dans ce cas

$$\sum X = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum Z = 0,$$

$$\sum (Zy - Yz) = 0, \quad \sum (Xz - Zx) = 0.$$

Pour que le point H n'éprouve aucune pression, il faut que l'on ait $X_2 = 0$, $Y_2 = 0$, $Z_2 = 0$. Les équations 4ᵉ et 5ᵉ du système (3), nᵒ 551, donnent

$$-\frac{d\omega}{dt}\sum mxz + \omega^2\sum myz = 0,$$

$$-\frac{d\omega}{dt}\sum myz - \omega^2\sum mxz = 0.$$

En éliminant entre ces deux équations $\frac{d\omega}{dt}$, on a

$$\omega^2\left[\left(\sum mxz\right)^2 + \left(\sum myz\right)^2\right] = 0$$

ou

$$\sum mxz = 0, \quad \sum myz = 0.$$

Ainsi l'axe de rotation doit être un des trois axes principaux d'inertie relatifs au point O. Alors les trois premières équations du système (3) feront connaître les composantes X_1, Y_1, Z_1 de la pression exercée sur le point O, pression perpendiculaire à l'axe, car $Z_1 = 0$. Si à une époque quelconque cet axe cesse d'être fixe et que le corps soit seulement retenu par le point O, il continuera à tourner uniformément autour du même axe.

558. Pour que le point O ne soit pas pressé, il faut que X_1, Y_1, Z_1 soient nulles. Alors les deux premières équations du système (3), nᵒ 552, donnent

$$y_1\frac{d\omega}{dt} + \omega^2 x_1 = 0, \quad -x_1\frac{d\omega}{dt} + \omega^2 y_1 = 0,$$

d'où, en éliminant $\frac{d\omega}{dt}$,

$$\omega^2(x_1^2 + y_1^2) = 0;$$

on a donc

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0$$

et le centre de gravité est sur l'axe Oz qui est un des axes principaux pour ce point, et par suite pour tous les points de cet axe. Donc *si un corps commence à tourner autour de l'un des axes principaux qui se rapportent à son centre de gravité et qu'il soit sollicité constamment par un couple situé dans un plan perpendiculaire à cet axe, son mouvement se continuera sans altération, lors même que cet axe serait entièrement libre.*

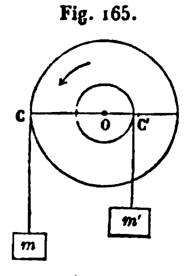
On voit que le système jouit des mêmes propriétés que dans le cas où il n'y a pas de forces motrices.

559. Si Oz n'était pas l'un des axes principaux relatifs au point O, ce point étant seul fixé, la pression au point H ne serait jamais nulle, et le corps ne continuerait pas à tourner autour de Oz. On voit par là qu'un corps retenu par un point fixe O et sollicité par un couple ne tend pas à tourner autour d'une perpendiculaire Oz au plan de ce couple, à moins que cette perpendiculaire ne soit l'un des axes principaux relatifs au point O.

MOUVEMENT DU TREUIL.

560. Considérons un treuil sollicité par le poids de deux masses m et m' agissant au moyen de cordes, la première sur la roue OC, la seconde sur le cylindre OC'. Nous tiendrons compte de la masse du treuil; mais nous négligerons le poids des cordes et le frottement des tourillons sur les coussinets. Soient x et x' les distances des centres de gravité des masses m et m' aux points C et C'.

Fig. 165.



D'après le principe de d'Alembert, nous devrons regarder deux forces respectivement égales à $m\left(g - \frac{d^2x}{dt^2}\right)$,

$m'\left(g-\frac{d^2x'}{dt^2}\right)$, comme appliquées en m et en m' suivant la verticale et tirant de haut en bas. Ce sont les forces perdues relatives à ces deux points.

Considérons une molécule du treuil, de masse μ, à une distance r de l'axe. Si ω est à l'époque actuelle la vitesse angulaire du système, la force effective du point μ se compose de sa force tangentielle $\mu r\frac{d\omega}{dt}$ et de sa force centripète $\mu r^2\omega$ qu'il faut prendre toutes deux en sens contraire. Mais la force centripète perpendiculaire à l'axe fixe est détruite par la résistance de cet axe. Le poids du treuil est aussi détruit, parce que son centre de gravité se trouve sur l'axe fixe, à cause de la symétrie du treuil autour de son axe.

Donc, si nous faisons $OC=c$, $OC'=c'$, et si nous exprimons que la somme des moments par rapport à l'axe des forces motrices du système et des forces effectives prises en sens contraires est nulle, nous aurons, d'après le sens suivant lequel les forces tendent à faire mouvoir leurs points d'application,

$$(1)\qquad m\left(g-\frac{d^2x}{dt^2}\right)c-m'\left(g-\frac{d^2x'}{dt^2}\right)c'-\frac{d\omega}{dt}\sum\mu r^2=0.$$

561. Les dérivées des deux variables x et x' peuvent être exprimées au moyen de la vitesse angulaire. En effet, d'après le sens du mouvement, la vitesse du point m est égale à celle du point C; mais la vitesse du point m' est égale et de sens contraire à celle du point C'. On aura donc

$$\frac{dx}{dt}=c\omega,\quad \frac{dx'}{dt}=-c'\omega,$$

et, par suite,

$$\frac{d^2x}{dt^2}=c\frac{d\omega}{dt},\quad \frac{d^2x'}{dt^2}=-c'\frac{d\omega}{dt}$$

Désignons par Mk^2 le moment d'inertie du treuil par rapport à l'axe, M étant la masse du treuil. L'équation du mouvement (1) deviendra

$$(2) \qquad mc\left(g - c\frac{d\omega}{dt}\right) - m'c'\left(g + c'\frac{d\omega}{dt}\right) - \frac{d\omega}{dt}Mk^2 = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{g(mc - m'c')}{Mk^2 + mc^2 + m'c'^2},$$

d'où l'on déduit, en supposant la vitesse initiale nulle,

$$(3) \qquad \omega = \frac{gt(mc - m'c')}{Mk^2 + mc^2 + m'c'^2}.$$

La vitesse est donc proportionnelle au temps, et le mouvement est uniformément accéléré. L'accélération est à la pesanteur comme $mc - m'c'$ est à $Mk^2 + mc^2 + m'c'^2$.

Si l'on avait $mc = m'c'$, la vitesse angulaire serait nulle et le corps resterait en repos. En effet, c'est la condition pour que les poids m et m' se fassent équilibre. S'il y avait une vitesse initiale, le mouvement serait uniforme.

562. Les tensions des cordons ne sont autre chose que les forces perdues. Appelons-les T et T', nous aurons

$$(4) \qquad \left\{\begin{aligned} T &= m\left(g - \frac{d^2x}{dt^2}\right) = m\left(g - c\frac{d\omega}{dt}\right),\\ T' &= m'\left(g - \frac{d^2x'}{dt^2}\right) = m\left(g + c'\frac{d\omega}{dt}\right). \end{aligned}\right.$$

Remplaçons $\frac{d\omega}{dt}$ par sa valeur tirée de l'équation (2), puis introduisons à la place des masses m, m' et M les poids correspondants que nous désignerons par p, p' et P.

Nous aurons

$$T = p - \frac{pc(pc - p'c')}{Pk^2 + pc^2 + p'c'^2},$$

$$T' = p' + \frac{p'c'(pc - p'c')}{Pk^2 + pc^2 + p'c'^2}.$$

Si le système tourne dans le sens indiqué par la figure, on a $pc > p'c'$, puisque ω est plus grand que zéro. On a dans ce cas $T < p$, $T' > p'$. Ces tensions sont constantes pendant le mouvement.

563. La pression totale ϖ exercée sur l'axe du treuil résulte des forces qui se font équilibre autour de lui en y comprenant le poids du treuil. Les forces centrifuges des points du treuil se détruisent mutuellement et ne pressent pas l'axe à cause de la symétrie. On a donc

$$\varpi = P + T + T'$$

ou

$$\varpi = P + p + p' - \frac{(pc - p'c')^2}{Pk^2 + pc^2 + p'c'^2}.$$

564. On peut déterminer le mouvement du treuil sans recourir au principe de d'Alembert, mais en introduisant les tensions T et T'. Il suffit d'éliminer T et T' entre les équations (4) et la suivante :

$$\frac{d\omega}{dt} Mk^2 = \sum Qq$$

ou

$$\frac{d\omega}{dt} Mk^2 = Tc - T'c',$$

donnée par la théorie du mouvement de rotation autour d'un axe fixe. On retombe ainsi sur l'équation (2).

QUARANTE-TROISIÈME LEÇON.

PENDULE COMPOSÉ

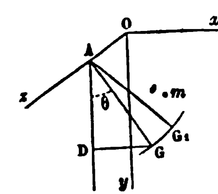
Équation du mouvement. — Pendule composé ramené au pendule simple. — Axe et centre d'oscillation. — Axe de la plus courte oscillation.

PENDULE COMPOSÉ. — ÉQUATION DU MOUVEMENT.

565. On nomme *pendule composé* un corps qui peut tourner autour d'un axe fixe horizontal.

Prenons l'axe fixe Oz pour axe des z; pour axe des x une horizontale Ox perpendiculaire à Oz, et pour axe des y une verticale Oy dirigée dans le sens de la pesanteur. L'équation du mouvement sera (550)

Fig. 166.



$$(1) \qquad \frac{d\omega}{dt}\sum mr^2 = \sum (\mathrm{Y}x - \mathrm{X}y),$$

X, Y, Z désignant les composantes de la force motrice d'un point m (x, y, z). On a donc

$$\mathrm{X} = 0, \quad \mathrm{Y} = mg, \quad \mathrm{Z} = 0,$$

et, par suite,

$$\sum (\mathrm{Y}x - \mathrm{X}y) = g\sum mx = g\mathrm{M}x_1,$$

M étant la masse du corps et x_1 l'une des coordonnées du centre de gravité G.

Abaissons GA perpendiculaire sur Oz, menons la verticale AD et abaissons sur cette droite la perpendiculaire GD. Soit G_1 la position initiale de G, c'est-à-dire sa position pour $t = 0$. Posons $GA = a$, $DAG = \theta$, $DAG_1 = \alpha$; on a

$$x_1 = GD = a \sin\theta.$$

Par conséquent

$$\sum (Yx - Xy) = gMx_1 = gMa \sin\theta.$$

D'ailleurs $\omega = -\frac{d\theta}{dt}$, et si l'on appelle Mk^2 le moment d'inertie du corps par rapport à un axe passant par le point G et parallèle à Oz, on a

$$\sum mr^2 = M(a^2 + k^2).$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (1), on aura

$$(2) \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{ga}{a^2 + k^2} \sin\theta = 0.$$

Cette équation détermine θ ou le mouvement angulaire du centre de gravité en fonction du temps. Pour l'intégrer on la multiplie par $2d\theta$, et l'on trouve

$$(3) \qquad \frac{d\theta^2}{dt^2} = \Omega^2 + \frac{2ga}{a^2 + k^2}(\cos\theta - \cos\alpha),$$

Ω étant la vitesse angulaire initiale.

PENDULE COMPOSÉ RAMENÉ AU PENDULE SIMPLE.

566. Au lieu d'intégrer l'équation (2), il est préférable de comparer le mouvement du corps pesant à celui d'un pendule simple. Si le corps se réduisait à un point matériel pesant lié à un axe par une droite rigide dont on né-

glige la masse et de longueur l, l'équation du mouvement serait

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\sin\theta=0 \tag{1}$$

qui se déduit de l'équation

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{ga}{a^2+k^2}\sin\theta=0, \tag{2}$$

en faisant $k=0$, $a=l$. Supposons la longueur l déterminée par l'équation

$$\frac{ga}{a^2+k^2}=\frac{g}{l},$$

d'où

$$l=a+\frac{k^2}{a}.$$

Alors le pendule composé ou plutôt la droite AG et le pendule simple auront le même mouvement angulaire, pourvu que les valeurs initiales de θ et de $\frac{d\theta}{dt}$ soient les mêmes pour ces deux corps. Ainsi, lorsqu'un corps tourne autour d'un axe fixe et horizontal, on peut toujours assigner la longueur d'un pendule simple dont le mouvement soit le même que celui du corps, quelle que soit d'ailleurs l'amplitude des oscillations. Si celles-ci sont très-petites, la durée d'une oscillation sera donnée par la formule

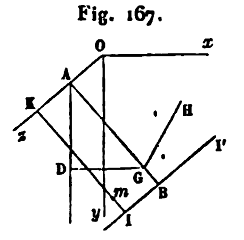
$$T=\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

qui pourra servir à déterminer g à l'aide du pendule composé, connaissant seulement la distance du centre de gravité du corps à l'axe de suspension et le moment d'inertie du corps par rapport à un axe parallèle à l'axe de suspension mené par le centre de gravité.

AXE D'OSCILLATION.

567. *Si dans le plan passant par l'axe et par le centre de gravité du pendule on mène une droite* IBI′ *parallèle à cet axe et à une distance de celui-ci égale à* I, *chaque point de cette droite se mouvra comme s'il ne faisait pas partie du corps et qu'il fût simplement lié à l'axe par une droite rigide et sans masse.*

Fig. 167.



Cette propriété résulte immédiatement de l'identité du mouvement du pendule composé et d'un pendule simple dont la longueur est l. Il n'en est pas de même des autres points du corps plus rapprochés et plus éloignés de l'axe. Ces derniers oscillent plus vite et les premiers oscillent plus lentement que s'ils n'étaient pas liés aux autres points du corps.

La droite IBI′ est nommée l'*axe d'oscillation* du corps, correspondant à l'axe de suspension Oz. Le point B de cette droite situé sur la droite AG perpendiculaire à l'axe de rotation se nomme *centre d'oscillation*. On l'obtient en prolongeant AG d'une longueur égale à $\frac{k^2}{a}$,

568. *Les axes d'oscillation et de suspension sont réciproques*, c'est-à-dire que si l'on faisait osciller le corps autour de II′, l'axe de suspension primitif Oz deviendrait l'axe d'oscillation. En effet, les distances du centre de gravité à l'axe de suspension et à l'axe d'oscillation donnent un produit égal à k^2. Donc si l'on prend cette dernière ligne droite pour axe fixe, la première deviendra l'axe d'oscillation. La longueur du pendule simple, qui fait ses oscillations dans le même temps, sera la même qu'auparavant et son mouvement sera le même.

569. D'après ce principe, étant donné l'axe de suspension d'un corps, on peut trouver, par l'expérience, l'axe d'oscillation correspondant. Il faut, pour cela, mesurer la durée des petites oscillations d'abord autour du premier, puis autour de différents autres axes parallèles, jusqu'à ce que le temps de ces oscillations soit de nouveau le même. La distance des deux axes de suspension sera la longueur désignée par l et fera connaître l'axe d'oscillation relatif au premier axe de suspension.

570. *Il y a une infinité d'axes autour desquels les petites oscillations sont de même durée.*

D'abord la valeur de l et la durée des oscillations sont les mêmes pour tous les axes de suspension parallèles entre eux et situés à égale distance du centre de gravité, puisque k et a sont les mêmes pour tous ces axes.

Ensuite, nommons A, B, C les trois moments d'inertie principaux relatifs au centre de gravité G, et appelons α, 6, γ les angles que Oz fait avec les axes principaux du point G. Le moment d'inertie par rapport à GH, droite parallèle à Oz, étant représenté par Mk^2, on a

$$Mk^2 = A\cos^2\alpha + B\cos^2 6 + C\cos^2\gamma,$$

et par conséquent

$$l = a + \frac{A\cos^2\alpha + B\cos^2 6 + C\cos^2\gamma}{Ma}.$$

On peut faire varier a, α, 6, γ de manière que l reste constante. Il y a donc une infinité d'axes autour desquels la durée des petites oscillations est la même.

AXE DE LA PLUS COURTE OSCILLATION

571. On peut se proposer de trouver l'axe autour duquel la durée d'une oscillation est la plus courte ou pour

lequel la longueur l est la plus petite. Supposons que l'on ait

$$A < B < C.$$

On sait que la plus petite valeur de

$$A \cos^2\alpha + B \cos^2 6 + C \cos^2\gamma$$

est A. Il faut donc faire d'abord

$$\alpha = 0, \quad 6 = 90^\circ, \quad \gamma = 90^\circ,$$

d'où

$$l = a + \frac{A}{Ma}.$$

Il en résulte que l'axe de suspension est perpendiculaire à l'axe du plus petit moment d'inertie relatif au centre de gravité. Ensuite, pour obtenir le minimum de l, il faut égaler à zéro $\frac{dl}{da}$, ce qui donne

$$a = \sqrt{\frac{A}{M}}, \quad l = 2\sqrt{\frac{A}{M}}$$

On a un minimum, parce qu'en faisant varier a, $\frac{dl}{da}$ ne s'évanouit qu'une seule fois en passant du négatif au positif.

QUARANTE-QUATRIÈME LEÇON

PENDULE CONIQUE.

Pendule conique. — Équations du mouvement. — Cas où le point pesant reste dans un plan horizontal. — Intégration des équations du mouvement. — Maximum et minimum de la valeur de z. — Expression du temps employé à parcourir un arc de la trajectoire.

PENDULE CONIQUE. — ÉQUATIONS DU MOUVEMENT.

572. Considérons le mouvement d'un point matériel m assujetti à se mouvoir sur la surface d'une sphère dont le centre est au point O, et dont le rayon est l. Le point m peut être simplement posé sur la surface sphérique, ou bien placé à l'extrémité d'un fil ou d'une tige dont l'autre extrémité fixe est au point O. En désignant par N la résistance de la surface ou la tension du fil ou de la tige, et l'axe des z étant pris dans le sens de la pesanteur, les équations du mouvement sont

$$(1)\quad \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\mathrm{N}x}{l}=0,\quad \frac{d^2y}{dt^2}+\frac{\mathrm{N}y}{l}=0,\quad \frac{d^2z}{dt^2}+\frac{\mathrm{N}z}{l}-g=0.$$

On regarde N comme positive lorsqu'elle agit dans le sens mO ou qu'elle empêche le point m de s'éloigner du centre O, et comme négative lorsqu'elle agit sur le prolongement de mO, ou qu'elle empêche le point m de s'éloigner du centre O. On a l'équation.

$$(2)\qquad x^2+y^2+z^2=l^2,$$

pour exprimer que le point m reste à une distance constante l du point O.

573. On arriverait aux mêmes équations (1) par la méthode générale de Lagrange, qui donne

$$(3)\qquad \frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\delta z-g\delta z=0,$$

avec la relation

$$x\delta x+y\delta y+z\delta z=0,$$

déduite de l'équation de condition (2). Écrivant

$$\frac{x}{l}\delta x+\frac{y}{l}\delta y+\frac{z}{l}\delta z=0$$

et ajoutant cette équation multipliée par λ avec (3), on aura

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\lambda x}{l}=0,\qquad \frac{d^2y}{dt^2}+\frac{\lambda y}{l}=0,\qquad \frac{d^2z}{dt^2}+\frac{\lambda z}{l}-g=0,$$

équations qui ne diffèrent des équations (1) qu'en ce que λ remplace N. On voit que λ est la tension du fil ou l'action du fil sur m, puisque $\frac{\lambda x}{l}$, $\frac{\lambda y}{l}$, $\frac{\lambda z}{l}$, sont les composantes d'une force égale à λ, dirigée suivant mO, si λ est positive.

CAS OU LE POINT PESANT RESTE DANS UN PLAN HORIZONTAL.

574. Examinons d'abord le cas particulier où le point pesant m reste dans un plan horizontal. Il décrit alors un cercle intersection de ce plan et de la surface sphérique (2), ou bien la tige décrit un cône droit dont l'axe est Oz. On a

$$z=k,\quad x^2+y^2=l^2-k^2=r^2,$$

en appelant r la distance du point à l'axe Oz; r est le rayon du cercle.

La troisième des équations (1) donne

$$N = \frac{gl}{k},$$

valeur constante. On tire des deux premières

$$\frac{2dx\,d^2x + 2dy\,d^2y}{dt^2} + \frac{N}{l}(2x\,dx + 2y\,dy) = 0,$$

ou

$$d.v^2 = 0,$$

puisque

$$v^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2},$$

à cause de $\frac{dz}{dt} = 0$, et que l'équation

$$x^2 + y^2 = l^2 - k^2$$

donne

$$2x\,dx + 2y\,dy = 0.$$

La vitesse v est donc constante et le mouvement circulaire est uniforme. Cela résulte aussi de l'équation

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

qui donne

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C,$$

ou

$$r^2\frac{d\psi}{dt} = C,$$

d'où l'on tire une valeur de ψ proportionnelle au temps, ψ étant l'angle que fait le plan zOm avec le plan zOy.

575. Il faut encore une équation. On a

$$\frac{x\,d^2x + y\,d^2y}{dt^2} + \frac{N(x^2 + y^2)}{l} = 0.$$

Or en différentiant l'équation

$$x\,dx + y\,dy = 0,$$

on a

$$\frac{xd^2x+yd^2y}{dt^2}+\frac{dx^2+dy^2}{dt^2}=0.$$

Don

$$v^2=\frac{Nr^2}{l}\ (^*),$$

ou

$$v^2=\frac{gr^2}{k},$$

en remplaçant N par sa valeur $\frac{gl}{k}$. On a donc

$$v=r\sqrt{\frac{g}{k}}=\sqrt{\frac{g}{k}(l^2-k^2)}.$$

De plus,

$$\frac{v^2}{r}=\frac{Nr}{l}=N\sin\theta,$$

et aussi

$$\frac{v^2}{r}=\frac{gr}{k}=g\tang\theta,$$

θ désignant l'angle que la droite Om fait avec la verticale Oz.

On voit que la force centripète $\frac{v^2}{r}$ est la résultante des deux forces N et g. La durée de la révolution est

$$\frac{2\pi r}{v}=2\pi\sqrt{\frac{k}{g}}.$$

576. On peut obtenir ces résultats d'une autre manière. Le point m se meut comme un point libre qui serait sollicité par la force tangentielle $\frac{dv}{dt}$ et par la force centrifuge $f=\frac{v^2}{r}$. D'après le principe de d'Alembert, ces forces

(*) En effet, on tire des premières équations (1)

$$\frac{xd^2x+yd^2y}{dt^2}+\frac{Nr^2}{l}=0.$$

prises en sens contraire, et le poids de la molécule doivent donner une résultante qui sera détruite par la résistance de la surface sphérique ou du fil. Alors la force tangentielle perpendiculaire au plan mOz doit être nulle, ce qui donne la vitesse v constante. En outre, on doit avoir

$$\frac{g}{k}=\frac{f}{r}=\frac{N}{l},$$

d'où

$$\frac{v^2}{r}=\frac{gr}{k},\quad v=r\sqrt{\frac{g}{k}},\quad N=\frac{gl}{k},$$

comme plus haut.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT.

577. Il faut intégrer les équations

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{Nx}{l}=0,\\ \dfrac{d^2y}{dt^2}+\dfrac{Ny}{l}=0,\\ \dfrac{d^2z}{dt^2}+\dfrac{Nz}{l}-g=0; \end{cases}$$

et comme on a déjà la relation

$$(2)\qquad x^2+y^2+z^2=l^2,$$

il suffit de trouver deux autres équations entre x, y, z, t et la valeur de N.

On trouve d'abord la force vive ou v^2 par l'équation

$$\frac{2dx\,d^2x+2dy\,d^2y+2dz\,d^2z}{dt^2}-2g\,dz=0,$$

qui donne

$$v^2=2gz+\text{constante}=2g(z-z_0)+v_0^2,$$

ou

(3) $$v^2 = 2g(z - z_0 + h_0),$$

en posant

$$v_0^2 = 2gh_0.$$

578. On a ensuite

$$\frac{x d^2y - y d^2x}{dt^2} = 0,$$

d'où

(4) $$\frac{x dy - y dx}{dt} = C.$$

Élevant au carré cette équation et l'ajoutant à la suivante aussi élevée au carré

$$\frac{x dx + y dy}{dt} = -\frac{z dz}{dt},$$

on a

$$(x^2 + y^2)\left(\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2}\right) = z^2 \frac{dz^2}{dt^2} + C^2.$$

Remplaçant $x^2 + y^2$ par $l^2 - z^2$ et $\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2}$ ou $v^2 - \frac{dz^2}{dt^2}$ par $2g(z - z_0 + h_0) - \frac{dz^2}{dt^2}$, on obtient

$$(l^2 - z^2)2g(z - z_0 + h_0) - (l^2 - z^2)\frac{dz^2}{dt^2} = z^2 \frac{dz^2}{dt^2} + C^2,$$

d'où

$$l\frac{dz}{dt} = \pm\sqrt{2g(l^2 - z^2)(z - z_0 + h_0) - C^2},$$

ou

(5) $$dt = \frac{\pm l dz}{\sqrt{2g(l^2 - z^2)(z - z_0 + h_0) - C^2}}.$$

579. Il faut avoir la valeur de C. L'équation (4) revient à

$$\frac{r^2 d\psi}{dt} = C,$$

ou

$$(l^2 - z^2)\frac{d\psi}{dt} = C,$$

en appelant r la distance du point m à l'axe Oz et ψ l'angle que le plan zOm fait avec le plan zOx. On peut écrire

$$r.r\frac{d\psi}{dt} = C.$$

Or $r\frac{d\psi}{dt}$ est la vitesse de la projection horizontale du point m estimée suivant la perpendiculaire au rayon vecteur r, ou la projection de la vitesse v du point m sur la perpendiculaire au plan mOz, de sorte que $r\frac{d\psi}{dt} = v\cos\varepsilon$, ε étant l'angle que fait la direction de la vitesse v avec cette perpendiculaire (car $rd\psi$ est la projection du petit chemin ds sur cette perpendiculaire). On a donc

$$(6) \qquad C = r_0 v_0 \cos\varepsilon_0.$$

580. La constante C est nulle, si l'angle ε_0 est droit, si $r_0 = 0$, ou si $v_0 = 0$; alors le pendule oscille dans un plan vertical.

En substituant dans la formule (5) la valeur de C^2,

$$C^2 = r_0^2 v_0^2 \cos^2\varepsilon_0 = 2gh_0 r_0^2 \cos^2\varepsilon_0 = 2gh_0(l^2 - z_0^2)\cos^2\varepsilon_0,$$

on a

$$(7) \qquad dt = \frac{\pm l\,dz}{\sqrt{2g}\sqrt{(l^2 - z^2)(z - z_0 + h_0) - (l^2 - z_0^2)h_0\cos^2\varepsilon_0}}.$$

MAXIMUM ET MINIMUM DE LA VALEUR DE z.

581. Si l'on égale à zéro le polynôme sous le radical, on aura la plus grande ou la plus petite valeur de z quand t varie. Cette équation,

$$(1) \qquad (l^2 - z^2)(z - z_0 + h_0) - (l^2 - z_0^2)h_0\cos^2\varepsilon_0 = 0,$$

étant du troisième degré, a au moins une racine réelle. Mais, par la nature du problème, z ne peut avoir un maximum sans avoir un minimum et *vice versâ*. Donc les trois racines doivent être réelles. En effet, si dans ce polynôme on attribue à z les valeurs

$$l, \quad z_0, \quad z_0 - h_0, \quad -l, \quad -\infty,$$

on trouve

$$-, \quad +, \quad -, \quad - \quad +,$$

d'où l'on voit qu'il y a trois valeurs réelles de z qui réduisent à zéro ce polynôme : une première a comprise entre l et z_0, une seconde b comprise entre z_0 et $z_0 - h$, et une troisième négative $-c$ entre $-l$ et $-\infty$, de telle sorte que c est $> l$. Ainsi l'on a en décomposant le premier membre en facteurs

$$\begin{aligned}(l^2 - z^2)(z - z_0 + h_0) - (l^2 - z_0^2)\, h_0 \cos^2 \varepsilon_0 \\ = (a - z)(z - b)(z + c),\end{aligned}$$

d'où, en développant et comparant,

$$\begin{aligned}a + b - c &= z_0 - h_0, \\ (a + b)c - ab &= l^2, \\ abc &= (l^2 - z_0^2)\, h_0 \cos^2 \varepsilon_0 + l^2 (z_0 - h_0).\end{aligned}$$

On tire de la seconde équation

$$c = \frac{l^2 + ab}{a + b},$$

puis de la première

$$h_0 - z_0 = c - a - b = \frac{l^2 - a^2 - b^2 - ab}{a + b},$$

et de la troisième

$$(l^2 - z_0^2)\, h_0 \cos^2 \varepsilon_0 = \frac{(l^2 - a^2)(l^2 - b^2)}{a + b} = \frac{C^2}{2g}.$$

Par suite l'équation (7), n° 580, devient

$$(2)\qquad dt = \frac{\pm l\,dz}{\sqrt{2g}\sqrt{(a-z)(z-b)\left(z+\dfrac{l^2+ab}{a+b}\right)}}.$$

La variable z restera comprise entre a et b, comme sa valeur initiale z_0, car si l'on supposait que z devînt $> a$ ou $< b$, la valeur de $\frac{dz}{dt}$ deviendrait imaginaire. Ainsi a sera la valeur maximum de z et b sa valeur minimum. Si d'abord on prend $z = b$, quand t croîtra, z croîtra depuis b jusqu'à a, et deviendra égale à a au bout d'un temps t' égal à l'intégrale de la valeur dt prise depuis $z = b$ jusqu'à $z = a$. Ensuite, après ce temps t', z décroîtra en allant de a à b dans un intervalle de temps égal à t'. Puis z croîtra de nouveau de b à a dans un nouvel intervalle de temps égal à t', et ainsi de suite. De sorte que z est une fonction périodique de t, dont la période est $2t'$.

EXPRESSION DU TEMPS EMPLOYÉ A PARCOURIR UN ARC DE LA TRAJECTOIRE.

582. Puisque z doit toujours être comprise entre b et a, nous pouvons poser

$$\sin\varphi = \sqrt{\frac{a-z}{a-b}}$$

ou

$$z = a\cos^2\varphi + b\sin^2\varphi;$$

de là résulte

$$dz = -2(a-b)\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi,$$
$$a - z = (a-b)\sin^2\varphi,$$
$$z - b = (a-b)\cos^2\varphi,$$

d'où, abstraction faite du signe,

$$\frac{dz}{\sqrt{(a-z)(z-b)}} = 2\,d\varphi.$$

Si l'on porte cette valeur dans l'équation (2), n° 581, on a

$$dt = \frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{2l\,d\varphi}{\sqrt{z + \frac{l^2 + ab}{a + b}}}$$

ou

$$(1) \qquad dt = l\sqrt{\frac{2(a+b)}{g}} \frac{d\varphi}{\sqrt{(a+b)z + l^2 + ab}}.$$

En remplaçant z par

$$a\cos^2\varphi + b\sin^2\varphi, \quad \text{ou} \quad a - (a-b)\sin^2\varphi,$$

on trouve

$$(2) \quad dt = l\sqrt{\frac{2(a+b)}{g(l^2 + 2ab + a^2)}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{l^2 + 2ab + a^2}\sin^2\varphi}},$$

ou bien

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} dt &= l\sqrt{\frac{2(a+b)}{g}} \\ &\times \frac{d\varphi}{\sqrt{(l^2 + 2ab + a^2)\cos^2\varphi + (l^2 + 2ab + b^2)\sin^2\varphi}}. \end{aligned} \right.$$

583. Le temps pour aller d'un point $z = \delta$ à un autre point $z = \alpha$ s'obtiendra en intégrant cette formule entre les limites 6 et α. Le temps nécessaire pour aller du point le plus haut au point le plus bas ou du point le plus bas au point le plus haut est

$$t' = l\sqrt{\frac{2(a+b)}{g(l^2 + 2ab + a^2)}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \gamma^2\sin^2\varphi}},$$

en posant

$$\gamma^2 = \frac{a^2 - b^2}{l^2 + 2ab + a^2}.$$

Si l'on développe $\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \gamma^2\sin^2\varphi}}$ par la formule du binôme, si l'on remplace ensuite les puissances de sinus

qui entrent dans le développement par leurs valeurs en fonction des cosinus des multiples de φ, on trouve en intégrant

$$t' = l\sqrt{\frac{2(a+b)}{g(l^2+2ab+a^2)}}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\gamma^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\gamma^4+\ldots\right].$$

584. On peut avoir des valeurs entre lesquelles ce temps est compris en reprenant la formule (1)

$$dt = l\sqrt{\frac{2(a+b)}{g}}\frac{d\varphi}{\sqrt{(a+b)z+l^2+ab}}.$$

Comme z est comprise entre a et b, on a

$$dt < l\sqrt{\frac{2(a+b)}{g}}\frac{d\varphi}{\sqrt{(a+b)b+l^2+ab}},$$

$$dt > l\sqrt{\frac{2(a+b)}{g}}\frac{d\varphi}{\sqrt{(a+b)a+l^2+ab}};$$

d'où

$$t' < \frac{\pi}{2}l\sqrt{\frac{2(a+b)}{g(l^2+2ab+b^2)}},$$

$$t' > \frac{\pi}{2}l\sqrt{\frac{2(a+b)}{g(l^2+2ab+a^2)}}.$$

QUARANTE-CINQUIÈME LEÇON.

PENDULE CONIQUE (SUITE). — MOUVEMENT D'UNE TIGE PESANTE.

Calcul de l'angle ψ. — Valeur de la tension. — Cas où le pendule s'écarte peu de la verticale. — Mouvement d'une tige pesante tournant autour d'un de ses points qui est fixe.

CALCUL DE L'ANGLE ψ.

585. L'angle ψ est donné par l'équation (579)

$$d\psi = \frac{C\,dt}{l^2 - z^2} = \sqrt{\frac{2g(l^2 - a^2)(l^2 - b^2)}{a+b}}$$

$$\times \frac{l\,dz}{(l^2 - z^2)\sqrt{2g}\sqrt{(a-z)(z-b)\left(z + \frac{l^2+ab}{a+b}\right)}},$$

qu'on peut écrire

$$d\psi = \sqrt{(l^2-a^2)(l^2-b^2)}\frac{l\,dz}{(l^2-z^2)\sqrt{(a-z)(z-b)}\sqrt{(a+b)z+l^2+ab}},$$

ou bien, à cause de $\frac{l}{l^2-z^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{l+z} + \frac{1}{l-z}\right)$,

$$d\psi = \frac{1}{2}\sqrt{(l^2-a^2)(l^2-b^2)}\left(\frac{1}{l+z} + \frac{1}{l-z}\right)$$

$$\times \frac{dz}{\sqrt{(a-z)(z-b)}\sqrt{(a+b)z+l^2+ab}},$$

ce qui donne, en remplaçant z par $a\cos^2\varphi + b\sin^2\varphi$

$$d\psi = \sqrt{(l^2-a^2)(l^2-b^2)}\left[\frac{d\varphi}{(l+a)\cos^2\varphi + (l+b)\sin^2\varphi} + \frac{d\varphi}{(l-a)\cos^2\varphi + (l-b)\sin^2\varphi}\right]$$
$$\times \frac{1}{\sqrt{(l^2+2ab+a^2)\cos^2\varphi + (l^2+2ab+b^2)\sin^2\varphi}},$$

de sorte que ψ est la somme de deux intégrales elliptiques de troisieme espèce.

586. L'angle dièdre Ψ compris entre les deux positions extrêmes du point m est donné par l'intégration de l'équation précédente entre les limites o et $\frac{\pi}{2}$. Je dis que cet angle est plus grand que $\frac{\pi}{2}$. Remarquons que z variant de b à a, ou φ de $\frac{\pi}{2}$ à o, le polynôme $(l^2+2ab+a^2)\cos^2\varphi + (l^2+2ab+b^2)\sin^2\varphi$ varie depuis $l^2+2ab+b^2$ jusqu'à $l^2+2ab+a^2$. On a donc

$$d\psi > \sqrt{\frac{(l^2-a^2)(l^2-b^2)}{l^2+2ab+a^2}}\left[\frac{d\varphi}{(l+a)\cos^2\varphi + (l+b)\sin^2\varphi} + \frac{d\varphi}{(l-a)\cos^2\varphi + (l-b)\sin^2\varphi}\right],$$

$$d\psi < \sqrt{\frac{(l^2-a^2)(l^2-b^2)}{l^2+2ab+b^2}}\left[\frac{d\varphi}{(l+a)\cos^2\varphi + (l+b)\sin^2\varphi} + \frac{d\varphi}{(l-a)\cos^2\varphi + (l-b)\sin^2\varphi}\right],$$

Or

$$\int \frac{d\varphi}{m\cos^2\varphi + n\sin^2\varphi} = \frac{1}{\sqrt{mn}} \operatorname{arc\,tang}\left(\sqrt{\frac{n}{m}}\operatorname{tang}\varphi\right).$$

Donc on aura

$$\Psi > \sqrt{\frac{(l^2-a^2)(l^2-b^2)}{l^2+2ab+a^2}}\left[\frac{1}{\sqrt{(l+a)(l+b)}}\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{(l-a)(l-b)}}\frac{\pi}{2}\right]$$

ou

$$\Psi > \frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{(l+a)(l+b)}+\sqrt{(l-a)(l-b)}}{\sqrt{l^2+2ab+a^2}},$$

et l'on aura de même

$$\Psi < \frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{(l+a)(l+b)}+\sqrt{(l-a)(l-b)}}{\sqrt{l^2+2ab+b^2}},$$

ou bien

$$\Psi > \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2l^2+2ab+2\sqrt{(l^2-a^2)(l^2-b^2)}}{l^2+2ab+a^2}},$$

$$\Psi < \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2l^2+2ab+2\sqrt{(l^2-a^2)(l^2-b^2)}}{l^2+2ab+b^2}},$$

et enfin

$$\Psi > \frac{\pi}{2}\sqrt{1+\frac{l^2-a^2+2\sqrt{(l^2-a^2)(l^2-b^2)}}{l^2+2ab+a^2}},$$

$$\Psi < \frac{\pi}{2}\sqrt{1+\frac{l^2-b^2+2\sqrt{(l^2-a^2)(l^2-b^2)}}{l^2+2ab+b^2}}.$$

On voit donc que Ψ est plus grand que $\frac{\pi}{2}$.

TENSION DU FIL.

587. Il reste à déterminer la tension N du fil ou la résistance de la surface.

En multipliant les équations

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{Nx}{l}=0, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2}+\dfrac{Ny}{l}=0, \\ \dfrac{d^2z}{dt^2}+\dfrac{Nz}{l}-g=0, \end{cases}$$

respectivement par x, y, z, et ajoutant, on a

$$\frac{xd^2x + yd^2y + zd^2z}{dt^2} + Nl - gz = 0.$$

Or l'équation

$$xdx + ydy + zdz = 0$$

donne

$$\frac{xd^2x + yd^2y + zd^2z}{dt^2} = -\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = -v^2.$$

Donc

$$(2) \qquad N = \frac{v^2 + gz}{l} = \frac{g}{l}(3z - 2z_0 + 2h_0).$$

Tant que z est positive ou que le pendule se trouve au-dessous du plan horizontal mené par le centre O, la valeur de N, $\frac{v^2 + gz}{l}$, est positive, c'est-à-dire que cette force est dirigée de m vers O. Si le pendule s'élève au-dessus de ce plan, z deviendra négative et il pourra arriver que $v^2 + gz$ ou $g(3z - 2z_0 + 2h_0)$ devienne aussi négative. Dans ce cas, le point fait l'effort N pour s'approcher du centre, et la force N tend à contracter la tige.

588. On peut vérifier la formule (2). Les forces N et g donnent pour résultante la force effective du point m, qui peut se décomposer en une force tangentielle $T = \frac{dv}{dt}$, et une force centripète $\frac{v^2}{\rho}$. Donc ces deux dernières, prises en sens contraire, doivent faire équilibre aux forces N et g. Ainsi la somme des projections de toutes ces forces sur un axe quelconque doit être nulle. En les projetant sur Om, la projection de T est nulle, puisque T est perpendiculaire à Om; la projection de g

est $-\frac{gz}{l}$; celle de la force centrifuge est $-\frac{v^2}{\rho}\frac{\rho}{l}$ ou $-\frac{v^2}{l}$. On a donc

$$N - \frac{gz}{l} - \frac{v^2}{l} = 0,$$

ou

$$N = \frac{v^2 + gz}{l}.$$

CAS OU LE PENDULE S'ÉCARTE PEU DE LA VERTICALE.

589. Si le pendule s'écarte peu de la verticale, on a

$$z = l - u, \quad z_0 = l - u_0,$$

$$N = g\left(1 + \frac{2u_0 + 2h_0 - 3u}{l}\right),$$

u et u_0 étant très-petits, ainsi que h_0.

On a donc à peu près $N = g$, et les deux premières équations du mouvement deviennent

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{l}x = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{g}{l}y = 0.$$

Elles donnent, en désignant par α et 6 des constantes,

$$x = \alpha\cos\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right), \quad y = 6\sin\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right),$$

ou, si l'on pose $\mu = \sqrt{\frac{g}{l}}$,

$$x = \alpha\cos\mu t, \quad y = 6\sin\mu t;$$

d'où l'on déduit

$$(2) \qquad \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{6^2} = 1.$$

La projection horizontale de la courbe décrite est donc

une ellipse. On a

$$\tag{3} \operatorname{tang}\psi = \frac{6}{\alpha}\operatorname{tang}\mu t.$$

La durée de la demi-révolution est $\frac{\pi}{\mu}$ ou $\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, c'est-à-dire égale à celle d'un pendule de même longueur qui oscillerait dans un plan vertical.

590. La projection du pendule sur un plan horizontal décrira encore à très-peu près une ellipse si l'angle que le pendule fait avec la verticale varie très-peu, ou en d'autres termes si les valeurs a et b entre lesquelles z reste comprise (581), diffèrent peu l'une de l'autre; car alors N sera à peu près constante. En effet, si z restait égale à la constante k, l'équation $\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{Nz}{l} - g = 0$ donnerait $N = \frac{gl}{k}$. On conçoit que si z diffère peu de k, la valeur de N sera à peu près constante et égale à $\frac{gl}{k}$. Mais on peut le voir de la manière suivante : on a

$$N = \frac{g}{l}(3z - 2z_0 + 2h_0),$$

on a trouvé

$$h_0 - z_0 = \frac{l^2 - a^2 - b^2 - ab}{a+b};$$

donc

$$N = \frac{g}{l}\left(3z + \frac{2l^2 - 2a^2 - 2b^2 - 2ab}{a+b}\right),$$

ou

$$N = \frac{g}{l}\left(\frac{2l^2}{a+b} + 3z - \frac{3a^2 + 3b^2 - a^2 - b^2 + 2ab}{a+b}\right),$$

$$N = \frac{2gl}{a+b} + \frac{g}{l}\,\frac{3a(z-a) + 3b(z-b) + (a-b)^2}{a+b},$$

et, en négligeant $z-a$, $z-b$, $(a-b)^2$,

$$N=\frac{2gl}{a+b}=\frac{gl}{k}, \quad k=\frac{a+b}{2}.$$

De là résulte

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{g}{k}x=0, \quad \frac{d^2y}{dt^2}+\frac{g}{k}y=0.$$

Ces équations ont la même forme que les équations (1). On en conclut que la projection horizontale du pendule décrit une ellipse et que la durée de la demi-révolution est $\pi\sqrt{\frac{k}{g}}$, valeur moindre que $\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

MOUVEMENT D'UNE TIGE PESANTE TOURNANT AUTOUR D'UN DE SES POINTS QUI EST FIXE.

591. En désignant par x', y', z' les coordonnées d'un point quelconque m de la tige, considérée comme une ligne droite pesante, on a par le principe de d'Alembert

$$\sum\left[-m\frac{d^2x'}{dt^2}\delta x'-m\frac{d^2y'}{dt^2}\delta y'+\left(mg-m\frac{d^2z'}{dt^2}\right)\delta z'\right]=0,$$

ou

$$(1) \qquad \sum m\left[\frac{d^2x'}{dt^2}\delta x'+\frac{d^2y'}{dt^2}\delta y'+\left(\frac{d^2z'}{dt^2}-g\right)\delta z'\right]=0.$$

Prenons sur la tige un point L dont la distance au point fixe O soit l et soient x, y, z ses coordonnées. En désignant par u la distance Om, on a

$$(2) \qquad x'=\frac{xu}{l}, \quad y'=\frac{yu}{l}, \quad z'=\frac{zu}{l},$$

et l'équation (1) devient

$$\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\delta z-\frac{gl\sum mu}{\sum mu^2}\delta z=0,$$

ou

$$(3)\qquad \frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\delta z-\frac{gla}{a^2+k^2}\delta z=0,$$

en posant

$$\sum mu=\mathrm{M}a,\quad \sum mu^2=\mathrm{M}(a^2+k^2),$$

a étant la distance du point O au centre de gravité de la tige pesante, M la masse et $\mathrm{M}k^2$ le moment d'inertie de cette tige par rapport à ce même centre de gravité.

On a la condition

$$(4)\qquad x^2+y^2+z^2=l^2,$$

qui donne

$$(5)\qquad x\delta x+y\delta y+z\delta z=0.$$

En multipliant cette équation par λ et ajoutant l'équation (3), on trouve

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}+\lambda x=0,\\ \dfrac{d^2y}{dt^2}+\lambda y=0,\\ \dfrac{d^2z}{dt^2}+\lambda z-\dfrac{gl}{a+\dfrac{k^2}{a}}=0. \end{cases}$$

592. S'il n'y a qu'un seul point pesant μ sur la ligne droite, à la distance l, on a $\sum mu^2=\mu l^2$, $\sum mu=\mu l$ et

$$(7)\qquad \frac{d^2x}{dt^2}+\lambda x=0,\quad \frac{d^2y}{dt^2}+\lambda y=0,\quad \frac{d^2z}{dt^2}+\lambda z-g=0.$$

Les équations (6) se réduisent à celles-ci, si l'on suppose $l=a+\dfrac{k^2}{a}$. Ainsi la tige pesante se meut comme

le pendule simple, dont la longueur est $l = a + \frac{k^2}{a}\cdot$ Le point L est le centre d'oscillation. Ce point se meut comme un point libre sollicité par la pesanteur g et par une force accélératrice dont les composantes sont $-\lambda x$, $-\lambda y$, $-\lambda z$. Cette force est dirigée vers le point O et son intensité est $\lambda\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ou λl. C'est la tension désignée par N. On a $N = \lambda l$. Il ne faut pas croire que la tension soit constante dans toute l'étendue de la tige.

593. Toutes les forces perdues, telles que $-m\frac{d^2x'}{dt^2}$, $-m\frac{d^2y'}{dt^2}$, $m\left(g-\frac{d^2z'}{dt^2}\right)$ se font équilibre autour du point fixe O ou sont détruites par la résistance de ce point. Ainsi, quoiqu'elles soient appliquées aux différents points de la tige et non en un seul point, elles ont une résultante unique passant par le point O. C'est la pression exercée sur le point O, égale et contraire à la résistance de ce point. En désignant cette pression par P et ses composantes par X, Y, Z, chacune d'elles est égale à la somme des composantes des forces perdues, comme si toutes ces forces étaient transportées au point O, d'après le principe connu que des forces en équilibre sur un corps solide se font encore équilibre si elles sont transportées en un même point.

On a donc

$$X = -\sum m\frac{d^2x'}{dt^2},\quad Y = -\sum m\frac{d^2y'}{dt^2},\quad Z = \sum m\left(g-\frac{d^2z'}{dt^2}\right),$$

ou (591)

$$X = -\sum\frac{mu}{l}\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{Ma}{l}\frac{d^2x}{dt^2},$$

ou, en vertu de la première équation (6),

$$X = \frac{Ma}{l}\lambda x,$$

ensuite, par des transformations analogues,

$$Y = \frac{Ma}{l}\lambda y, \quad Z = \frac{Ma}{l}\lambda z + Mg\frac{l-a}{l}.$$

594. La pression P sur le point O n'est pas dirigée suivant la tige. Elle est la résultante de deux forces, l'une dirigée suivant la tige et égale à $Ma\lambda$, l'autre verticale et égale à $Mg\frac{l-a}{l}$, c'est-à-dire à la composante qu'on obtient en décomposant le poids Mg de la tige en deux forces verticales appliquées au point fixe O, et au centre d'oscillation L.

595. Si le centre de gravité de la tige coïncidait avec le point fixe, on aurait $a = 0$, $l = \infty$, et le mouvement de la tige ne serait plus celui d'un pendule simple de longueur l. Mais dans ce cas le poids de la tige étant détruit constamment par le point fixe, la tige doit rester dans le plan qui passe par sa position initiale et par la direction de la percussion, et tourner dans ce plan avec la vitesse constante $\omega = \frac{\mu v f}{Mk^2}$.

596. On arriverait encore aux équations du mouvement en exprimant que les forces perdues se font équilibre autour du point fixe, ou bien par la formule générale de la dynamique. Dans ce dernier cas, on prendrait pour mouvements virtuels : 1° le mouvement effectif; 2° un mouvement de rotation autour de l'axe des z.

QUARANTE-SIXIÈME LEÇON.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DU MOUVEMENT. — MOUVEMENT DU CENTRE DE GRAVITÉ.

Remarques sur les systèmes de points qui peuvent se mouvoir comme des corps solides. — Mouvement du centre de gravité. — Vitesse initiale du centre de gravité d'un système mis en mouvement par des percussions. — Conservation du mouvement du centre de gravité.

REMARQUES SUR LES SYSTÈMES DE POINTS QUI PEUVENT SE MOUVOIR COMME DES CORPS SOLIDES.

597. Considérons un système de points matériels m, m', m'', ..., sollicités respectivement par des forces P, P′, P″, ..., dont les composantes parallèles aux axes sont X, Y, Z; X′, Y′, Z′;.... En vertu du principe de d'Alembert, si l'on applique au point m des forces parallèles aux trois axes et égales respectivement à $X - m\frac{d^2x}{dt^2}$, $Y - m\frac{d^2y}{dt^2}$. $Z - m\frac{d^2z}{dt^2}$, et aux autres points des forces analogues, toutes ces forces doivent se faire équilibre au moyen des liaisons du système. Les conditions de cet équilibre sont comprises dans l'équation générale des vitesses virtuelles; mais on peut parvenir à des propriétés importantes, sans qu'il soit nécessaire d'exprimer toutes ces conditions.

Ainsi l'équilibre existant entre les forces mentionnées, dans le système dont nous étudions le mouvement, il subsistera encore si l'on introduit entre les différents points de nouvelles liaisons telles que l'on voudra, pourvu qu'elles ne soient pas incompatibles avec les conditions

données; on peut supposer, par exemple, que les distances des différents points du système deviennent invariables, si les liaisons sont telles, que les points puissent se déplacer sans que leurs distances changent. Il en résulte que les forces doivent satisfaire aux six équations d'équilibre d'un système solide, pourvu toutefois qu'après la solidification il n'y ait aucun point fixe ni aucun point assujetti à demeurer soit sur une courbe, soit sur une surface fixe. En faisant cette restriction, les trois premières équations d'équilibre donnent

$$\sum\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right) = 0,$$
$$\sum\left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right) = 0,$$
$$\sum\left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right) = 0,$$

ou bien

$$(1)\quad \sum m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum X,\quad \sum m\frac{d^2y}{dt^2} = \sum Y,\quad \sum m\frac{d^2z}{dt^2} = \sum Z.$$

598. Pour que le système puisse se déplacer comme un corps solide, c'est-à-dire sans que les distances de ses points varient, il faut et il suffit que chaque équation de condition se réduise à une relation entre les distances de ses différents points. En effet, soit

$$L = 0$$

une équation qui doit toujours exister entre les coordonnées $x, y, z, x' \ldots$ et dont le premier membre L est une fonction f de t et de $x, y, z, x', \ldots$. Désignons par $p, q, r, \ldots$ les $3n-6$ distances des différents points qui doivent rester constantes. On a

$$(2)\quad \begin{cases} p = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}, \\ q = \sqrt{(x''-x)^2 + (y''-y)^2 + (z''-z)^2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

On peut réduire à six le nombre des coordonnées qui n'aient plus entre elles aucune relation donnée et prendre, par exemple, x, y, z, x', y' et x'' pour ces coordonnées arbitraires et indépendantes. On aura toutes les autres en fonction de celles-là et des quantités $p, q, \ldots$. Donc chaque équation de condition telle que $L = 0$ sera réduite à la forme

$$L = f(p, q, r, \ldots, x, y, z, x', y', x'') = 0.$$

Pour un déplacement virtuel quelconque, $p, q, r, \ldots$ restent constants, t ne variant pas, et par conséquent, puisque l'équation $L = 0$ doit être satisfaite, quelles que soient x, y, z, x', y', x'', ces quantités ne doivent pas entrer dans f. Donc, en éliminant de l'équation $L = 0$, $3n - 6$ coordonnées à l'aide des équations (2), les six autres doivent disparaître en même temps, et l'équation $L = 0$ doit se réduire à une simple relation entre les distances $p, q, r, \ldots$, ce qu'il fallait démontrer.

599. On ferait le même raisonnement en exprimant les $3n$ coordonnées en fonction des distances $p, q, r, \ldots$, et de six autres quantités qui fixeraient la position arbitraire du système par rapport aux axes fixes : par exemple, les coordonnées α, β, γ de l'origine d'un système d'axes $O'x', O'y', O'z'$ liés au corps solide, et les trois angles φ, ψ, θ, qui déterminent la position de ce nouveau système d'axes par rapport au système des axes Ox, Oy, Oz, fixes dans l'espace. L'équation $L = 0$ prendrait la forme

$$f(p, q, r, \ldots, \alpha, \beta, \gamma, \varphi, \psi, \theta) = 0.$$

Or $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \psi, \theta$ n'y doivent pas entrer, puisque cette équation doit avoir lieu, quelles que soient les valeurs qu'on leur attribue. Donc L se réduit à une fonction de $p, q, r, \ldots$.

MOUVEMENT DU CENTRE DE GRAVITÉ.

600. Reprenons les équations (597)

$$(1)\qquad \begin{cases} \sum m\dfrac{d^2x}{dt^2} = \sum X, \\ \sum m\dfrac{d^2y}{dt^2} = \sum Y, \\ \sum m\dfrac{d^2z}{dt^2} = \sum Z, \end{cases}$$

qui ont lieu dans le mouvement de tout corps solide libre ou de tout système qui peut se mouvoir comme un corps solide. Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées du centre de gravité et M la masse totale du système. On a toujours

$$Mx_1 = \sum mx, \quad My_1 = \sum my, \quad Mz_1 = \sum mz$$

et, par suite,

$$(2)\qquad \begin{cases} M\dfrac{dx_1}{dt} = \sum m\dfrac{dx}{dt}, \\ M\dfrac{dy_1}{dt} = \sum m\dfrac{dy}{dt}, \\ M\dfrac{dz_1}{dt} = \sum m\dfrac{dz}{dt}. \end{cases}$$

Si l'on suppose un point matériel toujours placé au centre de gravité du système, ces formules feront connaître sa vitesse à une époque quelconque, lorsqu'on connaîtra celles de tous les points du système.

En différentiant de nouveau les équations (2) et en ayant égard aux équations (1), on trouve

$$(3)\qquad \begin{cases} M\dfrac{d^2x_1}{dt^2} = \sum X, \\ M\dfrac{d^2y_1}{dt^2} = \sum Y, \\ M\dfrac{d^2z_1}{dt^2} = \sum Z, \end{cases}$$

De là résulte le théorème suivant :

Le centre de gravité de tout système libre se meut comme si les masses de tous les points matériels y étaient réunies et que les forces motrices y fussent transportées parallèlement à elles-mêmes.

601. Si l'on connaît le mouvement de chaque point du système, celui du centre de gravité sera également connu à un instant quelconque, au moyen des formules

$$Mx_1 = \sum mx, \quad My_1 = \sum my, \quad Mz_1 = \sum mz,$$

sans qu'on ait besoin de recourir au théorème précédent; mais celui-ci est principalement utile pour déterminer le mouvement du centre de gravité, lorsqu'on ne connaît pas ceux de tous les points du corps. Toutefois il faut connaître l'état initial du système afin d'avoir la position et la vitesse initiales du centre de gravité.

VITESSE INITIALE DU CENTRE DE GRAVITÉ D'UN SYSTÈME MIS EN MOUVEMENT PAR DES FORCES INSTANTANÉES.

602. On peut supposer que le système d'abord en repos soit mis en mouvement par des percussions. Déterminons, dans cette hypothèse, la vitesse initiale que doit prendre le centre de gravité.

Remarquons à cet effet que si θ est le temps pendant lequel agissent les percussions, l'équation

$$\sum m \frac{d^2x}{dt^2} = \sum X$$

donne

$$\sum m \frac{dx}{dt} = \sum \left(\int_0^\theta X\,dt \right).$$

Or, soient a, b, c les composantes de la vitesse que la percussion P (X, Y, Z), appliquée au point m, lui donne-

rait s'il était libre. On sait que

$$\int_0^\theta X\,dt = ma;$$

par conséquent

$$\sum m\frac{dx}{dt} = \sum ma.$$

La même formule aura lieu pour les autres axes. On a donc, en ayant égard aux équations (2), n° 599,

$$M\frac{dx_1}{dt} = \sum ma,\quad M\frac{dy_1}{dt} = \sum mb,\quad M\frac{dz_1}{dt} = \sum mc,$$

formules qui donnent les composantes $\frac{dx_1}{dt}$, $\frac{dy_1}{dt}$, $\frac{dz_1}{dt}$ de la vitesse avec laquelle le centre de gravité doit commencer à se mouvoir. On voit que cette vitesse est celle que prendrait un point ayant la masse M, placé au centre de gravité et qui serait sollicité par toutes les forces instantanées du système transportées parallèlement à elles-mêmes en ce point. En considérant comme autant de forces les quantités de mouvement que ces percussions imprimeraient à des masses libres, on concevra ces forces transportées parallèlement à elles-mêmes au centre de gravité, et l'on prendra leur résultante. La vitesse initiale du centre de gravité sera dirigée suivant cette résultante et égale à la valeur numérique de la même résultante divisée par la masse M.

CONSERVATION DU MOUVEMENT DU CENTRE DE GRAVITÉ.

603. Revenons maintenant aux équations

$$(1)\quad M\frac{d^2x_1}{dt^2} = \sum X,\quad M\frac{d^2y_1}{dt^2} = \sum Y,\quad M\frac{d^2z_1}{dt^2} = \sum Z.$$

Supposons que parmi les forces appliquées au système il y en ait qui proviennent d'actions mutuelles entre des points.

Celles-ci seront égales deux à deux, puisque si deux points agissent l'un sur l'autre, la réaction est toujours égale et directement opposée à l'action. Elles ne donnent donc aucun terme dans les seconds membres des équations (1), et par suite elles n'ont aucune influence sur le mouvement du centre de gravité. C'est ce qui a lieu dans le choc de deux corps par exemple. Quand ils sont assez rapprochés l'un de l'autre, leurs molécules agissent réciproquement les unes sur les autres, mais le mouvement du centre de gravité du système en est indépendant et est seulement déterminé par les forces extérieures. Il en est de même encore quand un corps solide en mouvement renfermant un gaz se trouve brisé par une explosion : les actions réciproques des molécules gazeuses et de celles du corps solide ne modifient point le mouvement du centre de gravité de leur système.

604. Quand toutes les forces motrices transportées parallèlement à elles-mêmes en un point quelconque s'y font équilibre, on a

$$(2) \qquad \sum X = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum Z = 0:$$

les équations du mouvement du centre de gravité se simplifient et deviennent

$$(3) \qquad \frac{d^2 x_1}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 y_1}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 z_1}{dt^2} = 0,$$

d'où l'on tire

$$(4) \qquad \frac{dx_1}{dt} = c, \quad \frac{dy_1}{dt} = c', \quad \frac{dz_1}{dt} = c'',$$

c, c', c'' étant des constantes. Le mouvement du centre de gravité est donc rectiligne et uniforme. C'est ce qui arrive en particulier quand toutes les forces qui agissent sur le système proviennent d'actions mutuelles qui agissent

entre ses différents points. Ce cas se présente, par exemple, dans notre système solaire. A cause du grand éloignement des étoiles, les forces motrices se réduisent à des actions réciproques des molécules, et dès lors le mouvement du centre de gravité de tout le système est rectiligne et uniforme.

Cette loi est connue sous le nom de *principe de la conservation du mouvement du centre de gravité*.

603. On peut présenter cette loi sous une autre forme. A cause des équations (2) on a

$$\sum m\frac{d^2x}{dt^2}=0,\quad \sum m\frac{d^2y}{dt^2}=0,\quad \sum m\frac{d^2z}{dt^2}=0,$$

d'où il suit que $\sum m\frac{dx}{dt}$, $\sum m\frac{dy}{dt}$, $\sum m\frac{dz}{dt}$ ont des valeurs constantes quel que soit t : c'est-à-dire que la somme des quantités de mouvement des masses du système, estimées parallèlement à un axe quelconque, est constante. Et si l'on considère les quantités de mouvement de toutes les molécules comme des forces et qu'on les transporte parallèlement à elles-mêmes en un même point, elles donnent une résultante de grandeur et de direction constante. Le centre de gravité se meut suivant une ligne droite parallèle à cette résultante et avec une vitesse égale à cette résultante divisée par la masse totale du système.

QUARANTE-SEPTIÈME LEÇON.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DU MOUVEMENT RELATIVES AUX AIRES.

Relations entre les quantités de mouvement d'un système. — Principe des aires. — Du principe des aires dans le mouvement relatif. — Plan du maximum des aires.

RELATIONS ENTRE LES QUANTITÉS DE MOUVEMENT D'UN SYSTÈME.

606. Considérons toujours un ensemble de points matériels qui peuvent se déplacer comme un système solide. Les forces perdues

$$X - m\frac{d^2x}{dt^2},\quad Y - m\frac{d^2y}{dt^2},\quad Z - m\frac{d^2z}{dt^2},\ldots,$$

doivent satisfaire aux trois équations d'équilibre d'un système solide, qui expriment que les sommes des moments des forces par rapport aux trois axes sont nulles : on a donc

$$\sum\left[\left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)x - \left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)y\right] = 0,$$

et des équations analogues pour les deux autres axes. On pourra mettre ces équations sous cette forme

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \sum m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) &= \sum(Yx - Xy),\\ \sum m\left(z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2}\right) &= \sum(Xz - Zx),\\ \sum m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) &= \sum(Zy - Yz).\end{aligned}\right.$$

Nous avons dit qu'en supposant le système solidifié, il ne devait y avoir aucun point fixe ou assujetti à demeurer sur une ligne ou surface fixe. Toutefois les équations (1) et leurs conséquences subsistent s'il y a dans le système un point fixe, pourvu qu'il soit pris pour origine des coordonnées, parce que la condition d'équilibre du système solidifié est dans ce cas que la somme des moments des forces, par rapport à trois axes passant par le point fixe, soit nulle pour chacun des axes.

607. Les sommes $\sum(\mathrm{Y}x - \mathrm{X}y),\ldots$, qui forment les seconds membres des équations (1), sont nulles lorsqu'en supposant le système solidifié, les forces qui le sollicitent se font équilibre, ou bien encore lorsqu'elles se réduisent à une force unique passant par l'origine des coordonnées. Dans ces deux cas on trouve, en intégrant les équations (1),

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = c,\\ &\sum m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) = c',\\ &\sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = c'', \end{aligned}\right.$$

Les valeurs des constantes c, c', c'' se déterminent d'après les positions et les vitesses initiales des points du système. Il résulte des équations (2) que la somme des moments des quantités de mouvement des masses du système par rapport à chacun des axes coordonnés, et, par conséquent, par rapport à une ligne droite quelconque est constante.

608. Donc si, à un instant quelconque, on considère comme des forces les quantités de mouvement qui animent les différents points du système, qu'on les com-

pose comme si elles étaient appliquées à un corps solide, et qu'on les réduise à trois forces dirigées suivant les axes et à trois couples parallèles aux plans coordonnés, on trouvera toujours la même résultante et le même couple résultant par rapport à une même origine. Le moment de ce couple résultant est $k = \sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2}$, et son plan, perpendiculaire à la droite qui fait avec les axes des angles ayant pour cosinus $\frac{c''}{k}, \frac{c'}{k}, \frac{c}{k}$, a pour équation

$$c''x + c'y + cz = 0.$$

PRINCIPE DES AIRES.

609. Les équations (2) peuvent être envisagées sous un autre point de vue.

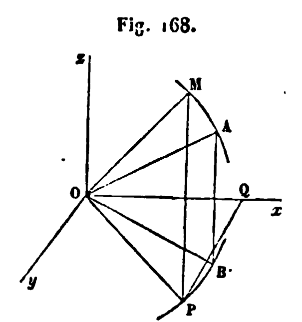


Fig. 168.

Pendant que le point $M(x, y, z)$ décrit sa trajectoire MA, la projection OP, de son rayon vecteur OM sur le plan xOy, décrit pendant le temps t une aire BOP ou λ dont la différentielle est

$$d\lambda = \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx).$$

La première des équations (2) donne

$$\sum m \frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{2}c,$$

d'où, en intégrant,

$$\sum m\lambda = \frac{1}{2}ct.$$

Il n'y a pas de constante à ajouter, parce que λ doit être

nulle pour $t = 0$. En désignant par λ' et λ'' les aires décrites par les projections du rayon vecteur sur les autres plans coordonnés, on aura de même

$$\sum m\lambda' = \frac{1}{2} c' t, \quad \sum m\lambda'' = \frac{1}{2} c'' t.$$

Chacune des constantes c, c', c'' représente le double de la somme des aires décrites dans l'unité de temps, par la projection de chaque rayon vecteur sur l'un des plans coordonnés. De là résulte ce théorème :

Quand les forces motrices appliquées à un système se font équilibre en supposant le système solidifié, ou bien quand toutes ces forces ont une résultante unique passant par l'origine des coordonnées, la somme des aires décrites par les projections du rayon vecteur sur chacun des plans coordonnés multipliées respectivement par les masses des points correspondants est proportionnelle au temps. C'est ce qu'on appelle le *principe de la conservation des aires.*

610. Cette loi a lieu en particulier quand les forces motrices du système se réduisent à des actions mutuelles entre ses différents points ou à des forces constamment dirigées vers un même point fixe, pourvu qu'on prenne celui-ci pour l'origine des coordonnées. En effet, lorsqu'on suppose le système solidifié, toutes ces forces se détruisent. Si l'on suppose le soleil fixe, toutes les forces motrices des planètes se réduisent à des forces dirigées vers le centre du soleil et à des attractions ou à des répulsions mutuelles qui se détruisent deux à deux. Le principe des aires doit donc être vérifié par rapport à tout plan mené par le centre du soleil.

Le principe de la conservation des aires subsistera s'il survient dans le système considéré des chocs ou des explosions qui proviennent toujours d'actions mutuelles entre les molécules.

DU PRINCIPE DES AIRES DANS LE MOUVEMENT RELATIF

611. Jusqu'ici nous avons supposé l'origine des coordonnées fixe dans l'espace. Prenons maintenant pour origine un point mobile avec le système. Soit O_1 ce point. Désignons par x_1, y_1, z_1 ses coordonnées par rapport à un système fixe Ox, Oy, Oz. Soit m un point ayant pour coordonnées x, y, z dans l'ancien système et ξ, η, ζ dans le nouveau composé de trois axes O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1 parallèles aux anciens et mobiles avec le point O_1. On aura

$$(1)\qquad x = x_1 + \xi, \quad y = y_1 + \eta, \quad z = z_1 + \zeta.$$

Remplaçons x, y, z par ces valeurs dans les équations (1) du n° 606, sans toutefois faire cette substitution dans $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$. La première devient

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} & x_1\sum m\frac{d^2y}{dt^2} - y_1\sum m\frac{d^2x}{dt^2} + \sum m\left(\xi\frac{d^2y}{dt^2} - \eta\frac{d^2x}{dt^2}\right) \\ & = x_1\sum Y - y_1\sum X + \sum(Y\xi - X\eta). \end{aligned}\right.$$

Ici nous sommes obligés de supposer qu'il n'y a dans le système aucun point fixe. Alors on a, en vertu des trois premières équations du système solidifié (597),

$$\sum m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum X, \quad \sum m\frac{d^2y}{dt^2} = \sum Y.$$

L'équation (2) se simplifie et devient

$$(3)\qquad \sum m\left(\xi\frac{d^2y}{dt^2} - \eta\frac{d^2x}{dt^2}\right) = \sum(Y\xi - X\eta).$$

Remplaçons maintenant $\frac{d^2x}{dt^2}$ et $\frac{d^2y}{dt^2}$ par leurs valeurs dé-

duites des équations (1). Nous aurons

$$
(4)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2y_1}{dt^2}\sum m\xi - \dfrac{d^2x_1}{dt^2}\sum m\eta \\ \quad + \sum m\left(\xi\dfrac{d^2\eta}{dt^2} - \eta\dfrac{d^2\xi}{dt^2}\right) = \sum(\mathrm{Y}\xi - \mathrm{X}\eta). \end{cases}
$$

612. On aurait deux autres équations analogues. On voit que, pour qu'elles deviennent semblables aux équations (1) du n° 606, il faut et il suffit que $\dfrac{d^2y_1}{dt^2}\sum m\xi - \dfrac{d^2x_1}{dt^2}\sum m\eta$ et les deux autres quantités analogues soient nulles. C'est ce qui peut être fait de différentes manières.

On y parvient d'abord en prenant pour origine mobile le centre de gravité du système, car alors $\sum m\xi$, $\sum m\eta$, $\sum m\zeta$ sont nulles. On a dans ce cas les trois équations

$$
(5)\quad \begin{cases} \sum m\left(\xi\dfrac{d^2\eta}{dt^2} - \eta\dfrac{d^2\xi}{dt^2}\right) = \sum(\mathrm{Y}\xi - \mathrm{X}\eta), \\ \sum m\left(\zeta\dfrac{d^2\xi}{dt^2} - \xi\dfrac{d^2\zeta}{dt^2}\right) = \sum(\mathrm{X}\zeta - \mathrm{Z}\xi), \\ \sum m\left(\eta\dfrac{d^2\zeta}{dt^2} - \zeta\dfrac{d^2\eta}{dt^2}\right) = \sum(\mathrm{Z}\eta - \mathrm{Y}\zeta). \end{cases}
$$

Ces termes disparaissent encore et l'on retombe sur les équations précédentes si l'on prend pour origine mobile un point qui ait dans l'espace un mouvement rectiligne et uniforme, car alors $\dfrac{d^2x_1}{dt^2}$, $\dfrac{d^2y_1}{dt^2}$, $\dfrac{d^2z_1}{dt^2}$ sont nulles.

Enfin il existe une dernière manière, mais beaucoup moins utile, de parvenir au même résultat : c'est de déterminer le mouvement du point O_1 d'après les condi-

tions

$$\frac{\frac{d^2x_1}{dt^2}}{\sum m\xi}=\frac{\frac{d^2y_1}{dt^2}}{\sum m\eta}=\frac{\frac{d^2z_1}{dt^2}}{\sum m\zeta}.$$

Ces équations signifient que la force accélératrice du point O_1, ou celle qu'il faudrait lui appliquer à chaque instant pour lui donner le mouvement qu'il a réellement, doit être constamment dirigée vers le centre de gravité du système, puisque $\sum m\xi$, $\sum m\eta$, $\sum m\zeta$ sont proportionnelles aux coordonnées mobiles du centre de gravité (ξ_1, η_1, ζ_1) du système.

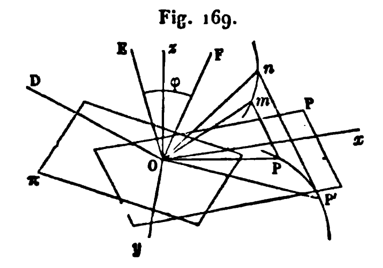
613. Si l'origine des coordonnées mobiles est choisie de l'une de ces trois manières, on aura, par rapport aux axes dont l'origine est mobile, des propriétés semblables à celles qu'on a trouvées pour des axes fixes, puisque les équations (5) ont la même forme que les équations (1) du n° 606. D'abord si les forces se font équilibre, en supposant le système solidifié, ou si elles se réduisent à une seule passant par l'origine mobile, les seconds membres des équations (5) sont nuls et on en conclut encore que la somme des aires décrites par les projections des rayons vecteurs sur un des plans coordonnés, multipliées par les masses des points correspondants, croît toujours proportionnellement au temps ou est constante dans des temps égaux. Ainsi le principe de la conservation des aires est vérifié relativement à ce plan mobile. Dans notre système planétaire, par exemple, on peut prendre pour origine des coordonnées son centre de gravité : car, en supposant que les étoiles n'agissent pas sur le système, le mouvement de ce point est rectiligne et uniforme (604). Du reste les forces motrices de ce système se réduisent à des actions mutuelles entre ses différents points, en sorte qu'il véri-

fie le principe des aires relativement à un plan quelconque passant par son centre de gravité.

PLAN DU MAXIMUM DES AIRES.

614. Considérons toujours un système de points en mouvement pour lequel le principe des aires a lieu, en prenant pour origine un point O fixe ou mobile suivant les conditions établies précédemment, et proposons-nous de trouver un plan tel, que la somme des produits des masses par les aires que décrivent les projections de leurs rayons vecteurs sur ce plan soit un maximum.

Fig. 169.



Le rayon vecteur Om du point m décrit une surface conique dont l'élément mOn est dans le plan tangent. Soit $d\sigma$ cet élément et appelons α, 6, γ les angles que la perpendiculaire OD à son plan fait avec les axes coordonnés Ox, Oy, Oz. Désignons par ω l'aire décrite par la projection du rayon vecteur Om sur un plan quelconque P, perpendiculaire à une droite qui fait avec les axes les angles A, B, C. En appelant θ l'angle DOE, ou l'angle que le plan de l'aire $d\sigma$ fait avec le plan de projection P, on a

$$d\omega = d\sigma \cos\theta,$$

puisque $d\omega$ est la projection de $d\sigma$ sur le plan P.

D'ailleurs les projections de $d\sigma$ sur les plans xOy, xOz, yOz sont $d\lambda$, $d\lambda'$, $d\lambda''$, et l'on a

$$d\lambda'' = d\sigma \cos\alpha, \quad d\lambda' = d\sigma \cos 6, \quad d\lambda = d\sigma \cos\gamma$$

et

$$\cos\theta = \cos\alpha \cos A + \cos 6 \cos B + \cos\gamma \cos C.$$

En multipliant cette dernière par $d\sigma$ et ayant égard aux équations précédentes, on aura

$$d\omega = d\lambda'' \cos A + d\lambda' \cos B + d\lambda \cos C,$$

d'où

$$\omega = \lambda'' \cos A + \lambda' \cos B + \lambda \cos C;$$

par conséquent

$$\sum m\omega = \cos A \sum m\lambda'' + \cos B \sum m\lambda' + \cos C \sum m\lambda.$$

Mais on sait que (609)

$$\sum m\lambda = \frac{1}{2} ct, \quad \sum m\lambda' = \frac{1}{2} c't, \quad \sum m\lambda'' = \frac{1}{2} c''t,$$

donc on a

$$(1) \qquad \sum m\omega = (c'' \cos A + c' \cos B + c \cos C) \frac{t}{2}.$$

Dans cette équation, le coefficient de t est constant, le plan P étant donné.

Posons

$$\sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2} = k.$$

On peut écrire

$$(2) \qquad \sum m\omega = \left(\frac{c''}{k} \cos A + \frac{c'}{k} \cos B + \frac{c}{k} \cos C \right) \frac{k}{2} t.$$

Il est permis de regarder $\frac{c''}{k}$, $\frac{c'}{k}$, $\frac{c}{k}$ comme étant les cosinus des angles formés par une certaine droite OF avec les axes coordonnés, droite dont la direction est indépendante de la position du plan P. Par conséquent, si nous concevons un plan π perpendiculaire à OF, la position de ce plan ne dépend pas non plus de celle du plan P. Or φ étant l'angle EOF ou l'angle des plans P et π, on a

$$\cos\varphi = \frac{c''}{k} \cos A + \frac{c'}{k} \cos B + \frac{c}{k} \cos C,$$

par suite

$$(3) \qquad \sum m\omega = \frac{1}{2} kt \cos\varphi.$$

Ainsi la somme des aires décrites sur le plan P, multipliées respectivement par les masses des points correspondants, est égale au produit de $\frac{1}{2}kt$ par le cosinus de l'angle des deux plans P et π.

Comme la quantité k ne dépend pas de la position du plan P, l'équation (3) montre que la quantité $\sum m\omega$ est maximum lorsque φ est égal à 90°, c'est-à-dire lorsque le plan de projection P coïncide avec le plan π. On a alors

$$(4) \qquad \sum m\omega = \frac{1}{2} kt.$$

Il existe donc *un plan fixe tel, que la somme des aires décrites pendant un temps quelconque par les projections des rayons vecteurs des points mobiles sur ce plan, multipliées par leurs masses, est plus grande que pour tout autre plan de projection.* Ce plan est toujours le même, quel que soit le temps écoulé. On l'appelle pour ces deux raisons *plan du maximum des aires* ou *plan invariable.* Son équation est

$$c''x + c'y + cz = 0$$

et la somme $\sum m\omega$ relative à un autre plan de projection se déduit de celle qui se rapporte au plan π, en la multipliant par le cosinus de l'angle des deux plans.

Ce plan est le même que celui du couple résultant des quantités de mouvement du système solidifié, qui a été déterminé précédemment (602).

QUARANTE-HUITIÈME LEÇON.

DES FORCES VIVES DANS LE MOUVEMENT D'UN SYSTÈME.

Principe des forces vives. — Autre démonstration. — Conséquences du principe des forces vives. — Des forces vives dans un système à liaisons complètes. — Des forces vives dans le mouvement relatif.

PRINCIPE DES FORCES VIVES.

615. Considérons un système de points $m, m', m'', \ldots$, sollicités par des forces $P, P', P'', \ldots$, dont nous désignerons les composantes parallèles à trois axes rectangulaires par $X, Y, Z, X', Y', Z', \ldots$. En combinant le principe de d'Alembert avec celui des vitesses virtuelles on obtient l'équation

$$(1)\quad \sum\left[\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right] = 0.$$

Les liaisons du système étant exprimées par un certain nombre d'équations

$$(2)\qquad L = 0,\quad M = 0,\quad N = 0, \ldots,$$

qui doivent être satisfaites, à une époque quelconque, par les coordonnées des points du système et par ces coordonnées après un déplacement virtuel, il en résulte (489) que les variations des coordonnées sont assujetties à satisfaire aux équations suivantes, dans lesquelles le temps est

supposé constant :

$$(7)\quad \begin{cases} \frac{dL}{dx}\delta x + \frac{dL}{dy}\delta y + \frac{dL}{dz}\delta z + \frac{dL}{dx'}\delta x' + \ldots = 0, \\ \frac{dM}{dx}\delta x + \frac{dM}{dy}\delta y + \frac{dM}{dz}\delta z + \frac{dM}{dx'}\delta x' + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

D'un autre côté, dans le mouvement effectif du système, les coordonnées des points devant satisfaire aux équations de condition (2), on a, en différentiant celles-ci par rapport à t, variable indépendante,

$$(4)\quad \begin{cases} \frac{dL}{dt}dt + \frac{dL}{dx}dx + \frac{dL}{dy}dy + \frac{dL}{dz}dz + \frac{dL}{dx'}dx' + \ldots = 0, \\ \frac{dM}{dt}dt + \frac{dM}{dx}dx + \frac{dM}{dy}dy + \frac{dM}{dz}dz + \frac{dM}{dx'}dx' + \ldots = 0. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

On a déjà expliqué la distinction essentielle qui existe entre les variations δx, δy, δz, qui répondent à un déplacement virtuel du point M, et les différentielles dx, dy, dz, qui se rapportent au déplacement réel que prend ce point, dans le mouvement général du système. Supposons que les équations de condition ne renferment pas le temps explicitement. Alors les dérivées partielles $\frac{dL}{dt}$, $\frac{dM}{dt}$, ..., étant nulles, les équations (3) et (4) montrent qu'on pourra faire

$$\delta x = dx, \quad \delta y = dy, \quad \delta z = dz, \quad \delta x' = dx', \ldots.$$

Ainsi, parmi tous les déplacements virtuels, compatibles avec les liaisons du système, il sera permis de choisir celui qui se rapporte au mouvement réel de chaque point. Alors l'équation (1) deviendra

$$\sum\left[\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)dx + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)dy + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)dz\right] = 0,$$

ou

$$(5)\quad \sum m\frac{dx\,d^2x+dy\,d^2y+dz\,d^2z}{dt^2}-\sum(\mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy+\mathrm{Z}dz)=0.$$

Mais à cause de

$$v^2=\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2},$$

on a

$$\frac{1}{2}dv^2=\frac{dx\,d^2x+dy\,d^2y+dz\,d^2z}{dt^2},$$

d'où résulte

$$(6)\qquad d\sum mv^2=2\sum(\mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy+\mathrm{Z}dz),$$

ou, en appelant dp la projection du chemin parcouru par le point M sur la direction de la force P,

$$(7)\qquad d\sum mv^2=2\sum \mathrm{P}dp.$$

Donc la différentielle de la somme des forces vives de tous les points du système est double de la somme des quantités de travail élémentaire des forces motrices.

616. Si l'on intègre l'équation (6), entre les limites t_0 et t, on aura, en désignant par v_0 la vitesse initiale du point M,

$$(8)\quad \sum mv^2-\sum mv_0^2=2\int_{t_0}^{t}\sum(\mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy+\mathrm{Z}dz).$$

Donc *dans tout système dont les liaisons sont indépendantes du temps, l'accroissement de la somme des forces vives de tous les points, pendant un temps quelconque, est égal au double de la somme des travaux de toutes les forces pendant le même temps.*

Ainsi la différence des deux sommes de forces vives à deux époques quelconques ne dépend que des coordonnées des points mobiles à ces deux époques et nullement de leurs liaisons ni des chemins qu'ils ont suivis pour passer d'une position à une autre.

AUTRE DÉMONSTRATION

617. La force P, qui agit sur le point M, peut être décomposée en deux forces, la force tangentielle $m\frac{dv}{dt}$ et la force centripète $\frac{mv^2}{\rho}$, ρ étant le rayon de courbure de la trajectoire au point M. Des forces égales et contraires à ces deux dernières forces étant jointes à la force motrice P, il doit y avoir équilibre et par suite la somme de tous les moments virtuels doit être nulle.

On démontrerait, comme précédemment, que si les liaisons du système ne dépendent pas explicitement du temps, on peut prendre pour le déplacement virtuel de chaque point son déplacement réel ds. Soit dp la projection de ds sur la force P : le moment virtuel de cette force est Pdp : celui de la force tangentielle, prise en sens contraire, est

$$-m\frac{dv}{dt}ds = -m\frac{ds}{dt}dv = -mvdv;$$

celui d'une force égale et contraire à la force centripète est nul. On a donc

$$\sum Pdp - \sum mvdv = 0,$$

ou

(7) $$d\sum mv^2 = 2\sum Pdp,$$

d'où l'on déduit encore l'équation (8).

CONSÉQUENCES DU PRINCIPE DES FORCES VIVES.

618. Quand il n'y a pas de forces motrices appliquées au système ou si les forces se font équilibre à chaque instant, on a

$$\sum \mathrm{P}dp = 0,$$

et l'équation (7) donne

$$\sum mv^2 = \text{const.}$$

Ainsi, *dans un système, assujetti à des conditions quelconques, mais qui ne dépendent pas explicitement du temps, s'il n'y a pas de forces motrices ou si les forces motrices se font continuellement équilibre, la somme des forces vives reste constante.*

Ce principe est connu sous le nom de *principe de la conservation des forces vives*. Observons que dans les systèmes où il a lieu, les points n'étant soumis à aucune force motrice, leurs vitesses ne varient qu'en raison de leurs liaisons et de l'obligation de se mouvoir sur des surfaces ou sur des courbes fixes.

619. Supposons que la fonction

$$\sum (\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz)$$

soit la différentielle exacte d'une fonction des variables $x, y, z, x', \ldots$, considérées comme indépendantes ou comme liées entre elles par les équations $\mathrm{L} = 0$, $\mathrm{M} = 0, \ldots$ Soit

$$(1) \qquad 2\sum (\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz) = df(x, y, z, x', \ldots).$$

On aura, en intégrant l'équation

$$(2) \qquad d\sum mv^2 = 2\sum(X dx + Y dy + Z dz)$$

par rapport au temps,

$$(3) \qquad \sum mv^2 = C + f(x, y, z, x', y', \ldots).$$

Pour déterminer la constante C, désignons par v_0 la vitesse d'un point quelconque M, et par x_0, y_0, z_0, ses coordonnées à une époque quelconque t_0. On aura

$$(4) \qquad \sum mv_0^2 = C + f(x_0, y_0, z_0, \ldots),$$

et, par suite,

$$(5) \qquad \sum mv^2 - \sum mv_0^2 = f(x, y, z, x', \ldots) - f(x_0, y_0, z_0, \ldots).$$

Donc *lorsque le système passe d'une position à une autre, l'accroissement de la somme des forces vives ne dépend que des coordonnées des points dans ces deux positions.* Pour évaluer cet accroissement, on n'a besoin de connaître ni les liaisons des points dans cet intervalle, ni les chemins qu'ils ont suivis, ni le temps qu'ils ont mis à les parcourir.

620. L'équation (5) montre que si les points mobiles occupent la même position à deux époques différentes t et t_0, la somme des forces vives aura la même valeur à ces deux époques. On aura dans ce cas

$$\sum mv^2 - \sum mv_0^2 = 0,$$

pourvu que, les coordonnées des points reprenant les mêmes valeurs, la fonction $f(x, y, z, x', \ldots)$ reprenne aussi la même valeur. C'est ce qui pourrait ne pas avoir

lieu. Par exemple, si dans

$$\sum(\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz)$$

on a une partie telle que $\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$ qui est la différentielle d'un arc θ, dont la tangente est $\frac{y}{x}$, si le point m revient à la position qu'il a déjà occupée en tournant toujours dans le même sens autour d'un axe, quelle que soit la courbe décrite, l'angle θ aura augmenté de 2π, de sorte que la fonction f dans laquelle entre θ n'aura pas repris sa valeur primitive.

621. L'expression $\sum(\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz)$ est la différentielle exacte d'une fonction de $x, y, z, x', \ldots$ quand les forces motrices sont constamment dirigées vers des centres fixes, et qu'elles sont fonctions des distances de leurs points d'application aux centres. Cela arrive aussi quand les forces proviennent d'attractions ou de répulsions mutuelles entre les points du système, actions dont les intensités sont fonctions des distances des points entre lesquels elles s'exercent.

622. L'expression $\sum(\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz)$ n'est pas une différentielle exacte dans le cas où les points du système éprouvent des frottements ou la résistance d'un milieu. Cela tient à ce que les frottements et les résistances sont des forces qui dépendent, les premières de la pression de chaque point contre les surfaces frottantes, les autres de la vitesse de chaque point. Dans ce dernier cas on a, pour le point M,

$$\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz = -f(v)\,ds.$$

Or la vitesse ne dépendant pas uniquement de la position du point ni de celle des autres points du système, $f(v)\,ds$

ne peut pas etre la différentielle exacte d'une fonction de $x, y, z, x', \ldots$. La même conclusion s'applique au cas des frottements. Dans ces deux cas il y a perte de force vive, et cette perte dépend d'éléments autres que les coordonnées des points du système dans les deux positions considérées.

DES FORCES VIVES DANS UN SYSTÈME A LIAISONS COMPLÈTES.

623. Quand un système de n points est à liaisons complètes, il y a $3n - 1$ équations de condition : un seul mouvement virtuel est possible à chaque instant, et il est le même que le déplacement réel du système. Dans ce cas, l'équation des forces vives suffit pour déterminer le mouvement de chaque point, car en y joignant celles qui expriment les liaisons du système, on a $3n$ équations pour connaître les expressions des $3n$ variables $x, y, z, x', y', \ldots$ en fonction du temps. Il faut alors exprimer toutes les variables en fonction d'une seule θ convenablement choisie.

Considérons, par exemple, le mouvement d'un corps solide autour d'un axe Oz, ce qui constitue un système à liaisons complètes. On aura, en conservant les notations habituelles,

$$(1) \qquad d\sum mv^2 = 2\sum(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

Or on a

$$v = r\omega, \qquad \sum mv^2 = \sum mr^2\omega^2 = \omega^2\sum mr^2,$$

puisque la vitesse angulaire est la même à chaque instant pour tous les points du système. D'ailleurs

$$\frac{dx}{dt} = -y\omega, \quad \frac{dy}{dt} = x\omega, \quad \frac{dz}{dt} = 0;$$

donc

$$(2) \quad \sum(\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz) = \omega\sum(\mathrm{Y}x - \mathrm{X}y)\,dt.$$

Substituant dans l'équation (1), on a

$$\sum mr^2 \frac{d\omega^2}{dt} = 2\omega\sum(\mathrm{Y}x - \mathrm{X}y),$$

ou bien

$$\frac{d\omega}{dt}\sum mr^2 = \sum(\mathrm{Y}x - \mathrm{X}y),$$

équation déjà obtenue (534).

624. L'équation du mouvement du pendule composé, établie comme conséquence de la théorie des mouvements de rotation, peut être déduite de l'équation (1).

Fig. 170.

En conservant les mêmes notations (565), on a

$$d\sum mv^2 = d\left(\omega^2\sum mr^2\right)$$

et

$$\sum(\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz) = \sum mg\,dy;$$

donc, en substituant,

$$d\left(\omega^2\sum mr^2\right) = 2\sum mg\,dy$$

et en intégrant

$$\omega^2\sum mr^2 = 2g\sum my + \mathrm{C} = 2g\mathrm{M}y_1 + \mathrm{C},$$

M étant la masse totale du pendule et y_1 ou AD l'y du centre de gravité. On a d'ailleurs

$$y_1 = a\cos\theta$$

et

$$\sum mr^2 = M(a^2 + k^2).$$

Par conséquent

$$\omega^2 = \frac{2ga\cos\theta}{a^2+k^2} + C.$$

Pour déterminer la constante C, désignons par Ω la vitesse angulaire initiale, correspondant à $\theta = \alpha$. On a, dans ce cas,

$$\omega^2 = \Omega^2 + \frac{2ga}{a^2+k^2}(\cos\theta - \cos\alpha),$$

ou

$$\frac{d\theta^2}{dt^2} = \Omega^2 + \frac{2ga}{a^2+k^2}(\cos\theta - \cos\alpha),$$

équation déjà obtenue (565) et qui représente le mouvement du centre de gravité.

DES FORCES VIVES DANS LE MOUVEMENT RELATIF.

625. L'équation des forces vives s'applique au mouvement relatif d'un système quelconque par rapport à son centre de gravité, pourvu que dans ce système il n'existe aucun point fixe, ni aucun point assujetti à rester sur une courbe ou sur une surface fixe.

Soient Gx_1, Gy_1, Gz_1, trois axes parallèles à trois axes fixes Ox, Oy, Oz et menés par le centre de gravité $G(x_1, y_1, z_1)$ à une époque quelconque. Désignons par ξ, η, ζ les coordonnées d'un point quelconque $M(x, y, z)$ par rapport à ces axes mobiles. On aura

$$(1) \qquad x = x_1 + \xi, \quad y = y_1 + \eta, \quad z = z_1 + \zeta.$$

Nommons v la vitesse du point M, et ω sa vitesse relative, c'est-à-dire sa vitesse apparente pour un observateur placé en G et qui serait entraîné avec les axes mobiles. Soit enfin v_1 la vitesse du point G.

On a

$$(2) \qquad v^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2},$$

d'où, à cause des équations (1),

$$v^2 = \frac{dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2}{dt^2} + \frac{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}{dt^2} + 2\left(\frac{dx_1}{dt}\frac{d\xi}{dt} + \frac{dy_1}{dt}\frac{d\eta}{dt} + \frac{dz_1}{dt}\frac{d\zeta}{dt}\right),$$

ou

$$(3) \qquad v^2 = v_1^2 + \omega^2 + 2\left(\frac{dx_1}{dt}\frac{d\xi}{dt} + \frac{dy_1}{dt}\frac{d\eta}{dt} + \frac{dz_1}{dt}\frac{d\zeta}{dt}\right).$$

Multiplions par m les deux membres de cette équation et ajoutons toutes les équations analogues relatives aux autres points du système. Si l'on observe que

$$\sum m\left(\frac{dx_1}{dt}\frac{d\xi}{dt} + \ldots\right) = \frac{dx_1}{dt}\sum m\frac{d\xi}{dt} + \frac{dy_1}{dt}\sum m\frac{d\eta}{dt} + \frac{dz_1}{dt}\sum m\frac{d\zeta}{dt} = 0,$$

puisque l'origine G étant le centre de gravité, on a $\sum m\xi = 0, \ldots$, et par suite $\sum m\frac{d\xi}{dt} = 0, \ldots$, l'équation résultante se réduit à

$$\sum mv^2 = \sum mv_1^2 + \sum m\omega^2,$$

ou

$$(4) \qquad \sum mv^2 = Mv_1^2 + \sum m\omega^2,$$

en désignant par M la masse totale du système.

Ainsi (et cette conséquence s'applique à un système quelconque lors même qu'il ne serait pas entièrement libre dans l'espace), *la somme des forces vives des points dans leur mouvement absolu est égale, à chaque instant, à la même somme considérée dans le mouvement relatif autour du centre de gravité, augmentée du produit de la*

masse totale du système multipliée par le carré de la vitesse du centre de gravité.

626. Revenons à l'hypothèse primitive, en vertu de laquelle on suppose le système entièrement libre. Substituant à $\sum mv^2$ la valeur précédente dans l'équation

$$d\sum mv^2 = 2\sum(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz),$$

on a

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &d\mathrm{M}v_1^2 + d\sum m\omega^2 \\ &\quad = 2\sum(\mathrm{X}dx_1 + \mathrm{Y}dy_1 + \mathrm{Z}dz_1) \\ &\quad + 2\sum(\mathrm{X}d\xi + \mathrm{Y}d\eta + \mathrm{Z}d\zeta). \end{aligned}\right.$$

Or de

$$\mathrm{M}\frac{d^2x_1}{dt^2} = \sum \mathrm{X},\quad \mathrm{M}\frac{d^2y_1}{dt^2} = \sum \mathrm{Y},\quad \mathrm{M}\frac{d^2z_1}{dt^2} = \sum \mathrm{Z},$$

on tire

$$\mathrm{M}\frac{2d^2x_1dx_1 + 2d^2y_1dy_1 + 2d^2z_1dz_1}{dt^2},$$

ou

$$d\mathrm{M}v_1^2 = 2\sum(\mathrm{X}dx_1 + \mathrm{Y}dy_1 + \mathrm{Z}dz_1);$$

donc l'équation (5) se réduit à

$$d\sum m\omega^2 = 2\sum(\mathrm{X}d\xi + \mathrm{Y}d\eta + \mathrm{Z}d\zeta).$$

Cette équation exprime que, dans le mouvement relatif d'un système absolument libre, autour de son centre de gravité, la différentielle de la somme des forces vives des points du système est égale au double de la somme des quantités de travail apparent des forces motrices.

QUARANTE-NEUVIÈME LEÇON.

DU CHOC DES CORPS.

Choc direct de deux corps sphériques. — Mouvement du centre de gravité. Choc de deux corps dépourvus d'élasticité. — Choc de deux corps parfaitement élastiques. — Vitesse des centres de gravité après le choc. — Examen de quelques cas particuliers. — Mouvement du centre de gravité. — Principe de la moindre action.

DU CHOC DIRECT DE DEUX CORPS SPHÉRIQUES.

627. Considérons deux sphères, dont les centres se meuvent sur une même droite Ox, dans le même sens ou en sens contraires, et dont tous les points décrivent des parallèles à cette droite.

Supposons, pour fixer les idées, que les deux corps se meuvent dans le même sens. Pendant le choc ils se compriment mutuellement et leur forme sphérique est un peu altérée. Pour le bien concevoir, il faut considérer chacun de ces deux corps comme un système de points matériels, de figure variable à cause des actions mutuelles que les molécules des deux corps exercent les unes sur les autres. La détermination du mouvement de chaque molécule serait un problème fort difficile, mais on peut obtenir le mouvement du centre de gravité de chacun de ces deux corps d'après le principe qui détermine le mouvement du centre de gravité d'un système. Il résulte de ce principe et de celui de l'égalité entre l'action et la réaction, qu'il faut, pendant la durée du choc, supposer appliquées aux deux centres de gravité des forces égales et contraires, dirigées suivant Ox et qui sont les résultantes de toutes les actions moléculaires. Mais ici il faut distinguer deux cas.

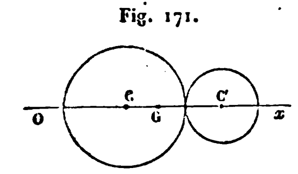
628. Si les deux corps sont *mous*, c'est-à-dire dépourvus d'élasticité, après s'être comprimés jusqu'à un certain degré, ils cessent d'agir l'un sur l'autre à l'instant où les vitesses sont devenues égales, et ils continuent à se mouvoir en restant juxtaposés avec une vitesse commune et conservant la forme que la compression leur a donnée.

629. S'ils sont élastiques, ils tendent, au moment où la compression cesse, à reprendre leur forme primitive aussitôt que la vitesse est devenue la même, et de là naissent de nouvelles pressions qui tendent à séparer les deux corps. Si ces pressions sont égales en intensité à celles qui ont lieu dans la première partie du choc et que les deux corps quand ils se séparent soient dans le même état qu'au moment où le choc a commencé, on dit qu'ils sont *parfaitement élastiques*. Ils ne sont qu'imparfaitement élastiques si les pressions sont moindres dans la seconde période que dans la première.

MOUVEMENT DES CENTRES DE GRAVITÉ.

630. Occupons-nous maintenant de déterminer le mouvement des deux centres de gravité. Soient $OC = x$ et $OC' = x'$, O étant un point fixe pris arbitrairement sur Ox. Soit, à une époque quelconque du choc, R la valeur des deux pressions égales et contraires appliquées aux centres des deux sphères et qui résultent des actions mutuelles de leurs molécules. En vertu du principe relatif au mouvement du centre de gravité (600), m et m' étant les masses des deux sphères, on aura

Fig. 171.



$$(1) \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = -R, \quad m'\frac{d^2x'}{dt^2} = R.$$

On en conclut d'abord

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+m'\frac{d^2x'}{dt^2}=0,$$

d'où

$$m\frac{dx}{dt}+m'\frac{dx'}{dt}=\text{const.}$$

Donc, si l'on appelle v et v' les vitesses des deux corps, au commencement même du choc, on aura

$$mv+m'v'=\text{const.},$$

et, par suite,

$$(2)\qquad m\frac{dx}{dt}+m'\frac{dx'}{dt}=mv+m'v'.$$

Cette équation exprime que la somme des quantités de mouvement reste constante pendant toute la durée du choc.

CHOC DE DEUX CORPS DÉPOURVUS D'ÉLASTICITÉ.

631. Supposons maintenant que les corps soient mous et désignons par u la vitesse commune avec laquelle ces deux corps réunis en un seul se mouvront après le choc. On aura, d'après la formule (2),

$$(m+m')u=mv+m'v';$$

d'où

$$u=\frac{mv+m'v'}{m+m'}.$$

On voit que si avant le choc les deux corps allaient dans le même sens, après le choc le sens du mouvement commun sera le même. S'ils allaient en sens contraire, la vitesse commune après le choc sera celle de la sphère qui avait la plus grande quantité de mouvement. En particulier si les deux corps, allant à la rencontre l'un de l'autre, avaient des quantités de mouvement égales, le choc les réduirait au repos.

ÉQUATION DES FORCES VIVES.

632. On a, pendant toute la durée du choc (630),

$$(1)\qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = -R, \quad m\frac{d^2x'}{dt^2} = R;$$

d'où l'on tire, comme précédemment,

$$(2)\qquad m\frac{dx}{dt} + m'\frac{dx'}{dt} = mv + m'v'.$$

Pour déterminer les vitesses des deux centres de gravité après le choc, il faut une autre équation. En ajoutant les équations (1) respectivement multipliées par $2dx$ et $2dx'$, et intégrant le résultat, on trouve

$$(3)\qquad m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + m'\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2 = C + 2\int R\,dr,$$

r désignant la distance des deux centres de gravité.

Pour déterminer la constante C, comptons le temps à partir du commencement du choc et faisons commencer l'intégrale à cette valeur initiale du temps; il en résulte

$$mv^2 + m'v'^2 = C$$

et

$$(4)\qquad m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + m'\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2 = mv^2 + m'v'^2 + 2\int R\,dr.$$

Cette équation exprime que la somme des forces vives à une époque quelconque est égale à cette somme prise au commencement du choc, plus le double de l'intégrale de $R\,dr$, prise à partir de la même époque. Dans la première période du choc la somme des forces vives est toujours moindre qu'avant le choc, parce que, la distance des centres diminuant, on a $dr < 0$, et les éléments de l'intégrale $\int R\,dr$ sont constamment négatifs. Dans la seconde

période, la distance des centres augmente et les éléments de l'intégrale sont toujours positifs. Mais comme R a des valeurs moindres que dans la première période, l'intégrale $\int R\,dr$, prise pendant toute la durée du choc, est négative. La somme des forces vives est donc toujours moindre qu'avant le choc, seulement la différence va en diminuant dans la seconde période.

CHOC DE DEUX CORPS PARFAITEMENT ÉLASTIQUES.

633. Quand les deux corps sont parfaitement élastiques, les éléments de l'intégrale $\int R\,dr$ se détruisent deux à deux, parce que la résultante R reprend la même valeur quand la distance r redevient la même. Il en résulte que l'intégrale, prise pendant toute la durée du choc, est nulle. Dans ce cas l'équation (4) se simplifie et devient

$$m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + m'\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2 = mv^2 + m'v'^2.$$

634. Proposons-nous de déterminer les vitesses $V = \frac{dx}{dt}$, $V' = \frac{dx'}{dt}$ des deux centres de gravité après le choc. On a les équations (630, 633)

$$(1)\qquad mV + m'V' = mv + m'v',$$

$$(2)\qquad mV^2 + m'V'^2 = mv^2 + m'v'^2.$$

On peut les mettre sous la forme

$$m(V - v) = m'(v' - V');$$

$$m(V^2 - v^2) = m'(v'^2 - V'^2),$$

d'où l'on tire, en divisant,

$$(3)\qquad V + v = V' + v'.$$

On a donc deux équations du premier degré (1) et (3) qui donnent

$$(4)\qquad \begin{cases} V = \dfrac{(m - m')v + 2m'v'}{m + m'} \\ V' = \dfrac{2mv + (m' - m)v'}{m + m'}. \end{cases}$$

635. On tire de ces formules diverses conséquences.

Soit u la vitesse commune aux deux centres de gravité. au moment où la compression est la plus grande. On a (631)

$$u = \frac{mv + m'v'}{m + m'};$$

mais

$$V = \frac{2(mv + m'v')}{m + m'} - v;$$

donc

$$V = 2u - v.$$

On trouvera de même

$$V' = 2u - v'.$$

Donc la vitesse de chaque corps au milieu du choc est la moyenne arithmétique entre sa vitesse avant le choc et sa vitesse après le choc.

L'équation

$$V' - V = v - v'$$

fait voir encore que la vitesse relative avec laquelle le centre de gravité C s'éloigne de C' après le choc est égale à celle avec laquelle il s'en approchait à l'instant où le choc a eu lieu.

EXAMEN DE QUELQUES CAS PARTICULIERS.

636. Si le corps C' est en repos au moment où C vient le rencontrer, $v' = 0$, et si les deux corps sont mous, la

vitesse après le choc est (631)

$$u = \frac{mv}{m + m'}.$$

On ne peut avoir $u = 0$ que si la masse m' est infiniment grande par rapport à la masse m. C'est ce qui arrive pour les corps mous tombant à la surface de la terre.

637. Il n'en est plus de même si les corps sont parfaitement élastiques. Dans ce cas, les formules (4), n° 634, donnent

$$V = \frac{(m - m')v}{m + m'}, \quad V' = \frac{2mv}{m + m'}.$$

Si m' est infiniment grande par rapport à m, on a

$$V = -v, \quad V' = 0.$$

Ainsi le corps choqué demeure en repos, tandis que l'autre est réfléchi en sens contraire avec une vitesse égale à celle avec laquelle il est venu rencontrer le premier.

C'est ce qui arrive lorsqu'une sphère élastique pesante tombe d'une certaine hauteur sur un plan fixe horizontal qui est lui-même élastique. Elle doit remonter, par la réaction du plan fixe, jusqu'à son point de départ.

638. Quand les deux masses m et m' sont égales, si les deux corps sont mous, leur vitesse commune après le choc sera

$$u = \frac{v + v'}{2},$$

c'est-à-dire la moyenne entre les vitesses des deux corps avant le choc.

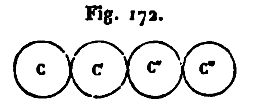
Si les deux corps sont parfaitement élastiques, ils ne feront qu'échanger leur vitesse, car en faisant $m = m'$ les formules (4), n° 634, donnent

$$V = v', \quad V' = v.$$

Donc, si l'un des corps était en repos, l'autre restera immobile après le choc et lui transmettra sa vitesse, car si $v' = 0$, on aura $V = 0$, $V' = v$.

C'est ce qui arrive quand une bille C vient en choquer une autre C'. La même chose aurait lieu si un nombre quelconque de billes égales C', C'', C''' en repos et parfaitement élastiques étaient choquées par une bille élastique C et de même masse, suivant la droite qui passe par leurs centres. On verra facilement que toutes les billes, excepté la dernière, resteront en repos et que la bille C''' seule se déplacera avec la vitesse même qu'avait la première au moment du choc. Toutes ces conséquences sont vérifiées par l'expérience.

Fig. 172.



THÉORÈME DE CARNOT.

639. La somme des forces vives ne change pas par l'effet du choc quand les corps sont parfaitement élastiques : c'est ce que montre l'équation du n° 633. Mais lorsqu'ils sont mous, elle diminue et la différence est égale à la somme des forces vives dues aux vitesses acquises ou perdues par les deux corps. En effet, cette différence exprimée par $mv^2 + m'v'^2 - (m + m')u^2$ est égale à

$$mv^2 + m'v'^2 + (m + m')u^2 - 2(m + m')u.u$$
$$= mv^2 + m'v'^2 + (m + m')u^2 - 2(mv + m'v')u,$$

en remplaçant $(m + m')u$ par $mv + m'v'$. On a donc en réduisant

$$mv^2 + m'v'^2 - (m + m')u^2 = m(v - u)^2 + m'(u - v')^2,$$

équation qui démontre le principe énoncé.

On peut encore mettre cette perte de force vive sous la forme $\frac{mm'}{m+m'}(v-v')^2$, en remplaçant dans le deuxième membre de l'expression u par sa valeur.

MOUVEMENT DU CENTRE DE GRAVITÉ COMMUN.

640. D'après un principe général déjà démontré (603), le mouvement du centre de gravité commun du système des deux masses m et m' ne doit pas être altéré pendant le choc. C'est ce qu'il est facile de vérifier dans le cas actuel. En effet, x_1 étant l'abscisse du centre de gravité, on a

$$(m+m')x_1 = mx + m'x',$$

$$(m+m')\frac{dx_1}{dt} = m\frac{dx}{dt} + m'\frac{dx'}{dt}$$

ou

$$(m+m')\frac{dx_1}{dt} = mv + m'v'$$

et

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{mv+m'v'}{m+m'}.$$

Ainsi la vitesse du centre de gravité reste constante avant, pendant et après le choc.

PRINCIPE DE LA MOINDRE ACTION.

641. Dans le mouvement d'un système de corps pour lequel le principe des forces vives a lieu, si l'on multiplie la vitesse de chaque point du système par sa masse et par l'élément de sa trajectoire, et qu'on intègre la somme de ces produits depuis une position donnée du système jusqu'à une autre position aussi donnée, la valeur de cette intégrale $\int \sum mvds$ est généralement un minimum. Nous disons généralement, parce qu'il y a exception dans

quelques cas particuliers, mais on démontre que dans tous les cas sa variation est nulle.

Supposons que l'on ait, en conservant les notations du n° 615,

$$\sum mv^2 = C + \varphi(x, y, z, x', \ldots),$$

$$C = \sum mk^2 - \varphi(a, b, c, a' \ldots).$$

On a

$$\delta \int mvds = \int \delta \sum mvds = \int \sum m\,\delta v ds + \int \sum mv\,\delta ds,$$

Or

$$\sum m\,\delta v\, ds = \sum mv\,\delta v dt = \frac{1}{2}\, dt \sum \delta\varphi,$$

mais

$$\delta\varphi = 2\sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z);$$

donc

$$\sum m\,\delta v\, ds = dt \sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z).$$

On a ensuite

$$\sum mv\delta ds = \sum m\,\frac{ds}{dt}\left(\frac{dx}{ds}\, d\delta x + \frac{dy}{ds}\, d\delta y + \frac{dz}{ds}\, d\delta z\right)$$

$$= \sum m\left(\frac{dx}{dt}\, d\delta x + \frac{dy}{dt}\, d\delta y + \frac{dz}{dt}\, d\delta z\right),$$

ou bien

$$\sum mv\,\delta ds = \sum md\left(\frac{dx}{dt}\,\delta x + \frac{dy}{dt}\,\delta y + \frac{dz}{dt}\,\delta z\right)$$

$$-\sum m\left(\delta x d\,\frac{dx}{dt} + \delta y d\,\frac{dy}{dt} + \delta z d\,\frac{dz}{dt}\right).$$

Donc on aura

$$\delta \int \sum mvds = \sum m\left(\frac{dx}{dt}\,\delta x + \frac{dy}{dt}\,\delta y + \frac{dz}{dt}\,\delta z\right)$$

$$+ \int dt \sum \left[\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right].$$

Mais les deux points extrêmes étant fixes et donnés, δx, δy, δz, ..., sont nulles aux deux limites. Donc on a bien

$$\delta \int \sum mv\,ds = 0,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Quand les points mobiles ne sont soumis à aucune force, on a

$$\sum mv^2 = c,$$

et par suite

$$\int_{t_0}^{t} mv^2\,dt = c\,(t - t_0),$$

et comme l'intégrale $\int mv^2\,dt = \int mv\,ds$ est un minimum, il en résulte que $t - t_0$ ou le temps du trajet est aussi un minimum.

CINQUANTIÈME LEÇON[1].

PROPRIÉTÉS DU MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE. APPLICATIONS.

Mouvement d'un solide considéré géométriquement. — Mouvement d'un solide qui se déplace parallèlement à un plan. — Bielles et manivelles. — Mouvement autour d'un point fixe. — Somme des forces vives. — Moments des quantités de mouvement. — Déplacement d'une figure sphérique, joint universel. — Composition des rotations et des translations. — Mouvement le plus général d'un solide.

MOUVEMENT D'UN SOLIDE CONSIDÉRÉ GÉOMÉTRIQUEMENT.

642. Les mouvements de translation et de rotation autour d'un axe fixe, considérés au point de vue géométrique, présentent à l'esprit une image simple et très nette. Il est difficile au contraire de se rendre un compte exact de la nature des autres mouvements que peut prendre un solide de forme invariable; mais, grâce aux travaux d'Euler et de Poinsot, nous verrons que ces mouvements se ramènent toujours à des translations et à des rotations ou à des combinaisons de ces deux mouvements simples.

Pour définir un mouvement de translation, il suffit de donner une droite qui représente la vitesse avec laquelle il s'effectue; pour définir une rotation, on peut donner sur l'axe autour duquel elle a lieu une longueur proportionnelle à la vitesse angulaire et prise dans un sens tel que l'observateur, ayant ses pieds à l'origine de cette longueur et sa tête à l'extrémité, voie la rotation s'effectuer

---

(1) La rédaction de cette Leçon a été modifiée par M. A. de Saint-Germain, professeur à la Faculté de Caen.

de gauche à droite ; la ligne ainsi définie est l'axe représentatif de la rotation.

Considérons un corps solide S en mouvement. Sa position à un instant quelconque peut être déterminée par celle de trois droites rectangulaires O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1 qui lui sont liées invariablement ; il suffirait de connaître les angles que ces trois droites font avec trois axes rectangulaires fixes, Ox, Oy, Oz, et les coordonnées α, β, γ de leur point de concours O_1.

MOUVEMENT D'UN SOLIDE QUI SE DÉPLACE PARALLÈLEMENT A UN PLAN.

643. Supposons d'abord que les trajectoires de tous les points du corps S soient contenues dans des plans parallèles à un plan donné qui sera le plan des xy ; nous pourrons prendre pour O_1x_1 et O_1y_1 deux droites de S qui se trouvent à un certain moment dans le plan des xy et qui n'en sortiront pas ; la coordonnée γ sera toujours nulle, et la direction des droites mobiles sera déterminée par l'angle φ de O_1x_1 avec Ox. Soient, à l'époque t, x, y, z les coordonnées d'un point M de S, x_1, y_1, z_1 ses coordonnées invariables relativement à O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1 ; on a

$$\begin{aligned} x &= \alpha + x_1 \cos\varphi - y_1 \sin\varphi, \\ y &= \beta + x_1 \sin\varphi + y_1 \cos\varphi, \\ z &= z_1. \end{aligned}$$

Les projections de la vitesse du point M sur les axes fixes seront

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{d\alpha}{dt} - (x_1 \sin\varphi + y_1 \cos\varphi)\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} - (y - \beta)\frac{d\varphi}{dt}, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{d\beta}{dt} + (x_1 \cos\varphi - y_1 \sin\varphi)\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\beta}{dt} + (x - \alpha)\frac{d\varphi}{dt}, \\ \frac{dz}{dt} &= 0. \end{aligned} \right.$$

Si l'on pose

$$\frac{d\alpha}{dt}+\beta\frac{d\varphi}{dt}=\beta'\frac{d\varphi}{dt},\quad \frac{d\beta}{dt}-\alpha\frac{d\varphi}{dt}=-\alpha'\frac{d\varphi}{dt},$$

les projections de la vitesse prendront la forme

$$(2)\quad \frac{dx}{dt}=-(y-\beta')\frac{d\varphi}{dt},\quad \frac{dy}{dt}=(x-\alpha')\frac{d\varphi}{dt},\quad \frac{dz}{dt}=0.$$

Ces formules montrent qu'à l'époque t la vitesse du point quelconque M est la même que si S tournait avec la vitesse angulaire $\frac{d\varphi}{dt}$ autour d'une droite IK perpendiculaire au plan donné et représentée par les équations $x=\alpha', y=\beta'$. Comme α' et β' varient avec le temps, les vitesses à l'époque $t+dt$ seront les mêmes que si S tournait autour d'une droite I'K' très voisine de IK; le mouvement de S revient à une rotation autour de IK, mais seulement pendant un élément de temps, et pourvu qu'on n'ait égard qu'aux vitesses, non aux accélérations; IK, I'K' sont des axes instantanés de rotation.

644. Les droites de l'espace autour desquelles le solide tourne successivement forment un cylindre C; de même les droites de S qui doivent tour à tour coïncider avec les premières et être momentanément immobiles sont sur un cylindre C_1 qui fait partie de S. Soit I_1K_1 la droite qu'une rotation infiniment petite autour de IK doit amener en coïncidence avec I'K'; les droites I'K' et I_1K_1 sont à une distance infiniment petite du deuxième ordre et les bandes IKI'K', IKI_1K_1 sont superposables; donc C_1 est toujours tangent à C et roule sur lui sans glisser, et l'on donnerait à S le mouvement fini qu'il possède réellement en le supposant lié à un cylindre qui roule sur un cylindre fixe.

Pour obtenir l'équation de C, il suffit d'exprimer que

c'est le lieu des points de l'espace avec lesquels coïncident des points de S dont la vitesse est nulle à un certain moment; en nous reportant aux équations (1) (643), on voit qu'on aura à éliminer t entre les équations

$$\frac{d\alpha}{dt} - (y-\beta)\frac{d\varphi}{dt} = 0, \quad \frac{d\beta}{dt} + (x-\alpha)\frac{d\varphi}{dt} = 0,$$

α, β, φ étant connus en fonction de t. L'équation de C_1 s'obtient en éliminant le temps entre les équations

$$\frac{d\alpha}{dt} - (x_1 \sin\varphi + y_1 \cos\varphi)\frac{d\varphi}{dt} = 0,$$

$$\frac{d\beta}{dt} + (x_1 \cos\varphi - y_1 \sin\varphi)\frac{d\varphi}{dt} = 0.$$

645. Le mouvement d'une figure plane qui se meut dans son plan est un cas particulier de celui que nous venons d'étudier : à une époque quelconque t la figure peut être regardée comme tournant pendant un temps infiniment petit autour d'un centre instantané de rotation I; la vitesse du point M de la figure est proportionnelle à IM et perpendiculaire sur cette droite, en sorte qu'il suffit de connaître les normales aux trajectoires de deux points pour trouver le centre instantané à leur intersection.

Soient L, L' deux positions infiniment voisines d'une ligne entraînée avec la figure mobile, E un de leurs points d'intersection; le point E, considéré comme faisant partie de L, est amené par la rotation autour de I en un point E' de L' : donc EI est normale à L', et comme à la limite E est l'un des points où L touche son enveloppe, on voit que ces points sont les pieds des normales abaissées du centre instantané sur la position correspondante de l'enveloppée.

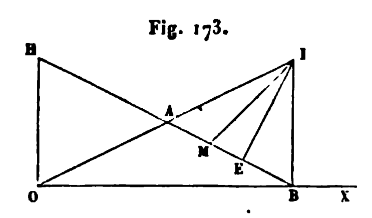
Le mouvement continu de la figure mobile s'obtient

en la supposant liée à une courbe C_1 qui roule sur une courbe fixe C; c'est toujours un mouvement épicycloïdal. Les équations de C et C_1 se trouvent comme celles des cylindres de même nom (644), ou par des considérations particulières.

BIELLES ET MANIVELLES.

646. Considérons (*fig.* 173) une manivelle OA tournant autour du point O et articulée en A à l'extrémité d'une bielle AB dont l'autre extrémité est assujettie à se mouvoir sur une droite OX, et cherchons, dans la disposition actuelle du mécanisme, quel est le rapport de la vitesse v du point B à la vitesse angulaire ω de la manivelle.

Fig. 173.



Nous déterminerons le centre instantané de rotation de la bielle; or le point A décrit un cercle dont la normale est OA; le centre instantané se trouve donc sur cette droite; il est aussi sur la perpendiculaire BI à OX, c'est-à-dire sur la normale à la trajectoire du point B; il est donc à l'intersection I des deux normales. Les vitesses de A et de B sont dans le rapport de IA à IB; la vitesse du point A est $\omega \times \text{OA}$; donc

$$\frac{v}{\omega \times \text{OA}} = \frac{\text{IB}}{\text{IA}}, \quad v = \omega \frac{\text{OA} \times \text{IB}}{\text{IA}};$$

si l'on mène en O une parallèle à BI jusqu'à sa rencontre en H avec AB prolongée, on aura aussi $v = \omega \times \text{OH}$.

La normale à la trajectoire du point M pris sur AB est MI.

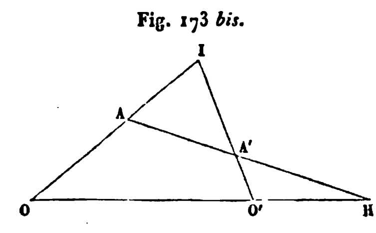
Les lieux des centres instantanés dans l'espace et par

rapport à AB sont compliqués dans le cas général ; mais supposons maintenant OA = AB ; on voit aisément que AI est aussi égal à AB ; donc OI = 2 AB, et le lieu C des centres instantanés dans le plan est un cercle de centre O et de rayon égal à 2 AB ; au contraire, le lieu C_1 des points liés à AB qui sont tour à tour immobiles est un cercle dont le centre est A et le rayon AB ; ce cercle roule à l'intérieur du premier, et s'il entraîne AB, il lui communiquera le mouvement que cette droite possède réellement.

La droite AB touche son enveloppe au pied E de la perpendiculaire menée par I, et on trouve que le point E est sur une circonférence du rayon $\frac{1}{2}$ AB qui roule dans la circonférence C.

647. Cherchons aussi le rapport des vitesses angulaires ω, ω′ de deux manivelles OA, O′A′ (*fig.* 173 *bis*) articulées à une bielle rectiligne AA′. Le centre instantané de rotation de la bielle est à l'intersection I des normales OA, O′A′ aux trajectoires de A et de A′, et les vitesses de ces deux points sont dans le rapport de AI à A′I ; donc

Fig. 173 *bis*.



$$\frac{\omega \times OA}{\omega' \times O'A'} = \frac{AI}{A'I}, \quad \frac{\omega}{\omega'} = \frac{O'A' \times AI}{OA \times A'I}.$$

Soit H le point d'intersection de AA′ prolongée avec la ligne des centres ; le théorème des transversales appliqué au triangle IOO′ donne

$$AI \times OH \times O'A' = A'I \times O'H \times OA;$$

on conclut de cette relation et de la précédente que le rapport de ω à ω' est le même que celui de O'H à OH, et aussi que celui des distances des centres O' et O à la bielle.

MOUVEMENT AUTOUR D'UN POINT FIXE.

648. Nous allons maintenant analyser les mouvements élémentaires et continus d'un corps S dont un point est absolument fixe; nous prendrons ce point pour origine des axes Ox, Oy, Oz, et aussi des lignes de repère Ox_1, Oy_1, Oz_1. Les coordonnées du point quelconque M de S sont liées à ses coordonnées relatives aux axes mobiles par des relations de forme connue :

$$x = a\,x_1 + b\,y_1 + c\,z_1,$$
$$y = a'\,x_1 + b'\,y_1 + c'\,z_1,$$
$$z = a''x_1 + b''y_1 + c''z_1;$$

les neuf cosinus a, b, c, ... sont des fonctions connues du temps.

A l'époque t, la vitesse v du point M a pour projections sur les axes fixes

$$\frac{dx}{dt} = x_1\frac{da}{dt} + y_1\frac{db}{dt} + z_1\frac{dc}{dt},$$
$$\frac{dy}{dt} = x_1\frac{da'}{dt} + \ldots, \qquad \frac{dz}{dt} = x_1\frac{da''}{dt} + \ldots;$$

mais on ne peut voir immédiatement à l'aide de ces expressions comment varie la vitesse aux divers points de S. On aura des résultats plus avantageux en cherchant les projections de v sur Ox_1, Oy_1, Oz_1; ces projections ne sont pas égales à $\frac{dx_1}{dt}$, $\frac{dy_1}{dt}$, $\frac{dz_1}{dt}$, quantités essentiellement nulles; nous les désignerons par u_1, v_1, w_1. La projection de v sur Ox_1 est égale à la somme des projections de ses

composantes $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$,

$$\begin{aligned} u_1 &= a\frac{dx}{dt} + a'\frac{dy}{dt} + a''\frac{dz}{dt} \\ &= \left(a\frac{da}{dt} + a'\frac{da'}{dt} + a''\frac{da''}{dt}\right)x_1 \\ &+ \left(a\frac{db}{dt} + a'\frac{db'}{dt} + a''\frac{db''}{dt}\right)y_1 \\ &+ \left(a\frac{dc}{dt} + a'\frac{dc'}{dt} + a''\frac{dc''}{dt}\right)z_1. \end{aligned}$$

Mais les cosinus a, a', a'', ... satisfont aux relations

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = b^2 + b'^2 + b''^2 = c^2 + c'^2 + c''^2 = 1,$$

d'où

$$(1) \quad a\frac{da}{dt} + a'\frac{da'}{dt} + a''\frac{da''}{dt} = b\frac{db}{dt} + \ldots = c\frac{dc}{dt} + \ldots = 0.$$

On a aussi

$$(2) \quad \begin{cases} bc + b'c' + b''c'' = 0, \\ ca + c'a' + c''a'' = 0, \\ ab + a'b' + a''b'' = 0. \end{cases}$$

On déduit de la première relation

$$c\frac{db}{dt} + c'\frac{db'}{dt} + c''\frac{db''}{dt} = -b\frac{dc}{dt} - b'\frac{dc'}{dt} - b''\frac{dc''}{dt};$$

les deux membres sont égaux à une fonction connue du temps, que je représente par p; je désigne de même par q et r les fonctions analogues provenant de la différentiation des deux autres équations (2); ainsi

$$(3) \quad \begin{cases} c\frac{db}{dt} + c'\frac{db'}{dt} + c''\frac{db''}{dt} = -b\frac{dc}{dt} - b'\frac{dc'}{dt} - b''\frac{dc''}{dt} = p, \\ a\frac{dc}{dt} + a'\frac{dc'}{dt} + a''\frac{dc''}{dt} = -c\frac{da}{dt} - c'\frac{da'}{dt} - c''\frac{da''}{dt} = q, \\ b\frac{da}{dt} + b'\frac{da'}{dt} + b''\frac{da''}{dt} = -a\frac{db}{dt} - a'\frac{db'}{dt} - a''\frac{db''}{dt} = r. \end{cases}$$

En vertu de ces formules et des relations (1) on trouve $u_1 = qz_1 - ry_1$, et les deux autres projections ont des valeurs analogues ; donc

$$(4) \quad u_1 = qz_1 - ry_1, \quad v_1 = rx_1 - pz_1, \quad w_1 = py_1 - qx_1.$$

649. On reconnaît d'abord que les points pour lesquels on a

$$(5) \qquad \frac{x_1}{p} = \frac{y_1}{q} = \frac{z_1}{r}$$

ont, à l'époque t, une vitesse nulle ; ils sont sur une droite OI qui joue le rôle d'axe instantané de rotation ; le mouvement élémentaire de S revient toujours à une rotation dont nous allons déterminer la vitesse angulaire ω. Soit ρ la distance du point M à la droite OI ; on doit avoir $v = \rho\omega$; d'autre part,

$$v^2 = u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 = (qz_1 - ry_1)^2 + (rx_1 - pz_1)^2 + (py_1 - qx_1)^2 ;$$

le second membre, on le démontre en Géométrie analytique, n'est autre que ρ^2 multiplié par $p^2 + q^2 + r^2$; donc

$$\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}.$$

Ajoutons que si l'on prend sur OI une longueur OK égale à ω, et dont les projections sur Ox_1, Oy_1, Oz_1 sont p, q, r, cette droite sera l'axe représentatif de la rotation instantanée ; car si, au lieu de Ox_1, Oy_1, Oz_1, on prenait dans S trois axes Ox'_1, Oy'_1, Oz'_1 dont le dernier coïncide avec OI à l'époque t, on aurait, au lieu de p, q, r, $p' = 0$, $q' = 0$, $r' = \omega$, puisque p', q', r' seraient les nouvelles projections de OK ; les formules (4) deviendraient

$$u'_1 = -\omega y'_1, \quad v'_1 = \omega x'_1, \quad w'_1 = 0 ;$$

ce sont bien les projections de la vitesse due à une rotation qui s'effectue par rapport à OK de gauche à droite.

650. On reproduirait le mouvement continu de S si on supposait ce corps lié invariablement à un cône C_1, lieu des droites du solide qui deviennent successivement immobiles, et si ce cône roulait sans glisser sur le cône C lieu des axes instantanés dans l'espace. L'équation de C_1 s'obtiendra en éliminant le temps entre les équations (5), celle de C en éliminant la même variable entre les équations correspondantes

$$\frac{ax + a'y + a''z}{p} = \frac{bx + b'y + b''z}{q} = \frac{cx + c'y + c''z}{r}.$$

Quand l'axe instantané ne change pas de position dans S, il ne se déplace pas davantage dans l'espace; en effet, puisque ce sont toujours les mêmes points de S qui sont en repos, le mouvement n'est qu'une rotation autour d'un axe fixe. Ainsi l'axe de rotation de la Terre change de direction dans l'espace, ce qui constitue le phénomène de la précession des équinoxes; il doit aussi se déplacer à l'intérieur de la Terre, et le pôle n'est pas absolument fixe à la surface du globe; mais on démontre qu'il décrit un cercle de $0^{m},28$ de rayon seulement

En général, on a

$$\cos IOx = \frac{ap + bq + cr}{\omega},$$

$$\cos IOy = \frac{a'p + b'q + c'r}{\omega},$$

$$\cos IOz = \frac{a''p + b''q + c''r}{\omega};$$

ces fractions sont constantes quand $\frac{p}{\omega}$, $\frac{q}{\omega}$, $\frac{r}{\omega}$ le sont elles-mêmes.

651. Si, à l'époque t, Ox_1, Oy_1, Oz_1 coïncident avec Ox, Oy, Oz, a, b', c'' sont égaux à l'unité, les six autres cosinus à zéro; les relations (1) et (3), 648,

prennent une forme simple qui sera utilisée plus tard :

$$\frac{da}{dt} = \frac{db'}{dt} = \frac{dc''}{dt} = 0,$$

$$\frac{db''}{dt} = -\frac{dc'}{dt} = p, \quad \frac{dc}{dt} = -\frac{da''}{dt} = q, \quad \frac{da'}{dt} = -\frac{db}{dt} = r.$$

Les valeurs de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ deviennent identiques à celles de u_1, v_1, w_1,

$$\frac{dx}{dt} = qz - ry, \quad \frac{dy}{dt} = rx - pz, \quad \frac{dz}{dt} = py - qx.$$

En général, lorsque l'axe d'une rotation ω fait avec des axes coordonnés les angles λ, μ, ν, les composantes suivant ces axes de la vitesse d'un point (x, y, z) sont

$$\omega(z\cos\mu - y\cos\nu), \quad \omega(x\cos\nu - z\cos\lambda), \quad \omega(y\cos\lambda - x\cos\mu).$$

SOMME DES FORCES VIVES.

652. La somme des forces vives de tous les points du corps est

$$\sum mv^2 = \sum m[(qz_1 - ry_1)^2 + (rx_1 - pz_1)^2 + (py_1 - qx_1)^2].$$

Si Ox_1, Oy_1, Oz_1 sont les axes principaux d'inertie relatifs au point O, et A, B, C les moments d'inertie autour de ces axes,

$$(1) \qquad \sum mv^2 = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2,$$

D'un autre côté (649),

$$(2) \qquad \sum mv^2 = \omega^2 \sum m\rho^2.$$

Or $\sum m\rho^2$ est le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe instantané; on a donc, en désignant par 2Δ le

diamètre correspondant de l'ellipsoïde central,

$$(3) \qquad \sum mv^2 = \frac{\omega^2}{\Delta^2},$$

c'est-à-dire que la somme des forces vives est égale au carré de la vitesse angulaire divisé par le carré du demi-diamètre de l'ellipsoïde central qui coïncide avec l'axe instantané.

MOMENTS DES QUANTITÉS DE MOUVEMENT.

653. Prenons les moments par rapport aux axes Ox_1, Oy_1, Oz_1 de la quantité de mouvement mv du point m, comme si c'était une force (qu'on remplacerait, dans la théorie des couples, par une force égale et parallèle appliquée à l'origine et un couple).

Le moment de mv par rapport à Ox_1 est

$$m(w_1 y_1 - v_1 z_1),$$

ou

$$m y_1 (p y_1 - q x_1) - m z_1 (r x_1 - p z_1).$$

La somme des moments des quantités de mouvement de tous les points du corps par rapport à Ox_1 est donc

$$p \sum m(y_1^2 + z_1^2) - q \sum m x_1 y_1 - r \sum m x_1 z_1.$$

Cette somme se réduit à Ap, en supposant que les axes Ox_1, Oy_1, Oz_1 soient les axes d'inertie principaux du corps pour le point O. Ainsi, en nommant A, B, C les trois moments d'inertie principaux du corps pour le point O, Ap, Bq, Cr sont les sommes des moments des quantités de mouvement des points du corps par rapport aux axes principaux.

Dans la théorie des couples, ces moments sont ceux de trois couples agissant dans les trois plans coordonnés x_1Oy_1, ... Ils donnent un couple résultant dont le moment

$G = \sqrt{A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2}$: la perpendiculaire à son plan fait avec les axes Ox_1, Oy_1, Oz_1 des angles qui ont pour cosinus $\frac{Ap}{G}, \frac{Bq}{G}, \frac{Cr}{G}$. M. Poinsot a remarqué que ce plan est le plan diamétral conjugué au diamètre de l'ellipsoïde central

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$

qui est dirigé suivant l'axe instantané.

En effet, soient x', y', z' les coordonnées par rapport aux axes Ox_1, Oy_1, Oz_1 du point N où l'axe instantané rencontre l'ellipsoïde central : on a

$$\frac{x'}{p} = \frac{y'}{q} = \frac{z'}{r},$$

et aussi, puisque le point N est sur l'ellipsoïde,

$$Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 = 1.$$

Le plan tangent en ce point N a pour équation

$$Ax'x + By'y + Cz'z = 1;$$

le plan diamétral conjugué à ON a pour équation

$$Ax'x + By'y + Cz'z = 0,$$

ou

$$Apx + Bqy + Crz = 0.$$

La perpendiculaire à ce plan diamétral fait avec les axes Ox_1, Oy_1, Oz_1 des angles dont les cosinus sont $\frac{Ap}{G}, \frac{Bq}{G}, \frac{Cr}{G}$. Donc ce plan est celui du couple résultant.

654. Si l'on prend des axes fixes quelconques, on aura la somme des moments des quantités de mouvement par rapport à l'axe Ox d'après les lois connues de la composition des moments ou des couples, en multipliant les moments Ap, Bq, Cr relatifs aux axes Ox_1, Oy_1, Oz_1

par les cosinus a, b, c des angles que Ox fait avec ces axes et ajoutant, c'est-à-dire que

$$(1)\quad \begin{cases} \sum m\left(y\dfrac{dz}{dt} - z\dfrac{dy}{dt}\right) = \mathrm{A}pa + \mathrm{B}qb + \mathrm{C}rc, \\ \sum m\left(z\dfrac{dx}{dt} - x\dfrac{dz}{dt}\right) = \mathrm{A}pa' + \mathrm{B}qb' + \mathrm{C}rc', \\ \sum m\left(x\dfrac{dy}{dt} - y\dfrac{dx}{dt}\right) = \mathrm{A}pa'' + \mathrm{B}qb'' + \mathrm{C}rc''. \end{cases}$$

MOUVEMENT D'UNE FIGURE SPHÉRIQUE. JOINT UNIVERSEL.

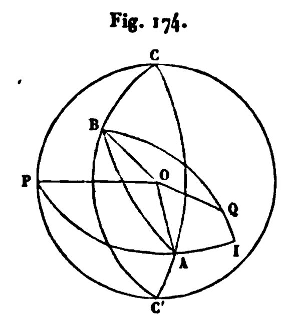
653. Une figure sphérique qui se meut sur sa sphère peut être regardée comme liée au centre, c'est-à-dire à un point fixe; tout mouvement élémentaire de la figure est une rotation autour d'un diamètre de la sphère, ou autour d'une de ses extrémités I qu'on appelle pôle instantané; les vitesses des divers points M sont normales aux arcs de grand cercle MI, et proportionnelles aux sinus de ces arcs. Tout mouvement continu est un mouvement épicycloïdal sphérique.

Pour transmettre le mouvement de rotation d'un arbre à un autre arbre qui coupe le premier sous un angle obtus, on emploie souvent le joint universel ou joint de Cardan. Au lieu de prolonger les arbres jusqu'à leur point de rencontre O, on les termine par des fourchettes demi-circulaires et égales, APA', BQB', dont les diamètres AA', BB' se coupent en O; un croisillon AA'BB', à bras égaux, est articulé à la fourchette P en A et A', à la fourchette Q en B et B'; le mouvement de P entraîne celui du croisillon dont le centre est fixe, et le croisillon entraîne l'arbre Q. Cherchons le rapport des vitesses angulaires ω, ω' des deux arbres.

Si du point O comme centre on décrit une sphère dont le rayon soit égal à un des bras du croisillon, que je

prends pour unité, les points A et B (*fig.* 174) se meuvent sur des arcs de grand cercle CAC′, CBC′ dont les pôles sont P et Q; menons l'arc de grand cercle AB, qui est égal à un quadrant. Le pôle instantané autour duquel tourne AB est à l'intersection I des arcs PA, QB normaux aux trajectoires de A et de B. Les vitesses de A et B mesurent les vitesses angulaires ω, ω′, et nous avons

Fig. 174.



$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{\sin IA}{\sin IB} = \frac{\sin IBA}{\sin IAB}.$$

Dans le triangle sphérique ABC, on a

$$A = IAB - \frac{\pi}{2}, \quad B = IBA + \frac{\pi}{2},$$

$$\sin B = \sin b \sin C,$$

$$\cos B = -\sqrt{1 - \sin^2 B}, \quad \cos A = \frac{-\cos C}{\cos B};$$

donc

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{-\cos B}{\cos A} = \frac{1 - \sin^2 B \sin^2 C}{\cos C}.$$

Ce rapport reste compris entre $\cos C$ et $\frac{1}{\cos C}$ et s'éloigne très peu de l'unité si l'angle des axes est voisin de 180 degrés.

COMPOSITION DES TRANSLATIONS ET DES ROTATIONS.

656. Lorsqu'un solide est animé de plusieurs mouvements simultanés, suivant une expression adoptée en Géométrie, la vitesse d'un de ses points est la résultante des vitesses dues à chacun des mouvements donnés, et

sa projection sur un axe est la somme des projections des vitesses composantes. Nous allons chercher à remplacer les mouvements simultanés par un mouvement résultant.

Il est évident que le mouvement résultant de plusieurs translations est une translation dont la vitesse est la résultante des vitesses des translations données.

Supposons le solide animé de deux rotations; l'axe représentatif de l'une étant égal à p et dirigé suivant l'axe des z, l'axe de la seconde égal à q et dirigé suivant la droite $x = \alpha$, $y = 0$ parallèle à Oz. Reportons-nous aux formules (2), **643**, et ajoutons les projections des vitesses dues aux rotations composantes, nous trouvons pour la vitesse résultante

$$\frac{dx}{dt} = -py - qy = -(p+q)y,$$

$$\frac{dy}{dt} = px + q(x-\alpha) = (p+q)\left(x - \frac{q\alpha}{p+q}\right),$$

$$\frac{dz}{dt} = 0.$$

Le mouvement résultant est une rotation dont l'axe représentatif se déduit des axes des rotations composantes comme la résultante se déduit de deux forces parallèles; si p et q ne sont pas de même signe, c'est que les rotations ne se font pas dans le même sens, mais l'identité avec la composition des forces parallèles et de sens contraire subsiste. Le cas correspondant aux couples est celui de $q = -p$; alors les projections de la vitesse deviennent

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = p\alpha, \quad \frac{dz}{dt} = 0:$$

un couple de rotation est équivalent à une translation dont la vitesse, égale au moment du couple, est perpendiculaire à son plan.

Soit un corps animé de plusieurs rotations dont les axes concourent à l'origine et ont respectivement pour projections sur les axes coordonnés p, q, r, p', q', ...; la vitesse du point (x, y, z) a pour projections (651)

$$\frac{dx}{dt} = z\sum q - y\sum r,$$
$$\frac{dy}{dt} = x\sum r - z\sum p,$$
$$\frac{dz}{dt} = y\sum p - x\sum q.$$

Le mouvement résultant est donc une rotation dont l'axe représentatif a pour projection la somme des projections des axes des rotations données; c'est dire qu'il se déduit des axes donnés comme la résultante se déduit de forces concourantes. En particulier, trois rotations dont les axes concourent ont pour résultante une rotation dont l'axe est la diagonale du parallélipipède construit sur les axes proposés : inversement, une rotation peut toujours être remplacée par trois rotations simultanées.

657. La position des droites Ox_1, Oy_1, Oz_1 (648) est définie par neuf cosinus entre lesquels existent six relations; ces cosinus peuvent donc s'exprimer en fonction de trois variables indépendantes. Soient OL l'intersection du plan x_1Oy_1 avec xOy, ψ l'angle xOL, φ l'angle LOx_1, θ l'angle des plans Oxy, Ox_1y_1; a, b, c ne sont autres que les projections suivant Ox_1, Oy_1, Oz_1 d'une droite égale à l'unité et comptée sur Ox; or la projection de cette droite sur un axe est égale à la somme des projections de deux droites, l'une égale à $\cos\psi$ suivant OL, l'autre égale à $-\sin\psi$ suivant une droite du plan xOy faisant avec Ox l'angle $\psi + \frac{\pi}{2}$; on trouve

aisément les formules très générales

$$a = \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\cos\theta\sin\varphi,$$
$$b = -\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\theta\cos\varphi.$$
$$c = \sin\psi\sin\theta.$$

Si on remplace Ox par Oy, ou ψ par $\psi - \frac{\pi}{2}$, on trouve

$$a' = \sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\cos\theta\sin\varphi,$$
$$b' = -\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\theta\cos\varphi.$$
$$c' = -\cos\psi\sin\theta;$$

enfin, en projetant une longueur égale à l'unité prise sur Oz,

(1) $$a'' = \sin\theta\sin\varphi,\quad b'' = \sin\theta\cos\varphi,\quad c'' = \cos\theta.$$

658. On pourrait calculer p, q, r en substituant dans les formules (3) du n° 648 les cosinus et leurs dérivées; mais la rotation ω peut être regardée comme résultant de trois autres dont les axes seraient $\frac{d\psi}{dt}$ suivant Oz, $\frac{d\theta}{dt}$ suivant OL, $\frac{d\varphi}{dt}$ suivant Oz_1; p, q, r sont les projections de ω sur Ox_1, Oy_1, Oz_1, ou, ce qui revient au même, les sommes des projections des axes composants, et l'on a immédiatement

(1) $$\left\{\begin{aligned} p &= \sin\varphi\sin\theta\frac{d\psi}{dt} + \cos\varphi\frac{d\theta}{dt}, \\ q &= \cos\varphi\sin\theta\frac{d\psi}{dt} - \sin\varphi\frac{d\theta}{dt}, \\ r &= \frac{d\varphi}{dt} + \cos\theta\frac{d\psi}{dt}. \end{aligned}\right.$$

De ces équations on peut tirer

(2) $$\left\{\begin{aligned} &\frac{d\theta}{dt} = p\cos\varphi - q\sin\varphi,\quad \sin\theta\frac{d\psi}{dt} = p\sin\varphi + q\cos\varphi, \\ &\frac{d\varphi}{dt} = r - (p\sin\varphi + q\cos\varphi)\cot\theta. \end{aligned}\right.$$

MOUVEMENT LE PLUS GÉNÉRAL D'UN SOLIDE.

659. Considérons enfin un solide S animé d'un mouvement quelconque. Par un point O_1, pris à volonté dans S, je mène trois droites qui restent parallèles aux axes fixes; le mouvement relatif de S par rapport à ces parallèles est celui d'un solide qui aurait un point immobile en O_1, c'est-à-dire que, pendant un temps infiniment petit, il se réduit à une rotation autour d'une droite $O_1 I$; donc le mouvement élémentaire de S résulte d'une translation dont la vitesse est celle de O_1 et d'une rotation autour d'un axe passant par ce point. L'axe représentatif de la rotation a toujours la même grandeur et la même direction; mais sa position, ainsi que la vitesse de la translation, change avec le point O_1.

Mozzi trouva une représentation plus précise du mouvement considéré. Supposons qu'à l'époque t l'origine des axes fixes coïncide avec O_1, et l'axe des z avec $O_1 I$; soient l, m, n les composantes de la vitesse du point O_1; la vitesse d'un point (x, y, z) résulte de la translation correspondante et d'une rotation ω autour de Oz; ses composantes sont donc

$$l - \omega y = -\omega\left(y - \frac{l}{\omega}\right), \quad \omega\left(x + \frac{m}{\omega}\right), \quad n.$$

Le solide se meut comme s'il tournait avec une vitesse angulaire ω autour d'une parallèle à Oz, en même temps qu'il glisserait avec la vitesse n le long de cette droite; ce double mouvement est celui d'une vis dans son écrou, ou un mouvement hélicoïdal.

CINQUANTE ET UNIÈME LEÇON.

ROTATION D'UN CORPS SOLIDE AUTOUR D'UN POINT FIXE (SUITE). — MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE LIBRE.

Équations du mouvement. — Cas où il n'y a pas de forces motrices. — Plan invariable. — Mouvement de l'ellipsoïde central. — Lieu des axes instantanés dans le corps. — Lieu des axes des couples résultants. — Mouvement d'un corps solide entièrement libre.

ÉQUATIONS DU MOUVEMENT.

660. Supposons maintenant que des forces motrices données agissent sur le corps solide. Désignons par X, Y, Z les composantes parallèles à des axes fixes de la force appliquée à la molécule m qui a pour coordonnées x, y, z. D'après le principe de d'Alembert, les forces perdues $X - m\frac{d^2x}{dt}$, ... doivent se faire équilibre autour du point fixe O : il faut et il suffit pour cela que la somme de leurs moments, par rapport à chacun des axes fixes, soit égale à zéro, ce qui donne les trois équations

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \mathrm{L},\\ &\sum m\left(z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2}\right) = \mathrm{M},\\ &\sum m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = \mathrm{N},\end{aligned}\right.$$

en désignant par L, M, N les sommes de moments des forces motrices par rapport aux axes fixes. La première des équations peut s'écrire ainsi :

$$\frac{d}{dt}\sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = \mathrm{L}.$$

Mais on a trouvé plus haut (654)

$$\sum m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dr}{dt}\right)=\mathrm{A}pa+\mathrm{B}qb+\mathrm{C}rc.$$

Donc on a

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{A}pa+\mathrm{B}qb+\mathrm{C}rc)=\mathrm{L},$$

ou

$$(2)\quad \mathrm{A}a\frac{dp}{dt}+\mathrm{B}b\frac{dq}{dt}+\mathrm{C}c\frac{dr}{dt}+\mathrm{A}p\frac{da}{dt}+\mathrm{B}q\frac{db}{dt}+\mathrm{C}r\frac{dc}{dt}=\mathrm{L}.$$

Faisons coïncider les axes fixes avec les axes principaux du corps Ox_1, Oy_1, Oz_1, pris dans la position qu'ils occupent au bout du temps t. Nous aurons alors

$$a=1,\quad b=0,\quad c=0,\quad \frac{da}{dt}=0,\quad \frac{db}{dt}=-r,\quad \frac{dc}{dt}=q;$$

en même temps il faut remplacer L ou $\sum m(\mathrm{Z}y-\mathrm{Y}z)$ par la somme des moments des forces données par rapport à l'axe Ox_1, que nous désignerons par L_1.

L'équation (2) devient

$$(3)\qquad \mathrm{A}\frac{dp}{dt}+(\mathrm{C}-\mathrm{B})qr=\mathrm{L}_1,$$

et les deux autres équations (1) donnent de même

$$(4)\qquad \mathrm{B}\frac{dq}{dt}+(\mathrm{A}-\mathrm{C})pr=\mathrm{M}_1,$$

$$(5)\qquad \mathrm{C}\frac{dr}{dt}+(\mathrm{B}-\mathrm{A})pq=\mathrm{N}_1.$$

Ce sont les formules d'Euler : L_1, M_1, N_1, désignent les moments des forces motrices par rapport aux axes principaux du corps à l'époque t.

661. On les obtient encore de la manière suivante.

D'après la composition des moments ou des couples

analogue à celle des forces, la somme Ap des moments des quantités de mouvement par rapport à l'axe Ox_1 est égale à la somme des moments par rapport aux axes fixes multipliés par les cosinus a, a', a'' des angles que Ox_1 fait avec ces axes fixes. Ainsi l'on a

$$Ap = a\sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dl}\right) + a'\sum m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) + a''\sum m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right),$$

et, en différentiant,

$$A\frac{dp}{dt} = a\sum m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) + a'\sum m\left(z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dl^2}\right) + a''\sum m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) + \frac{da}{dt}\sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) + \frac{da'}{dt}\sum m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) + \frac{da''}{dt}\sum m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right),$$

ou d'après les équations (1)

$$A\frac{dp}{dt} = aL + a'M + a''N + \frac{da}{dt}\sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) + \frac{da'}{dt}\sum m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) + \frac{da''}{dt}\sum m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right).$$

Si l'on fait coïncider les axes fixes avec les axes Ox_1, Oy_1, Oz_1, au bout du temps t, cette équation deviendra

$$A\frac{dp}{di} = L_1 + rBq - qCr,$$

ou

$$A\frac{dp}{dt} + (C - B)qr = L_1,$$

car, dans cette coïncidence, on a

$$a = 1,\quad a' = 0,\quad a'' = 0,\quad \frac{da}{dt} = 0,\quad \frac{da'}{dt} = r,\quad \frac{da''}{dt} = -q.$$

L devient L_1 et les sommes des moments des quantités de mouvement

$$\sum m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right),\ldots$$

deviennent celles qui se rapportent aux axes Ox_1, Oy_1, Oz_1, c'est-à-dire Ap, Bq, Cr (653).

CAS OU IL N'Y A PAS DE FORCES MOTRICES.

662. On intègre facilement les équations d'Euler quand il n'y a pas de forces motrices ou qu'elles se font équilibre autour du point fixe. On a

$$(1)\qquad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt}+(C-B)qr=0,\\ B\dfrac{dq}{dt}+(A-C)pr=0,\\ C\dfrac{dr}{dt}+(B-A)pq=0.\end{cases}$$

Multipliant par p, q, r et ajoutant

$$Ap\,dp+Bq\,dq+Cr\,dr=0,$$

d'où

$$(2)\qquad Ap^2+Bq^2+Cr^2=h,$$

h désignant une quantité positive, puisque A, B, C sont positives. Cette équation s'obtiendrait encore en exprimant que la force vive est constante, d'après le principe général sur le mouvement des systèmes où il n'y a pas de forces motrices.

663. Multiplions les équations (1) par Ap, Bq, Cr, ajoutons et intégrons. On aura

$$(3)\qquad A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2=G^2.$$

G étant le moment du couple résultant, on en conclut que ce moment est constant.

Ces deux équations donnent

$$(4)\quad \begin{cases} p^2 = \dfrac{G^2 - Bh + (B - C)Cr^2}{A(A - B)}, \\ q^2 = \dfrac{G^2 - Ah + (A - C)Cr^2}{B(B - A)}. \end{cases}$$

En substituant les valeurs de p et de q dans l'équation

$$C\frac{dr}{dt} + (B - A)pq = 0,$$

on en tire

$$(5)\quad dt = \frac{\pm C\sqrt{AB}\,dr}{\sqrt{[G^2 - Bh + (B - C)Cr][Ah - G^2 + (C - A)Cr^2]}},$$

équation dont l'intégrale dépend des fonctions elliptiques, mais qu'on peut obtenir sous forme finie si deux des moments d'inertie A, B, C sont égaux ou si G^2 est égal à l'une des quantités Ah, Bh, Ch.

664. Calculons la vitesse angulaire ω. On a

$$\omega^2 = p^2 + q^2 + r^2,$$

d'où

$$\omega d\omega = pdp + qdq + rdr = \left(\frac{B - C}{A} + \frac{C - A}{B} + \frac{A - B}{C}\right) pqr\,dt,$$

ou bien

$$(6)\qquad \omega d\omega = \frac{(A - B)(A - C)(B - C)}{ABC} pqr\,dt.$$

Les trois équations

$$p^2 + q^2 + r^2 = \omega^2,$$
$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h,$$
$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = G^2,$$

donnent

$$(7)\quad \begin{cases} p = \sqrt{\dfrac{G^2 - (B + C)h + BC\omega^2}{(A - B)(A - C)}}, \\ q = \sqrt{\dfrac{G^2 - (A + C)h + AC\omega^2}{(B - A)(B - C)}}, \\ r = \sqrt{\dfrac{G^2 - (A + B)h + AB\omega^2}{(C - A)(C - B)}}. \end{cases}$$

Substituant dans l'équation (6), il vient

$$(8)\quad dt = \frac{ABC\omega d\omega}{\sqrt{(B+C)h - G^2 - BC\omega^2}\sqrt{(A+C)h - G^2 - AC\omega^2}\sqrt{(A+B)h - G^2 - AB\omega^2}},$$

équation compliquée, dont l'intégrale donnerait ω en fonction de t.

PLAN INVARIABLE.

665. L'équation (3) exprime que le couple résultant des quantités de mouvement a un moment constant; le plan de ce couple doit être invariable, et par conséquent les couples situés dans les plans fixes sont constants. C'est ce qu'on peut vérifier. En effet, on doit avoir

$$\sum m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = \text{constante},$$

et deux équations semblables, ou (654)

$$\begin{aligned} Apa'' + Bqb'' + Crc'' &= l'', \\ Apa' + Bqb' + Crc' &= l', \\ Apa + Bqb + Crc &= l. \end{aligned}$$

Ces trois équations peuvent se déduire des équations (1), n° 662, en les multipliant par a, b, c, a', b', c',... et intégrant. Elles ne sont pas distinctes, car en ajoutant leurs carrés on trouve

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 \quad \text{ou} \quad G^2 = l^2 + l'^2 + l''^2.$$

666. La perpendiculaire au plan du couple résultant des quantités de mouvement est fixe dans l'espace, car elle fait avec les axes fixes des angles dont les cosinus sont $\frac{l}{G}$, $\frac{l'}{G}$, $\frac{l''}{G}$. Elle fait avec les axes des x_1, y_1, z_1 des angles dont les cosinus sont $\frac{Ap}{G}$, $\frac{Bq}{G}$, $\frac{Cr}{G}$, et l'on connaît alors la position de ces axes par les valeurs de p, q, r.

667. L'axe instantané OI fait avec les axes Ox_1, Oy_1,

Oz_1 des angles dont les cosinus sont $\frac{p}{\omega}, \frac{q}{\omega}, \frac{r}{q}$. Donc

$$\cos(\mathrm{IO}, \mathrm{G}) = \frac{\mathrm{A}p}{\mathrm{G}}\frac{p}{\omega} + \frac{\mathrm{B}q}{\mathrm{G}}\frac{q}{\omega} + \frac{\mathrm{C}r}{\mathrm{G}}\frac{r}{\omega} \quad .$$

ou

$$\omega\cos(\mathrm{IO}, \mathrm{G}) = \frac{\mathrm{A}p^2 + \mathrm{B}q^2 + \mathrm{C}r^2}{\mathrm{G}} = \frac{h}{\mathrm{G}},$$

quantité constante qui représente la composante de la vitesse angulaire autour de l'axe fixe du couple résultant des quantités de mouvement.

668. Le plan du couple résultant G étant invariable, prenons-le pour plan des xy. On aura

$$\cos(\mathrm{G}, \mathrm{O}x_1) = \cos z\mathrm{O}x_1 = a'' = \frac{\mathrm{A}p}{\mathrm{G}},$$

$$\cos(\mathrm{G}, \mathrm{O}y_1) = \cos z\mathrm{O}y_1 = b'' = \frac{\mathrm{B}q}{\mathrm{G}},$$

$$\cos(\mathrm{G}, \mathrm{O}z_1) = \cos z\mathrm{O}z_1 = c'' = \frac{\mathrm{C}r}{\mathrm{G}};$$

d'où [formules (1) du n° 657]

$$\sin\theta\sin\varphi = \frac{\mathrm{A}p}{\mathrm{G}}, \quad \sin\theta\cos\varphi = \frac{\mathrm{B}q}{\mathrm{G}}, \quad \cos\theta = \frac{\mathrm{C}r}{\mathrm{G}}.$$

Ces formules s'accordent entre elles, car en ajoutant leurs carrés on a

$$1 = \frac{\mathrm{A}^2p^2 + \mathrm{B}^2q^2 + \mathrm{C}^2r^2}{\mathrm{G}};$$

la troisième donne la valeur de θ. Des deux premières on tire

$$\tang\varphi = \frac{\mathrm{A}p}{\mathrm{B}q}.$$

Si l'on élimine $d\theta$ entre les équations (1) du n° 658, on aura

$$\sin^2\theta\, d\psi = \sin\theta\sin\varphi\, p\, dt + \sin\theta\cos\varphi\, q\, dt,$$

d'où

$$d\psi = -\frac{Ap^2 + Bq^2}{G^2 - C^2r^2} G\,dt,$$

ou

$$d\psi = -\frac{h - Cr^2}{G^2 - C^2r^2} G\,dt,$$

puis on remplace dt par sa valeur en fonction de r. Comme $h - Cr^2$ et $G^2 - C^2r^2$ sont positives, $\frac{d\psi}{dt}$ sera toujours négative, c'est-à-dire que OL tourne toujours dans le même sens.

Le choix du plan invariable réduit les constantes arbitraires à quatre, savoir h, C et les deux constantes introduites par l'intégration de dt et de $d\psi$. Il y aurait bien six constantes, puisqu'il y a six variables p, q, r, ψ, φ, θ. Mais deux sont nulles, $l = 0$, $l' = 0$.

669. L'axe instantané de rotation est le diamètre conjugué au plan du couple résultant des quantités de mouvement dans l'ellipsoïde central (653).

La somme des forces vives est $Ap^2 + Bq^2 + Cr^2$ ou h. D'un autre côté, elle est égale à $\omega^2 \sum m\rho^2 = \frac{\omega^2}{\Delta^2}$, Δ étant le demi-diamètre ON de l'ellipsoïde central qui coïncide avec l'axe instantané. Donc

$$\frac{\omega^2}{\Delta^2} = h,$$

ou

$$\omega = \Delta\sqrt{h},$$

c'est-à-dire que la *vitesse angulaire* est proportionnelle au demi-diamètre qui va du centre au pôle instantané de rotation.

MOUVEMENT DE L'ELLIPSOÏDE CENTRAL.

670. Le plan tangent à l'ellipsoïde central au pôle instantané a pour équation, par rapport aux axes Ox_1, Oy_1, Oz_1,

$$Ax'x + By'y + Cz'z = 1,$$

ou

$$Apx + Bqy + Crz = \frac{\omega}{\Delta}.$$

La longueur de la perpendiculaire abaissée de l'origine O sur ce plan tangent est

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{A^2x'^2 + B^2y'^2 + C^2z'^2}} = \frac{1}{\frac{\Delta}{\omega}\sqrt{A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2}}$$
$$= \frac{\omega}{G\Delta} = \frac{\sqrt{h}}{G},$$

quantité constante. Donc le plan tangent à l'ellipsoïde central au pôle de rotation est fixe dans l'espace. C'est un plan parallèle à celui des quantités de mouvement.

L'ellipsoïde, dont le centre est fixe, roule sans glisser sur ce plan fixe, et la vitesse angulaire de rotation est proportionnelle au rayon qui va du centre au pôle instantané sur la surface de l'ellipsoïde.

Il ne fait que *rouler sans glisser*; car, comme son mouvement consiste à tourner pendant un instant sur le diamètre, l'ellipsoïde amène au bout de cet instant un nouveau point de sa surface en contact avec ce plan, et ce nouveau point, qui devient le pôle de la rotation pour l'instant suivant, reste à son tour immobile pendant cet instant, et ainsi de suite, de sorte qu'aucun de ces points par lesquels l'ellipsoïde vient se mettre en contact avec le plan, ne peut jamais glisser sur ce même plan.

La courbe décrite sur la surface de l'ellipsoïde par le pôle instantané de rotation (x', y', z') est appelée *poloïde*.

LIEU DES AXES INSTANTANÉS DANS LE CORPS.

671. On a

$$\frac{x'}{p} = \frac{y'}{q} = \frac{z'}{r} = \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} = \frac{\sqrt{Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2}}{\sqrt{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2}}$$
$$= \frac{\sqrt{A^2x'^2 + B^2y'^2 + C^2z'^2}}{\sqrt{A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2}},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\sqrt{Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2}}{\sqrt{h}} = \frac{\sqrt{A^2x'^2 + B^2y'^2 + C^2z'^2}}{G},$$

d'où

$$A(G^2 - Ah)x'^2 + B(G^2 - Bh)y'^2 + C(G^2 - Ch)z'^2 = 0,$$

cône du deuxième degré, qui est le lieu des axes instantanés dans le corps.

Ce cône se réduit à un plan ou devient imaginaire quand G^2 est égal à l'un des produits Ah, Bh, Ch. Il devient un cône droit à base circulaire quand deux des coefficients du cône sont égaux.

LIEU DES AXES DU COUPLE RÉSULTANT.

672. L'axe du couple résultant G des quantités de mouvement étant immobile, traverse le corps en mouvement suivant une suite de droites qui forment un autre cône.

On a, pour un point quelconque pris sur cet axe OG, à une distance δ,

$$x'' = \frac{Ap}{G}\delta, \quad y'' = \frac{Bq}{G}\delta, \quad z'' = \frac{Cr}{G}\delta.$$

Substituant les valeurs de Ap, Bq, Cr, dans les équations (2) et (3) (662, 663), il vient

$$\frac{x''^2}{A}+\frac{y''^2}{B}+\frac{z''^2}{C}=\frac{h\delta^2}{G^2},$$

$$x''^2+y''^2+z''^2=\delta^2,$$

d'où

$$\frac{G^2-Ah}{A}x''^2+\frac{G^2-Bh}{B}y''^2+\frac{G^2-Ch}{C}z''^2=0:$$

c'est l'équation du cône décrit dans le corps par l'axe fixe OG.

673. Pour que ce cône et le précédent ne soient pas imaginaires, il faut que les quantités G^2-Ah, G^2-Bh, G^2-Ch ne soient pas toutes trois de même signe. Donc, en supposant $A>B>C$, il faut que l'on ait

$$G^2-Ah<0,\quad G^2-Ch>0.$$

Selon que la quantité G^2-Bh sera négative ou positive, ces deux cônes seront coupés suivant des ellipses par tout plan perpendiculaire à l'axe du plus petit moment d'inertie ou du plus grand. Donc, pendant toute la durée du mouvement, l'axe instantané ne s'écartera de l'un de ces deux axes principaux que de quantités limitées, et le même axe principal ne s'écartera que de quantités limitées de l'axe fixe OG du couple des quantités de mouvement. Si l'on a $A=B=C$, les deux équations donnent p, q, r constants. Alors le mouvement de rotation est uniforme autour de l'axe OG fixe.

674. Les axes principaux relatifs au point O sont les seuls qui puissent rester immobiles avec un mouvement de rotation uniforme. Car pour que l'axe instantané conserve toujours la même position, il faut que p, q, r soient

constants. On a donc

$$dp = 0, \quad dq = 0, \quad dr = 0,$$

ce qui donne

$$(B - A)pq = 0, \quad (C - B)qr = 0, \quad (A - C)pr = 0,$$

d'où

$$p = 0, \quad q = 0, \quad r = n.$$

MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE ENTIÈREMENT LIBRE.

675. Le mouvement d'un corps solide libre, sollicité par des forces données, sera connu quand on pourra déterminer le mouvement absolu d'un de ses points et le mouvement relatif de tout autre point du corps autour de celui-là. Si G est le point particulier du corps dont on considère le mouvement absolu, il faudra concevoir qu'il emporte avec lui, dans son mouvement, trois axes Gx, Gy, Gz, constamment parallèles à eux-mêmes, par rapport auxquels on cherchera le mouvement de chaque point M du corps. Si l'on a seulement pour but de décomposer le mouvement du point M en d'autres plus simples et plus faciles à concevoir, on pourra, comme cela a été dit, choisir à volonté le point dont on considère le mouvement de translation. Mais, dans l'application, il est avantageux de prendre le centre de gravité. En effet, d'après le principe de la conservation du mouvement du centre de gravité, il suffit de connaître les forces motrices du système et sa masse, pour déterminer le mouvement de ce point, et de plus, quand ce corps est mis en mouvement par des percussions, il suffit, pour déterminer la vitesse initiale du centre de gravité, d'y transporter les quantités de mouvement qui mesurent les percussions et de les composer comme des forces : la résultante est la quantité de mouvement initiale du centre de gravité.

Enfin, un autre avantage consiste en ce que, *sous l'action des forces motrices le mouvement de rotation autour du centre de gravité est le même que si ce point était fixe.* C'est ce que nous allons prouver.

676. Soient ξ, η, ζ les coordonnées du point M par rapport aux axes mobiles Gx, Gy, Gz et désignons par X, Y, Z les composantes de la force motrice appliquée en ce point. On a, d'après le principe des aires,

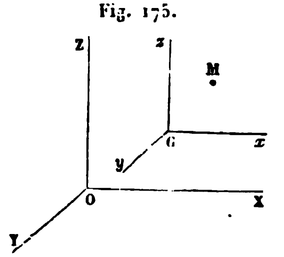
$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum m\left(\xi\frac{d^2\eta}{dt^2}-\eta\frac{d^2\xi}{dt^2}\right)=\sum(Y\xi-X\eta),\\ &\sum m\left(\zeta\frac{d^2\xi}{dt^2}-\xi\frac{d^2\zeta}{dt^2}\right)=\sum(X\zeta-Z\xi),\\ &\sum m\left(\eta\frac{d^2\zeta}{dt^2}-\zeta\frac{d^2\eta}{dt^2}\right)=\sum(Z\eta-Y\zeta).\end{aligned}\right.$$

Or on aurait précisément les mêmes équations si le centre de gravité était fixe. Par conséquent, si ces équations suffisent pour déterminer le mouvement, il doit être le même pour le corps dont le centre de gravité serait fixe et pour le même corps dont le centre de gravité serait mobile.

Soient en effet GA, GB, GC trois axes rectangulaires fixes dans le corps qui tourne autour du point G, et mobiles avec lui. Quand les trois angles φ, θ, ψ, définis au nº 657, seront connus pour une époque quelconque, on connaîtra évidemment la position des trois axes GA, GB, GC et par suite celle d'un point quelconque du solide. Or on peut exprimer les coordonnées ξ, η, ζ du point M en fonction de celles du même point par rapport à GA, GB, GC, lesquelles restent constantes dans le mouvement, et des angles φ, θ, ψ. Donc, en substituant les valeurs de ξ, η, ζ en fonction de φ, θ, ψ dans les équations (1), celles-ci déterminent les valeurs de φ, ψ, θ, en fonction du temps. Ainsi le système (1) suffit pour déterminer le mouvement relatif, et l'on voit qu'il est le même, par rapport au centre de gravité, que si ce point était fixe.

677. Nous allons donner une démonstration synthétique de cette proposition. Désignons par φ la force accélératrice du centre de gravité G, force qui a pour composantes parallèles aux axes fixes $\frac{d^2x_1}{dt^2}$, $\frac{d^2y_1}{dt^2}$, $\frac{d^2z_1}{dt^2}$, x_1, y_1, z_1 étant les coordonnées du point G par rapport à trois axes fixes OX, OY, OZ. La résultante de toutes les forces motrices des points du corps transportées au centre de gravité G, parallèlement à elles-mêmes, est $M\varphi$, M étant la masse du corps (600). Or, pour avoir le mouvement relatif du point M par rapport au point G, il suffit de considérer ce dernier point comme fixe et de soumettre à chaque instant le point M à l'action simultanée de sa force effective Q et d'une autre force égale à $m\varphi$, parallèle à la force accélératrice φ du point G, mais agissant en sens contraire. Or les forces telles que $m\varphi$ étant parallèles entre elles et proportionnelles aux masses des molécules, se composent en une seule $M\varphi$ qui passe par le centre de gravité et se trouve détruite continuellement, puisque c'est autour du point G rendu fixe que le corps tourne actuellement. Il reste alors, comme forces propres à faire mouvoir le solide, les forces effectives, qui, d'après le principe de d'Alembert, peuvent être remplacées par les forces motrices données P, P′, P″,..., puisque les unes comme les autres font à chaque instant équilibre aux forces effectives prises en sens contraire. Il suit de là que le corps tourne autour du centre de gravité comme si ce point était fixe, en supposant le corps soumis dans les deux cas aux mêmes forces motrices, sans en ajouter de nouvelles.

Fig. 175.



678. On n'arriverait pas à la même conclusion si l'on considérait le mouvement relatif autour d'un point

quelconque C, autre que le centre de gravité. φ étant alors la force accélératrice du point C, toutes les forces parallèles et de sens contraire, telles que $m\varphi$, qu'il faudrait appliquer aux autres points, pour avoir le mouvement relatif autour du point C supposé fixe, se composeront en une seule $M\varphi$ appliquée au point G, en sorte qu'il faudrait joindre cette résultante aux forces motrices données pour avoir le mouvement relatif autour du point C. En général les forces X, Y, Z dépendent des coordonnées x, y, z ou de la position des points matériels, en sorte que le mouvement du centre de gravité et celui des parties du corps autour de ce centre dépendent l'un de l'autre. Mais quand les forces X, Y, Z, comme la pesanteur, ne dépendent pas de la position du mobile, on peut déterminer séparément le mouvement du centre de gravité et celui du système.

MOUVEMENT D'UN ELLIPSOÏDE.

679. Prenons pour exemple un ellipsoïde pesant. Supposons que ce corps reçoive une impulsion dirigée dans le plan d'une de ses sections principales AGB. Après cette percussion initiale il n'y a de forces motrices que les poids des molécules qu'il faut transporter parallèlement au centre de gravité pour avoir le mouvement de ce point. Il se meut donc comme un point pesant dans le vide et décrit dans l'espace une parabole.

La vitesse initiale v_1 du centre de gravité a une direction parallèle à celle de la percussion, et quant à sa grandeur, en appelant μv la quantité de mouvement qui mesure la percussion et M la masse de l'ellipsoïde, on a

$$Mv_1 = \mu v, \quad \text{d'où} \quad v_1 = \frac{\mu v}{M}.$$

680. Déterminons maintenant le mouvement de rotation autour du centre de gravité. Les poids des molé-

cules du corps, se réduisant à une force unique appliquée au centre de gravité, n'auront aucune influence sur le mouvement de rotation autour de ce point, qui sera dû uniquement à la percussion initiale et sera le même que si le centre de gravité était fixe. Or la percussion agissant dans le plan AGB perpendiculaire à l'axe GC, qui est un des trois axes d'inertie principaux relatifs au point G, le corps devra tourner indéfiniment autour de l'axe GC comme s'il était fixe, et son mouvement sera uniforme. Si l'on appelle ω la vitesse de rotation autour de GC et f la distance de la percussion à cet axe, on aura

$$\omega = \frac{\mu v f}{\sum mr^2},$$

$\sum mr^2$ étant le moment d'inertie du corps par rapport à GA. En appelant $2a$, $2b$, $2c$ les axes de l'ellipsoïde, on a

$$\sum mr^2 = \frac{M(a^2+b^2)}{5},$$

ainsi

$$\omega = \frac{5\mu v f}{M(a^2+b^2)}.$$

On peut encore écrire, en remplaçant μv par Mv_1,

$$\omega = \frac{5fv_1}{a^2+b^2},$$

formule qui fait connaître le rapport de la vitesse angulaire à la vitesse initiale du centre de gravité.

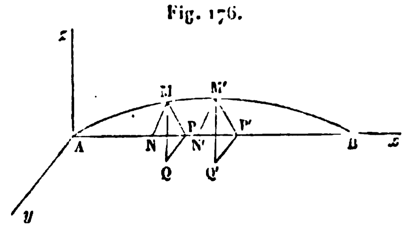
CINQUANTE-DEUXIÈME LEÇON.

MOUVEMENT D'UNE CORDE VIBRANTE.

Équations générales du mouvement. — Cas des petites vibrations. — Vibrations transversales. — Vibrations longitudinales.

681. Soit une corde homogène parfaitement flexible, élastique et un peu extensible, d'une épaisseur constante et très-petite, tendue suivant sa longueur par une force équivalente à un poids donné ϖ et attachée par ses extrémités aux points fixes A et B. On néglige son poids par rapport à ϖ, et par conséquent elle forme une ligne droite ANB dans son état d'équilibre. Supposons qu'on l'écarte un peu de la position d'équilibre ANB et qu'en même temps on imprime à tous ces points de petites vitesses. Alors elle vibrera autour de la droite AB, et il s'agit de déterminer la position et la vitesse de chacun de ses points à un instant quelconque.

Fig. 176.



Soit AMB la courbe plane ou à double courbure que forme la corde à une époque quelconque. Prenons trois axes rectangulaires Ax, Ay, Az : un point quelconque qui se trouve d'abord en N sur la droite AB viendra, au bout du temps t, occuper une autre position M voisine de la première. Posons

$$AN = x, \quad AP = x + u, \quad PQ = y, \quad MQ = z.$$

Les coordonnées du point qui est en N dans la position d'équilibre sont x, o, o et dans le mouvement, $x+u$, y, z. Ces déplacements des points de la corde étant très-petits, u, y, z ont toujours des valeurs très-petites qui sont fonctions du temps t et de x, et la question consiste à trouver leurs expressions en fonction de ces deux variables indépendantes.

Désignons par ds la longueur de la portion de corde infiniment petite MM' qui correspond à l'élément $NN' = dx$ dans l'état de repos. On établit une relation très-simple entre ds et dx, en exprimant que NN' et MM' ont la même masse. Soit ε le produit de la section normale de la corde par sa densité au point M, dans la position AMB. εds est la masse de MM' et celle de NN' est $\frac{p}{gl}dx$, en désignant par p le poids de la corde et par l sa longueur primitive AB. On a donc

$$(1)\qquad \varepsilon ds = \frac{p}{gl}dx.$$

Appliquons maintenant le principe de d'Alembert. Les composantes de la force accélératrice du point M sont

$$\frac{d^2(x+u)}{dt^2},\quad \frac{d^2y}{dt^2},\quad \frac{d^2z}{dt^2},\quad \text{ou}\quad \frac{d^2u}{dt^2},\quad \frac{d^2y}{dt^2},\quad \frac{d^2z}{dt^2},$$

puisque x est indépendante du temps t. Si nous appelons X, Y, Z les composantes de la force accélératrice du point M, ou de la force motrice rapportée à l'unité de masse, celle de la force perdue pour l'élément εds sont

$$\left(X - \frac{d^2u}{dt^2}\right)\varepsilon ds,\quad \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right)\varepsilon ds,\quad \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right)\varepsilon ds.$$

Ces forces devant à chaque instant se faire équilibre, on a, d'après les formules qui expriment les conditions d'équilibre d'un fil soumis à l'action de forces quelconques (405) et en appelant T la tension au point M

(c'est-à-dire l'action des deux parties AM et MB),

$$d\left[T\frac{d(x+u)}{ds}\right]+\left(X-\frac{d^2u}{dt^2}\right)\varepsilon ds=0,$$
$$d\left(T\frac{dy}{ds}\right)+\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)\varepsilon ds=0,$$
$$d\left(T\frac{dz}{ds}\right)+\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)\varepsilon ds=0.$$

Si l'on néglige les forces X, Y, Z, ainsi que la pesanteur, ces équations deviennent, en remplaçant εds par $\frac{p}{gl}dx$,

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} d\left[T\frac{d(x+u)}{ds}\right]&=\frac{p}{gl}\frac{d^2u}{dt^2}dx,\\ d\left(T\frac{dy}{ds}\right)&=\frac{p}{gl}\frac{d^2y}{dt^2}dx,\\ d\left(T\frac{dz}{ds}\right)&=\frac{p}{gl}\frac{d^2z}{dt^2}dx.\end{aligned}\right.$$

CAS DES PETITES VIBRATIONS.

682. Les équations (2) sont réductibles à la forme linéaire et intégrables quand on suppose les vibrations très-petites. La longueur de NN' étant dx dans la position d'équilibre, elle est devenue ds quand cet élément occupe la position MM' : sa tension est ϖ dans le premier cas et T dans le second. Or l'expérience montre que l'allongement d'un fil homogène et d'une épaisseur constante est proportionnel à l'accroissement de tension, quand cet accroissement est faible, et sa longueur primitive. Donc q étant un coefficient constant pour la même corde, on a

$$(1)\qquad T-\varpi=q\frac{ds-dx}{dx}.$$

Comme la corde n'exécute que des vibrations très-petites et que les tangentes à la courbe AMB font des

angles très-petits avec la droite AB, les quantités $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ sont à peu près nulles, et l'équation

$$1 = \left(\frac{dx + du}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2$$

donne alors

$$ds = dx + du.$$

La formule (1) devient donc

$$(2) \qquad T - \varpi = q\frac{du}{dx}.$$

On remarquera d'ailleurs que l'allongement $ds - dx$ ou du qu'a éprouvé la partie dx du fil est une petite fraction de dx, de sorte que le rapport $\frac{du}{dx}$ est toujours très-petit. Donc $\frac{dx}{ds}$ comme $\frac{d(x+u)}{d}$ diffère très-peu de l'unité et, dans la première des équations (2) du n° 681, $dT\frac{d(x+u)}{ds}$ peut être remplacé par dT, puis par $d.q\frac{du}{dx}$, à cause de l'équation (2).

Cette équation devient donc, en posant, pour abréger, la quantité constante $\frac{glq}{p} = \alpha^2$,

$$(3) \qquad \frac{d^2 u}{dt^2} = \alpha^2 \frac{d^2 u}{dx^2}.$$

683. Pour le mieux voir, on peut écrire la première équation (2) du n° 681 ainsi :

$$\frac{dT}{dx}\left(\frac{dx + du}{ds}\right) + T\frac{d\frac{dx+du}{ds}}{dx} = \frac{p}{gl}\frac{d^2 u}{dt^2}.$$

Or $\frac{dx + du}{ds}$ diffère très-peu de l'unité et $\frac{d\frac{dx+du}{ds}}{dx}$ est

négligeable, car en différentiant l'équation

$$\left(\frac{dx+du}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1,$$

on a

$$\frac{dx+du}{ds}\,\frac{d\dfrac{dx+du}{ds}}{dx}+\frac{dy}{ds}\,\frac{d\dfrac{dy}{ds}}{dx}+\frac{dz}{ds}\,\frac{d\dfrac{dz}{ds}}{dx}=0,$$

ce qui donne $\dfrac{d\dfrac{dx+du}{ds}}{ds}$ du même ordre de petitesse que $\dfrac{dy}{ds}$ et $\dfrac{dz}{ds}$.

684. On transformera d'une manière analogue les deux autres équations (2). On a

$$\frac{dy}{ds}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{ds}=\frac{dy}{dx},$$

car $\dfrac{dx}{ds}$ est sensiblement égal à l'unité. Ainsi on peut prendre $T\dfrac{dy}{dx}$ au lieu de $T\dfrac{dy}{ds}$ ou $\left(\varpi+q\dfrac{du}{dx}\right)\dfrac{dy}{dx}$, ou enfin $\varpi\dfrac{dy}{dx}$ en négligeant $\dfrac{du}{dx}\dfrac{dy}{dx}$, ce qui est permis, parce que $\dfrac{du}{dx}$ et $\dfrac{dy}{dx}$ sont petits. On a donc

$$d\left(T\frac{dy}{ds}\right)=\varpi d\frac{dy}{dx},$$

et la seconde équation du système (2) devient, en faisant, pour abréger, $\dfrac{gl\varpi}{p}=a^2$,

$$\frac{d^2y}{dt^2}=a^2\frac{d^2u}{dx^2}.$$

La troisième équation se réduit de même, en sorte

qu'on a les trois équations

$$(4) \quad \frac{d^2 u}{dt^2} = a^2 \frac{d^2 u}{dx^2}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = a^2 \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = a^2 \frac{d^2 z}{dx^2},$$

pour déterminer u, y et z en fonction de x et de t. Les variables u, y, z étant séparées dans ces équations, on en conclut que les mouvements des points de la corde parallèlement aux axes seront indépendants et coexisteront sans s'influencer mutuellement. Pour une valeur arbitraire de x la première équation, par exemple, donnant une valeur de u en fonction du temps, les deux autres sont satisfaites en supposant y et z nulles; alors chaque point de la corde a un mouvement vibratoire sur l'axe AB dont il ne s'écarte pas.

685. Les vibrations qui se font suivant AB sont dites longitudinales et celles qui sont parallèles à Ay et Az sont appelées transversales. Ces dernières seraient les mêmes parallèlement à Ay et Az si les valeurs initiales de z et de $\frac{dz}{dt}$ étaient les mêmes que celles de y et de $\frac{dy}{dt}$. D'ailleurs les équations (4) étant de même forme, il suffit d'intégrer une d'elles.

VIBRATIONS TRANSVERSALES.

686. L'équation

$$(1) \qquad \frac{d^2 y}{dt^2} = a^2 \frac{d^2 y}{dx^2}$$

a pour intégrale générale

$$(2) \qquad y = \varphi(x + at) + \psi(x - at),$$

φ et ψ étant deux fonctions arbitraires qu'il s'agit de déterminer. Pour cela il faut connaître à l'origine du temps la courbe formée par la corde et la composante de la vitesse de chaque point parallèle à l'axe des y.

Soit donc pour $t = 0$,

$$(3)\qquad y = f(x),\quad \frac{dy}{dx} = f_1(x).$$

Introduisant cette hypothèse dans l'équation précédente et dans sa dérivée par rapport à t, on aura

$$(4)\qquad f(x) = \varphi(x) + \psi(x),$$

$$(5)\qquad f_1(x) = a[\varphi'(x) - \psi'(x)].$$

De cette dernière on tire

$$\varphi'(x) - \psi'(x) = \frac{f_1(x)}{a}.$$

Intégrant cette équation par rapport à x et posant, pour abréger,

$$(6)\qquad \frac{1}{a}\int f_1(x)\,dx = \mathrm{F}(x),$$

il vient

$$(7)\qquad \varphi(x) - \psi(x) = \mathrm{F}(x) + \mathrm{C}.$$

Des équations (4) et (7) on déduit

$$(8)\qquad \begin{cases} \varphi(x) = \frac{1}{2}[f(x) + \mathrm{F}(x) + \mathrm{C}], \\ \psi(x) = \frac{1}{2}[f(x) - \mathrm{F}(x) + \mathrm{C}]. \end{cases}$$

Substituant $x + at$ à x dans $\varphi(x)$ et $x - at$ dans $\psi(x)$, puis faisant la somme des deux fonctions, on aura la valeur de y, où C n'entrera pas.

687. Mais il faut remarquer que par les deux dernières équations les fonctions φ et ψ ne sont connues, comme $f(x)$ et $\mathrm{F}(x)$, que pour des valeurs de la variable x comprises entre zéro et l; or on a besoin de les connaître au delà de ces limites, car x devant être remplacée par $x + at$ et $x - at$, ces nouvelles variables pourront

dépasser les valeurs zéro et l, puisque le temps t peut croître indéfiniment. Pour déterminer les fonctions φ et ψ au delà de ces limites, nous allons exprimer que les points A et B sont immobiles.

Pour le point A on aura, quel que soit t,

$$\varphi(at) + \psi(-at) = 0.$$

Posant $at = \zeta$, cette condition devient

$$(9) \qquad \varphi(\zeta) + \psi(-\zeta) = 0.$$

Pour le point B on aura aussi, à un instant quelconque,

$$(10) \qquad \varphi(l + \zeta) + \psi(l - \zeta) = 0.$$

$\varphi(\zeta)$ et $\psi(\zeta)$ sont connues pour les valeurs de ζ comprises entre zéro et l.

La dernière condition donne

$$\varphi(l + \zeta) = -\psi(l - \zeta).$$

$\psi(l - \zeta)$ est connue pour les valeurs de ζ comprises entre zéro et l, puisque $l - \zeta$ se trouve alors comprise entre les mêmes limites. Donc $\varphi(l + \zeta)$ sera aussi connue pour les mêmes valeurs de ζ. Par conséquent, si l'on pose

$$l + \zeta = \zeta',$$

$\varphi(\zeta')$ sera connue pour les valeurs de ζ' comprises entre l et $2l$. Mais cette fonction étant déjà connue pour les valeurs de ζ' entre zéro et l, le sera donc pour toutes celles comprises entre zéro et $2l$.

688. Si dans la condition (9) on remplace ζ par $l + \zeta$, elle devient

$$\varphi(2l + \zeta) + \psi(-\zeta) = 0.$$

Mais

$$\varphi(\zeta) + \psi(-\zeta) = 0;$$

donc

$$\varphi(2l-\zeta)=\varphi(\zeta).$$

Donc la fonction $\varphi(\zeta)$ est périodique et a pour période $2l$, et comme on connaît cette fonction pour toutes les valeurs de la variable comprises entre zéro et $2l$, elle sera donc connue pour toutes les valeurs de ζ positives ou négatives.

689. L'autre fonction ψ est donnée par l'équation

$$\psi(-\zeta)=-\varphi(\zeta);$$

elle est périodique, comme la première, et sa période est aussi $2l$. En effet, l'équation précédente donne

$$\varphi(2l+\zeta)+\psi(-2l-\zeta)=0,$$

d'où, puisque $\varphi(2l+\zeta)=\varphi(\zeta)=-\psi(\zeta)$,

$$\psi(-\zeta)=\psi(-2l-\zeta).$$

En posant $-2l-\zeta=\zeta'$, on a donc

$$\psi(2l+\zeta')=\psi(\zeta').$$

690. Il résulte de cette discussion que, lorsque at croît de $2l$ ou t de $\frac{2l}{a}$, l'ordonnée y reprend la même valeur, de même que la vitesse $\frac{dy}{dt}$. Il en est de même de z et de $\frac{dz}{dt}$. Donc la corde fait une suite de vibrations toutes égales et isochrones dont la durée est $\frac{2l}{a}$.

691. Dans le vide et en supposant les points A et B absolument fixes, la corde ferait une suite indéfinie d'oscillations de cette espèce. Mais la résistance de l'air et la communication d'une partie du mouvement de la corde à ses deux points extrêmes A et B diminuent graduellement l'amplitude des vibrations et finissent par les anéantir,

sans toutefois altérer sensiblement leur isochronisme. Ce dernier fait, analogue à ce qui a lieu dans le pendule simple, peut être démontré par un nouveau calcul, et l'expérience vient le confirmer.

692. Si l'on désigne par T la durée d'une vibration de la corde et par n le nombre des vibrations dans l'unité de temps, on a

$$T = \frac{2l}{a}, \quad n = \frac{1}{T} = \frac{a}{2l}.$$

Mais

$$a^2 = \frac{gl\varpi}{p};$$

d'où

$$n = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g\varpi}{pl}}.$$

La corde, dans son mouvement, communique ses vibrations à l'air, qui en fait alors le même nombre dans le même temps. Le son produit a pour mesure n : il est d'autant plus élevé que la corde fait un plus grand nombre de vibrations dans un temps donné. Ce nombre est indépendant de l'amplitude des vibrations et de la figure initiale de la corde ou de son mode d'ébranlement.

Pour une même corde, ce nombre est proportionnel à la racine carrée de la tension ϖ; pour des cordes d'une même matière et d'une même épaisseur, p étant proportionnel à l, les nombres de vibrations sont en raison inverse des longueurs. Enfin pour des cordes de même longueur et également tendues, n est en raison inverse des racines carrées de leurs poids. L'expérience a confirmé ces lois.

NOEUDS DE VIBRATION.

693. Il y a des cas où la corde, en raison de son état initial, se partage, pour ainsi dire, spontanément en

un certain nombre de parties égales vibrant à l'unisson et dont les points de séparation, appelés *nœuds*, restent immobiles pendant la durée du mouvement. Alors le son s'élève proportionnellement au nombre de ces parties. Nous allons en donner un exemple. Reprenons l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = a^2 \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Les dimensions et la tension de la corde étant données, on peut disposer de sa figure et de la vitesse initiale de chacun de ses points, de telle sorte que son mouvement soit représenté par une équation de la forme $y = \theta X$, θ étant une fonction de t et X une fonction de x seulement. En effet, pour que l'équation (1) soit vérifiée, il faut que l'on ait

$$(2) \qquad \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1}{a^2}\frac{1}{\theta}\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Comme le premier membre est fonction de x seulement et le second de t, l'égalité ne peut avoir lieu qu'autant que les deux membres se réduisent à une même constante $-k^2$. On aura donc

$$(3) \qquad \frac{d^2X}{dx^2} + k^2X = 0.$$

Comme on ne veut qu'une intégrale particulière, prenons

$$(4) \qquad X = \sin kx.$$

La fonction θ se déterminera ensuite par l'équation

$$(5) \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} + a^2k^2\theta = 0,$$

d'où l'on tire

$$\theta = C\cos akt + C'\sin akt,$$

et, par suite,

$$y = \sin kx (C \cos akt + C' \sin akt).$$

En faisant $t = 0$, nous aurons pour la figure initiale de la corde

$$(6) \qquad y = C \sin kx$$

et nous pouvons faire que la vitesse initiale soit nulle, en supposant nulle la constante C'. Le mouvement de la corde est alors représenté par l'équation

$$(7) \qquad y = C \sin kx \cos akt.$$

Il faut encore exprimer que les points A et B restent toujours fixes. Or pour $x = 0$, on a bien $y = 0$, quel que soit t; mais si l'on veut que $y = 0$, quel que soit t, pour $x = l$, il faut faire $kl = m\pi$, m étant un nombre entier quelconque; on en déduit $k = \frac{m\pi}{l}$, et le mouvement de la corde est représenté par l'équation

$$(8) \qquad y = C \sin \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{ma\pi t}{l}.$$

Ainsi la corde ayant, sans vitesse initiale, la forme de la courbe $y = C \sin \frac{m\pi x}{l}$, si on l'abandonne à elle-même, elle effectuera une suite indéfinie de vibrations isochrones dont la loi est donnée par l'équation (8).

694. On sait que y doit être une fonction périodique du temps. En effet, ici, y reprend la même valeur quand t croît de $\frac{1}{m}\frac{2l}{a}$. Ainsi dans cet exemple y et $\frac{dy}{dx}$ sont les mêmes quand le temps augmente de la période $\frac{1}{m}\frac{2l}{a}$, et le nombre de vibrations effectuées dans l'unité de temps sera $m\frac{a}{2l}$, c'est-à-dire m fois celui qui correspond au

son le plus grave de la corde, déterminé par la théorie générale.

695. Nous allons démontrer que dans ce cas la corde se partage spontanément en m parties égales qui vibrent comme si elles étaient séparées, de sorte qu'il y aura $m-1$ nœuds de vibrations. En effet, on obtiendra tous les points qui resteront immobiles pendant toute la durée du mouvement en posant

$$\sin\frac{m\pi x}{l}=0 \quad \text{ou} \quad x=\frac{i}{m}l,$$

i étant un nombre entier quelconque plus petit que m. On en conclut que y est nulle pour les valeurs de x

$$0,\quad \frac{l}{m},\quad \frac{2l}{m},\ldots,\quad \frac{m-1}{m}l,\quad l,$$

quel que soit t.

On pourrait, sans considérer un exemple particulier, choisir les fonctions $f(x)$ et $f_1(x)$ telles, que $\varphi(\zeta)$ et $\psi(\zeta)$ redeviennent les mêmes, non-seulement lorsque ζ croît de $2l$, mais encore lorsque cette variable croît d'un sous-multiple quelconque $\frac{2l}{m}$ de $2l$. On en conclurait comme ci-dessus l'existence de $m-1$ nœuds de vibration.

VIBRATIONS LONGITUDINALES.

696. Le mouvement longitudinal est donné par l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^2u}{dt^2}=\alpha^2\frac{d^2u}{dx^2}$$

tout à fait semblable à l'équation

$$(2) \qquad \frac{d^2y}{dt^2}=a^2\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Il en résulte que si l'on désigne par n' le nombre des vibrations longitudinales effectuées dans l'unité de temps, on a

$$(3) \qquad n' = \frac{\alpha}{2l} \quad (692),$$

et comme $\alpha = \sqrt{\frac{glq}{p}}$, il vient

$$(4) \qquad n' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{gq}{pl}}:$$

on aura donc

$$(5) \qquad \frac{n}{n'} = \sqrt{\frac{\varpi}{q}}.$$

Or $\frac{\varpi}{q}$ est une quantité très-petite. En effet, d'après l'équation

$$(6) \qquad \mathrm{T} - \varpi = q\,\frac{ds - dx}{dx},$$

q est l'accroissement de tension qu'il faudrait donner à la corde pour doubler sa longueur ou la longueur de chaque élément, puisqu'en faisant $ds = 2dx$ on aurait $\mathrm{T} = \varpi + q$. La constante q est donc beaucoup plus grande que ϖ, d'où il suit que le rapport $\frac{n}{n'}$ est très-petit : par conséquent des deux sons les plus graves rendus par une même corde, celui qui correspond aux vibrations longitudinales est de beaucoup le plus aigu.

697. On a encore la formule

$$\frac{n'}{n} = \sqrt{\frac{l}{\lambda}},$$

l étant la longueur de la corde dont la tension est ϖ et λ l'allongement ou l'augmentation de la longueur que produit un accroissement de tension égal à ϖ. C'est ce que

l'on déduit de l'équation (6) en faisant $T = 2\varpi$ et en observant que les allongements λ et $ds - dx$ des longueurs l et dx sont proportionnels à ces longueurs. On a donc

$$\frac{\varpi}{q} = \frac{\lambda}{l},$$

et comme λ est très-petit par rapport à l, on voit encore que le rapport $\frac{\varpi}{q}$ est aussi très-petit.

FIN DE LA DYNAMIQUE.

HYDROSTATIQUE

CINQUANTE-TROISIÈME LEÇON.

ÉQUILIBRE D'UNE MASSE FLUIDE.

Notions préliminaires. — Pression d'un liquide sur une paroi. — Égalité de pression en tous sens. — Équilibre d'un fluide incompressible. — Équations générales de l'équilibre d'une masse fluide.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

698. L'hydrostatique a pour objet les lois de l'équilibre des fluides. Un fluide doit être considéré comme un assemblage, en apparence continu, de molécules matérielles qui cèdent au moindre effort tendant à les séparer les unes des autres.

Les fluides que la nature nous présente approchent plus ou moins de cet état de fluidité parfaite. Il existe ordinairement entre les molécules de ces substances une certaine adhérence qu'on appelle *viscosité*. L'hypothèse d'une mobilité parfaite pourrait conduire à des résultats peu conformes à l'expérience dans le cas d'un fluide en mouvement : mais si l'on excepte quelques liquides où la viscosité est considérable, les lois de l'équilibre auxquelles nous parviendrons en supposant les molécules parfaitement mobiles et sans aucune cohésion, s'appliqueront sans erreur sensible aux fluides naturels.

699. On distingue deux sortes de fluides, les liquides et les gaz ou fluides aériformes. Les liquides ne se com-

priment que sous des pressions très-considérables et sont appelés souvent pour cette raison *fluides incompressibles*. Les *fluides aériformes*, qui se divisent en gaz permanents et en vapeurs, sont compressibles et doués, dans certaines limites, d'une grande élasticité : c'est pourquoi on les nomme aussi *fluides élastiques*.

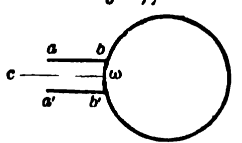
PRESSION D'UN LIQUIDE SUR UNE PAROI.

700. Quand un fluide contenu dans un vase ouvert ou fermé de toutes parts est en équilibre sous l'action de forces quelconques, il exerce une pression sur chaque portion des parois du vase qui le renferme. Cette pression peut varier d'un point à un autre. Pour la définir et la mesurer avec précision, on considère un point M de la surface du vase et une portion infiniment petite ω de cette surface comprenant ce point. Le fluide exerce sur cette petite surface ω certaines actions dont la résultante peut être représentée par $p\omega$, si l'on imagine une aire plane égale à l'unité de surface et dont tous les éléments égaux à ω supportent la même pression que ω. La quantité p est ce qu'on nomme la *pression au point* M. En d'autres termes, la pression au point M sera la limite du rapport de la pression exercée sur l'élément ω qui comprend le point M à l'aire ω, quand cette aire ω tendra vers zéro en comprenant toujours le point M.

ÉGALITÉ DE PRESSION EN TOUS SENS.

701. On admet comme un résultat de l'expérience ou comme une conséquence de la distribution uniforme des molécules des fluides, que la direction de la pression est toujours perpendiculaire à l'élément de surface ω sur lequel elle s'exerce. Ce fait se rattache à cet autre plus général : que des corps en contact n'exercent

Fig. 177.



l'un sur l'autre que des actions normales quand leurs surfaces n'ont aucune adhérence ni frottement.

Cette notion s'applique à une portion intérieure d'un fluide, car l'équilibre ne serait pas troublé si l'on supposait une portion quelconque du fluide solidifiée. On peut donc, en un point quelconque de l'intérieur, supposer une paroi plane solide, et il y aura sur chaque élément de cette surface une pression toujours perpendiculaire à son plan. Il y a égalité de pression en tous sens pour un même point, c'est-à-dire que si l'on considère une surface infiniment petite ω passant par un point M pris à volonté dans le fluide, la pression exercée par le fluide sur chaque face de l'élément ω sera toujours la même, quelle que soit la position que l'on donne à l'élément ω, en le faisant tourner autour du point M.

Pour démontrer ce principe, faisons passer par le point M deux plans quelconques; prenons sur leur intersection une longueur MN très-petite, et menons dans ces plans perpendiculairement à leur intersection les quatre droites MI, NK, MI', NK' égales à la longueur MN. Il s'agit de démontrer l'égalité des pressions p et p' rapportées à l'unité de surface que le fluide exerce sur les surfaces planes égales MIKN, MI'K'N.

Fig. 178.

La masse fluide contenue dans le prisme droit MII'NKK' sera encore en équilibre si on la suppose solidifiée. Les pressions que le fluide extérieur exerce contre les cinq faces de ce prisme, perpendiculairement à ces faces, font équilibre aux forces (analogues à la pesanteur) qui sollicitent toutes les molécules intérieures. Donc la somme de leurs composantes parallèles à un axe quelconque est nulle.

Menons par le point M un axe ML parallèle à la droite II'. Le fluide exerce sur les deux surfaces planes MIKN

et MI′K′N, que nous désignerons par ω et ω' et qui sont égales, des pressions $p\omega$ et $p'\omega'$ dont les composantes suivant l'axe ML sont $p\omega\cos\alpha$ et $p'\omega'\cos\alpha'$; α et α' désignant les angles que les normales à ces deux plans ou aux droites MI, MI′, font avec ML. Ces angles sont suppléments l'un de l'autre. Les pressions normales aux autres faces MII′, NKK′ et IKK′I′ ont leurs directions perpendiculaires à ML et par conséquent ne donnent pas de composantes suivant cette droite. Quant aux forces qui agissent sur les molécules intérieures, nous désignerons par X la somme de leurs composantes parallèles à ML.

La somme de toutes ces composantes devant être nulle, on a

$$p\omega\cos\alpha + p'\omega'\cos\alpha' + X = 0$$

ou

$$(1)\qquad (p - p')\cos\alpha + \frac{X}{\omega} = 0,$$

à cause de

$$\omega = \omega', \quad \cos\alpha = -\cos\alpha'.$$

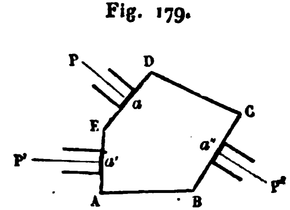
Si la longueur MN diminue indéfiniment, ω décroît comme le carré de MN et X décroît à très-peu près comme le volume du prisme ou proportionnellement au cube de MN. Donc $\frac{X}{\omega}$ tend vers zéro; d'ailleurs $\cos\alpha$ est constant. Donc p et p' tendent vers l'égalité quand les surfaces égales ω et ω' tendent vers zéro. D'ailleurs $\cos\alpha$ est constant; les valeurs de p et de p' tendent vers des limites déterminées qui, d'après l'équation, doivent être égales; de sorte qu'on a $p = p'$, quand les surfaces égales ω, ω' deviennent infiniment petites.

ÉQUILIBRE D'UN FLUIDE IMCOMPRESSIBLE.

702. Supposons un liquide incompressible contenu dans un vase polyédrique ABCDE. Plusieurs parois sont

percées d'ouvertures a, a', a'',..., sur lesquelles sont ajoutés de petits cylindres ayant leurs arêtes perpendiculaires à ces parois. Si l'on imagine des pistons qui peuvent se mouvoir dans l'intérieur de ces cylindres, les forces P, P', P'',... nécessaires pour les maintenir, quand il y a équilibre, sont égales aux pressions exercées par le liquide contre leurs bases. Nous nous proposons de vérifier, dans cet état d'équilibre, le principe des vitesses virtuelles.

Fig. 179.



Concevons que l'on fasse mouvoir simultanément tous les pistons; soient h, h', h'',..., les espaces qu'ils parcourent, ces espaces étant regardés comme positifs ou négatifs, selon que les pistons entrent dans le vase ou en sortent. Le liquide étant supposé incompressible, tous ces déplacements virtuels sont liés entre eux par l'équation

$$ah + a'h' + a''h'' + \ldots = 0.$$

Multiplions cette équation par la pression p exercée contre les parois et rapportée à l'unité de surface; en observant qu'on a

$$P = pa, \quad P' = pa', \quad P'' = pa'', \ldots,$$

il viendra

$$Ph + P'h' + P''h'' + \ldots = 0,$$

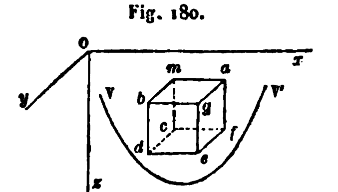
ce qui est l'équation des vitesses virtuelles dans cet exemple particulier.

On pourrait étendre ce principe au cas où il y aurait des forces motrices agissant sur les molécules du liquide, mais la démonstration est compliquée et il vaut mieux chercher directement les équations générales de l'équilibre des fluides, comme nous allons le faire.

ÉQUILIBRE D'UNE MASSE FLUIDE.

703. Soient Ox, Oy, Oz trois axes rectangulaires, ce dernier étant vertical et dirigé dans le sens de la pesanteur. Nous faisons cette hypothèse, parce que nous appliquerons nos formules principalement aux fluides pesants. En deux points infiniment voisins m (x, y, z) et e $(x + dx, y + dy, z + dz)$ construisons un parallélipipède en menant par ces deux points six plans parallèles deux à deux aux trois plans coordonnés. Soient ρ la densité du fluide au point m et P la force motrice rapportée à l'unité de masse, qui sollicite chaque molécule de ce parallélipipède infiniment petit. Si dm est la masse de celui-ci et X, Y, Z les composantes de la force P, $X\,dm$, $Y\,dm$, $Z\,dm$ seront les composantes de la force motrice. Enfin désignons par p la pression rapportée à l'unité de surface qui s'exerce au point m et qui est la même tout autour de ce point.

Fig. 180.



Si l'on suppose solidifié le fluide contenu dans le petit parallélipipède, l'équilibre ne sera pas troublé. Il faudra donc que les composantes des forces parallèles aux trois axes se détruisent entre elles. Ces forces se composent des forces motrices $X\,dm$, $Y\,dm$, $Z\,dm$ et des pressions exercées par le fluide environnant sur les six faces du parallélipipède. Considérons d'abord les pressions qui s'exercent verticalement sur les faces $mabg$ et $cdef$; elles agissent en sens contraire. La première est égale à $p\,dx\,dy$, la seconde à $\left(p + \frac{dp}{dz}\,dz\right)dx\,dy$; leur résultante parallèle à Oz est égale à $-\frac{dp}{dz}\,dx\,dy\,dz$ ou à $-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz}\,dm$. On a donc

$$-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz}\,dm + Z\,dm = 0$$

ou

$$\frac{dp}{dz} = \rho Z.$$

On aurait deux autres équations analogues à celle-là; on a donc

$$(1) \qquad \frac{dp}{dx} = \rho X, \quad \frac{dp}{dy} = \rho Y, \quad \frac{dp}{dz} = \rho Z.$$

Ainsi les dérivées partielles de la fonction p sont égales à ρX, ρY, ρZ. La différentielle totale de la pression est donc

$$(2) \qquad dp = \rho\,(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

Telle est la formule qui donne l'accroissement de pression lorsqu'on passe du point (x, y, z) au point infiniment voisin $(x + dx, y + dy, z + dz)$. Comme p doit être une fonction de x, y, z, le second membre de l'équation précédente doit être une différentielle exacte et, par conséquent, s'il y a équilibre, on a nécessairement

$$(3) \qquad \frac{d(\rho X)}{dy} = \frac{d(\rho Y)}{dx}, \quad \frac{d(\rho X)}{dz} = \frac{d(\rho Z)}{dx}, \quad \frac{d(\rho Y)}{dz} = \frac{d(\rho Z)}{dy}.$$

L'expression $\rho\,(X dx + Y dy + Z dz)$ étant alors la différentielle exacte d'une certaine fonction $f(x, y, z)$, on a

$$(4) \qquad p = f(x, y, z) + C,$$

C étant une constante qui sera déterminée quand on connaîtra la pression p_0 en un point particulier (x_0, y_0, z_0). Il faudra en outre que, si l'on imagine une courbe fermée passant par un point m (x, y, z) la fonction $f(x, y, z)$ reprenne la même valeur lorsqu'on reviendra au point m, puisqu'on doit retrouver la même pression.

701. S'il n'y a pas de force qui sollicite les molécules intérieures, la pression sera constante dans toute la masse du fluide, de sorte qu'une pression extérieure exercée sur une partie du fluide adjacente à une paroi du vase doit se transmettre avec la même intensité sur des éléments de

surface équivalents dans toute la masse et sur toutes les parois.

705. On appelle *surface de niveau* une surface dont tous les points éprouvent la même pression. La formule (4) montre qu'elles sont toutes comprises dans l'équation

$$f(x, y, z) = a,$$

a étant une constante. Si l'on fait varier cette quantité d'une manière continue, on obtient une infinité de surfaces. Une couche de niveau est la masse du fluide comprise entre deux surfaces de niveau. L'équation $f(x, y, z) = a$ montre que deux surfaces de niveau ne peuvent pas se couper.

706. La force motrice est normale à la surface de niveau en chacun de ses points. En effet, soit P cette force, on a, en tout point de cette surface,

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0,$$

d'où, en divisant par $P ds$, ds étant un petit arc tracé sur la surface,

$$\frac{X}{P}\frac{dx}{ds} + \frac{Y}{P}\frac{dy}{ds} + \frac{Z}{P}\frac{dz}{ds} = 0,$$

équation qui montre bien que la force P est perpendiculaire à tout élément de courbe tracé sur la surface et passant par le point m.

707. Si la pression est nulle ou constante en tous les points de la surface libre d'un fluide, celle-ci est une surface de niveau. Dans un liquide il peut se faire qu'il n'y ait pas de pressions extérieures. Il n'en est plus de même dans les fluides élastiques. Ils ne peuvent avoir de surface libre, ou sur laquelle la pression soit nulle, parce que la pression est liée à la densité par l'équation $p = k\rho$, k étant une constante dont la valeur dépend de la température, en sorte que pour qu'il n'y eût pas de pression dans une partie de la masse, il faudrait qu'il n'y eût pas

de matière en cet endroit : c'est ce qui explique la nécessité de maintenir les gaz dans des vases fermés de toutes parts.

708. Reprenons l'équation

$$dp = \rho(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz).$$

Supposons que $\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz$ soit la différentielle exacte d'une fonction $\varphi(x, y, z)$, ce qui arriverait, par exemple, si les forces motrices provenaient d'actions mutuelles entre les différents points de la masse fluide ou si ces forces étaient constamment dirigées vers des centres fixes. On a dans ce cas

$$(5) \qquad dp = \rho d\varphi.$$

Il résulte de là que p est une fonction de φ comme on l'a vu dans le calcul intégral ; il en est de même de ρ et par conséquent ρ est fonction de p. Donc en tous les points d'une surface de niveau la densité est constante, puisque la pression est constante.

709. Dans les fluides élastiques on peut déterminer d'une manière générale p et ρ en fonction de φ. On a, dans ce cas, $p = k\rho$; le coefficient k dépend de la température : si celle-ci est constante dans toute l'étendue de la masse, k est une quantité constante. Alors, à cause de $dp = \rho d\varphi$, on a

$$(6) \qquad \frac{dp}{p} = \frac{1}{k} d\varphi,$$

d'où, en intégrant,

$$p = \mathrm{C}e^{\frac{\varphi}{k}},$$

et ensuite

$$\rho = \frac{\mathrm{C}}{k} e^{\frac{\varphi}{k}}.$$

Si la température n'est pas la même dans toute la masse fluide, l'équation (6) fait voir que k est une fonction de φ

ainsi que p, et par conséquent la densité et la température doivent être constantes pour tous les points d'une surface de niveau, mais variable d'une surface à l'autre. On aura

$$p = Ce^{\int \frac{d\varphi}{k}}, \quad \rho = \frac{p}{k} = \frac{C}{k} e^{\int \frac{d\varphi}{k}}.$$

Considérons, par exemple, l'atmosphère qui enveloppe la terre et faisons abstraction du mouvement de rotation de celle-ci. La force motrice d'une molécule m de l'atmosphère est une force toujours dirigée vers le centre de la terre et la même à égale distance du centre. On conclut de là qu'il ne peut y avoir équilibre, si la température n'est pas la même à la même distance du centre, et que les surfaces de niveau doivent être des sphères ayant leur centre au centre de la terre, puisqu'elles doivent être normales en chaque point à la direction de la force motrice.

CINQUANTE-QUATRIÈME LEÇON

ÉQUILIBRE DES FLUIDES ET DES CORPS PLONGÉS DANS LES FLUIDES.

Figure permanente d'un fluide tournant autour d'un axe. — Pression d'un liquide sur le fond d'un vase qui le renferme. — Équilibre de plusieurs liquides contenus dans le même vase. — Vases communiquants. — Principe d'Archimède.

FIGURE PERMANENTE D'UN FLUIDE TOURNANT AUTOUR D'UN AXE.

710. Supposons un fluide pesant, contenu dans un vase de forme quelconque, tournant d'un mouvement uniforme autour d'un axe vertical Oz. Au bout d'un certain temps la masse fluide prend une figure permanente d'équilibre qu'il s'agit de déterminer. Soient X, Y, Z les composantes de la force accélératrice P d'un point quelconque m. La molécule m décrit une circonférence de cercle autour de l'axe Oz, et sa force effective est la force centripète $mr\omega^2$, ω étant la vitesse angulaire et r le rayon du cercle. D'après le principe de d'Alembert, il y aura constamment équilibre entre les forces motrices et les forces centrifuges de toutes les molécules du fluide, c'est-à-dire que ces forces ne troubleront pas le mouvement commun de rotation uniforme en déplaçant les molécules les unes par rapport aux autres. Donc en appliquant à l'état d'équilibre actuel l'équation (2) du n° 703 et observant que les composantes de la force centrifuge sont $mx\omega^2$, $my\omega^2$ et o, on a

$$dp = \rho(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) + \rho\omega^2(x\,dx + y\,dy).$$

Or, si les forces motrices se réduisent à la pesanteur, on a

$X = 0$, $Y = 0$, $Z = -g$, et il vient

$$dp = -\rho g dz + \rho\omega^2(xdx + ydy),$$

d'où, en intégrant et représentant la constante par $g\rho C$,

$$(1) \qquad p = g\rho(C - z) + \frac{\rho\omega^2}{2}(x^2 + y^2).$$

En donnant à p des valeurs constantes, on aura différentes surfaces de niveau. Leur équation peut s'écrire

$$(2) \qquad z = C - \frac{p}{g\rho} + \frac{\omega^2}{2g}(x^2 + y^2).$$

Elle représente un paraboloïde de révolution dont la parabole méridienne a pour équation dans le plan des zx

$$z = C - \frac{p}{g\rho} + \frac{\omega^2}{2g}x^2.$$

Cette parabole ne change pas de grandeur avec p, mais la position de son sommet sur l'axe de rotation est variable avec p, car il est à un distance de l'origine égale à $C - \frac{p}{g\rho}$.

711. Les surfaces de niveau sont donc toujours des paraboloïdes, quelle que soit la forme du vase, et celle de la surface supérieure qui termine le fluide. Dans tous les cas on déterminera la constante C en exprimant que le volume du liquide est donné. Supposons, par exemple, que le liquide soit contenu dans un vase cylindrique ayant pour base sur le plan xOy le cercle dont le rayon est a et que b soit la hauteur de la partie du cylindre occupée par le liquide avant le mouvement. Son volume est $\pi a^2 b$. Supposons en outre que la surface libre supporte simplement la pression atmosphérique constante représentée par ϖ. Elle sera alors une surface de niveau. Il est facile d'évaluer le volume correspondant du liquide terminé par cette surface de niveau en le décomposant en tranches cylin-

driques ayant l'axe des z pour axe. On aura donc

$$\pi a^2 b = 2\pi \int_0^a zr\,dr;$$

en remplaçant z par sa valeur déduite de (2),

$$b = C - \frac{\varpi}{g\rho} + \frac{\omega^2 a^2}{2g},$$

on aura une équation qui fera connaître C. On trouve ainsi

$$C = b + \frac{\varpi}{g\rho} - \frac{\omega^2 a^2}{2g}.$$

PRESSION D'UN LIQUIDE SUR LE FOND DU VASE QUI LE RENFERME.

712. Considérons maintenant un liquide pesant et incompressible, soumis seulement à l'action de la pesanteur. En prenant les mêmes axes que dans le cas général, on a

$$dp = g\rho dz,$$

d'où

$$p = g\rho z + \varpi,$$

ϖ étant une constante. On voit que la pression varie seulement avec z et qu'elle croit proportionnellement à la profondeur. Les surfaces de niveau sont donc des plans horizontaux. Si l'on fait $z = 0$, on a $p = \varpi$: donc cette constante représente la pression qui s'exerce sur la surface libre, c'est-à-dire ordinairement la pression atmosphérique. En joignant à celle-ci $g\rho z$, on a la valeur de la pression à la profondeur z; mais, pour simplifier, nous omettrons la pression atmosphérique, qu'il faudra rétablir à la fin du calcul pour donner aux résultats toute leur exactitude. Ainsi nous poserons simplement

$$p = g\rho z.$$

On conclut de cette formule que si b est l'aire de la base supposée horizontale et h la hauteur du liquide, la pression totale P que supporte cette base est

$$P = g\rho bh.$$

On voit qu'elle est égale, quelle que soit la forme du vase, au poids d'un cylindre de liquide dont la base est b et la hauteur h, en sorte qu'elle peut être plus grande ou plus petite que le poids total du liquide.

713. Supposons maintenant qu'on ait deux liquides contenus dans le même vase et qu'ils ne se mélangent pas.

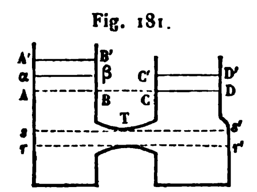
Leur surface de séparation sera nécessairement un plan horizontal. En effet, on sait que les surfaces de niveau doivent être des plans horizontaux et que dans toute leur étendue la densité doit être la même, ce qui n'aurait pas lieu si un même plan horizontal pouvait rencontrer les deux liquides. Soient b la base, h la hauteur et ρ la densité de la première couche reposant sur le fond du vase; b', h', ρ' les quantités analogues relatives à la seconde couche. La pression sur l'unité de surface de b' est $g\rho' h'$. Cette pression se transmet à travers la seconde couche de liquide et s'ajoute à la pression $g\rho h$ que cette couche exerce sur chaque unité de surface de sa base. Donc la pression exercée sur le fond du vase sera $g(\rho' h' + \rho h)b$, c'est-à-dire égale au poids d'une colonne cylindrique, dont la base serait b, qui contiendrait une hauteur h du liquide inférieur et une hauteur h' du liquide supérieur.

On aurait un théorème analogue pour un nombre quelconque de liquides contenus dans un même vase et même pour un liquide dont la densité varierait d'une manière continue avec la hauteur z; cela résulte d'ailleurs de la formule $dp = g\rho dz$, intégrée entre des limites convenables.

VASES COMMUNIQUANTS.

714. Considérons d'abord un seul liquide contenu dans deux vases communiquants. Menons à la surface du tuyau de communication T deux plans tangents horizontaux;

Fig. 181.



au-dessous du plan inférieur rr' le liquide de chaque vase sera dans les mêmes conditions que si ce vase existait seul. La pression sera la même sur chaque plan horizontal compris entre le plan rr' et le plan tangent supérieur ss', mais elle variera d'un plan à l'autre. Au-dessus du plan ss', le liquide devra s'élever au même niveau AB, CD dans les deux vases : car s'il s'élevait dans l'un d'eux à une hauteur différente en $\alpha\beta$, l'équilibre devrait subsister en appliquant sur CD une paroi fixe qui n'éprouverait aucune pression (abstraction faite de la pression atmosphérique). Mais le liquide contenu dans la colonne $AB\alpha\beta$ exercerait sur AB, à cause de sa pesanteur, une certaine pression, qui se transmettrait jusqu'à CD, de sorte que cette paroi (indépendamment de la pression atmosphérique) éprouverait une certaine pression, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Concevons maintenant que l'on verse sur AB et CD, qui sont dans un même plan horizontal, deux liquides différents qui s'élèvent jusqu'à A'B' et C'D'. Il faudra pour l'équilibre qu'ils exercent des pressions égales sur l'unité de surface de AB et de CD, de sorte que si ρ_1 et ρ' sont les densités de ces deux liquides et h_1 et h' leurs hauteurs, on aura

$$g\rho_1 h_1 = g\rho' h'$$

ou

$$\rho_1 h_1 = \rho' h',$$

c'est-à-dire que les hauteurs auxquelles ces deux liquides

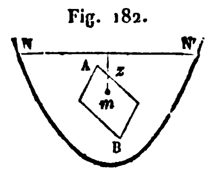
s'élèvent dans les deux vases sont en raison inverse de leurs densités.

On verrait de la même manière que si l'on ajoutait un nombre quelconque de liquides dans les deux vases, il faudrait que la somme des produits de leurs densités par les hauteurs de leurs tranches fût la même de part et d'autre.

PRESSION D'UN LIQUIDE SUR UNE PAROI PLANE.

715. Soient AB une paroi plane, placée comme on voudra dans le liquide, ω l'aire d'un élément de la surface AB et z la distance de ω au niveau supérieur NN'. La pression que supporte ω est $g\rho z\omega$, en faisant abstraction de la pression atmosphérique.

Fig. 182.



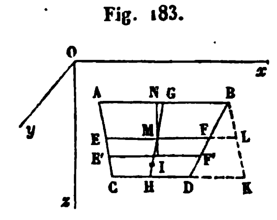
Les pressions exercées par le fluide sur tous les éléments ω étant normales au même plan AB, ont une résultante égale à leur somme $g\rho\sum z\omega$ et normale au plan AB. En désignant par b l'aire de la paroi AB et par z_1 la distance de son centre de gravité au plan NN', on a $\sum z\omega = bz_1$. Donc la pression totale sur la paroi AB est égale à $g\rho bz_1$, c'est-à-dire égale au poids d'un cylindre de liquide qui aurait une base égale à la surface de la paroi et une hauteur égale à la distance du centre de gravité de cette paroi au niveau supérieur du liquide.

Le point d'application de la résultante des pressions exercées sur la surface AB est appelé *centre de pression*. Il coïncide avec le centre de gravité si le plan AB est horizontal; il est au-dessous du centre de gravité quand le plan est incliné, parce que les pressions exercées sur les éléments ω augmentent en intensité avec la profondeur

de ces éléments. Un exemple va montrer comment on peut déterminer le centre de pression.

716. Supposons que la paroi immergée ait la forme d'un trapèze dont les côtés parallèles AB, CD soient horizontaux. Le centre de pression doit évidemment se trouver sur la droite GH qui joint les milieux de ces deux côtés. Décomposons ce trapèze en une infinité d'éléments tels que EFE'F' par des droites parallèles à AB. Désignons EF par v et par u la perpendiculaire MN abaissée du point M sur AB. On a $EFF'E' = v du$ et la pression supportée par cet élément est $g\rho z v du$. En nommant u_1 la distance du centre de pression I à AB et h la hauteur du trapèze, on déterminera u_1 par l'équation

Fig. 183.



$$u_1 \int_0^h g\rho z v du = \int_0^h g\rho z v u du$$

ou

$$(1) \qquad u_1 \int_0^h z v du = \int_0^h z v u du.$$

Il faut maintenant exprimer z et v en fonction de u. Or si l'on désigne par α l'angle que le plan du trapèze fait avec un plan horizontal et par c la distance du côté AB à la surface du liquide, prise pour plan des xy, on a, en projetant MN sur la verticale élevée par le point M,

$$(2) \qquad z = c + u \sin\alpha.$$

D'ailleurs, menons BK parallèle à AC et prolongeons EF et CD jusqu'en L et en K; les triangles semblables BDK, BFL donnent, en posant $AB = a$, $CD = b$,

$$\frac{a-b}{a-v} = \frac{h}{u},$$

d'où

$$(3) \qquad v = a + \frac{b-a}{h}u.$$

Substituant les valeurs précédentes de z et de v dans l'équation (1) et intégrant, on en tire

$$(4) \qquad u_1 = \frac{2hc(a+2b) + h^2(a+3ab)\sin\alpha}{6c(a+b) + 2h(a+2b)\sin\alpha}.$$

717. Si le côté AB est à fleur d'eau, on a $c = 0$ et

$$u_1 = \frac{h(a+3b)}{2(a+2b)}.$$

Quand le trapèze est horizontal, on a

$$\sin\alpha = 0, \quad u_1 = \frac{h(a+2b)}{3(a+b)},$$

et le centre de pression coïncide avec le centre de gravité.

718. Quand la surface plongée dans le liquide est courbe, la pression totale qu'elle supporte n'est pas la somme des pressions exercées sur ses éléments, parce que celles-ci ne sont pas parallèles. En général ces pressions n'ont pas de résultante unique et se réduisent à deux forces non situées dans le même plan ou à une force et un couple.

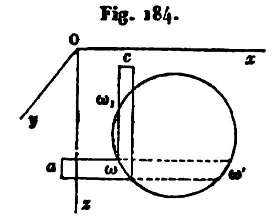
PRINCIPE D'ARCHIMÈDE.

719. *Quand un corps pesant est plongé dans un liquide, les pressions exercées sur sa surface ont une résultante unique, égale au poids du liquide déplacé et appliquée au centre de gravité de cette partie du fluide, supposée solidifiée.*

Supposons d'abord que le corps soit entièrement plongé dans le fluide et considérons un élément quelconque ω de sa surface. Soit p la pression, rapportée à l'unité de surface, exercée en ce point : $p\omega$ est la pression supportée

par l'élément ω. Désignons par λ, μ, ν les angles que la normale fait avec trois axes rectangulaires. Les composantes de $p\omega$ suivant ces axes sont $p\omega \cos\lambda$, $p\omega \cos\mu$, $p\omega \cos\nu$, ou pa, pb, pc, en appelant a, b, c les projections de l'élément ω sur les trois plans coordonnés.

Fig. 184.



Or toutes les composantes telles que pa se détruisent deux à deux. En effet, le petit cylindre ωa prolongé découpe sur le côté opposé de la surface un petit élément ω' dont la projection sur le plan yOz est égale à a. La pression sur ω', rapportée à l'unité de surface, est p, parce que ω et ω' sont à la même profondeur. Donc la composante de la pression totale $p\omega'$ exercée sur ω' et parallèle à Ox est égale à pa, et comme elle agit en sens contraire de celle qui s'exerce sur ω, elle la détruit. On verrait de même que toutes les composantes parallèles à Oy de toutes les pressions se détruisent deux à deux. Il ne reste donc plus à considérer que les composantes verticales.

Le petit cylindre vertical dont la base est ω découpe sur la partie supérieure de la surface un autre élément ω_1 dont la projection sur le plan xOy est c. Donc si p_1 est la pression en ω_1, rapportée à l'unité de surface, le petit cylindre $\omega\,\omega_1$ est soumis à une pression verticale s'exerçant de bas en haut et égale à $(p - p_1)c$, et comme $p = g\rho z + \varpi$, ϖ étant une constante, on aura

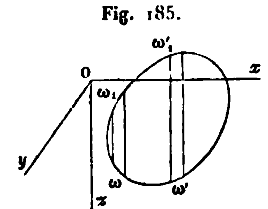
$$(p - p_1)c = g\rho c(z - z_1) = g\rho cl,$$

en appelant ρ la densité du fluide supposée constante, z_1 le z de l'élément ω_1, l la longueur du petit filet cylindrique compris entre ω et ω_1. Cette pression équivaut donc au poids du fluide dont ce petit filet tient la place. En décomposant le corps en filets verticaux infiniment

minces, chaque filet est pressé de bas en haut par une semblable force, et l'on conclut de là que toutes les pressions exercées sur le corps se composent en une seule force verticale agissant en sens contraire de la pesanteur, égale au poids du fluide dont le corps tient la place et appliquée au centre de gravité de cette masse fluide. La résultante de toutes ces pressions se nomme la *poussée* du fluide.

720. Le principe d'Archimède subsiste quand le corps n'est plongé qu'en partie dans le fluide. On verrait d'abord, comme précédemment, que les pressions horizontales se détruisent; puis, si le cylindre vertical $\omega'\omega'_1$ a une partie en dehors du fluide, les composantes verticales des pressions exercées en ω' et ω'_1 seront $p' = (g\rho z + \varpi) c$ et ϖc, de sorte qu'en prenant leur différence, la partie commune disparaîtra et la pression sera égale au poids d'un volume de liquide égal à la partie du cylindre plongée dans le liquide.

Fig. 185.



721. Le théorème d'Archimède a encore lieu quand la densité ρ n'est pas la même à toutes les profondeurs, car les pressions horizontales se détruisant, la pression verticale supportée par le cylindre $\omega\,\omega_1$ serait

$$(p - p_1) c = c \int_z^{z_1} g\rho\, dz,$$

en observant qu'on a toujours

$$p = \int_a^z g\rho\, dz + \varpi,$$

a étant la valeur de z pour laquelle on a $p = \varpi$. Or $\int_z^{z_1} g\rho c\, dz$ est le poids du fluide déplacé.

722. Le principe d'Archimède peut encore se démontrer de la manière suivante : Séparons par la pensée, dans un fluide en équilibre, une partie quelconque de sa masse. Elle est en équilibre et le sera encore si nous la supposons solidifiée. Mais alors toutes les pressions exercées contre sa surface par le fluide environnant doivent se réduire à une seule égale, et directement contraire à son poids. Il est clair que ces pressions auront encore la même résultante, si l'on substitue à cette masse de fluide solidifiée un corps solide quelconque de même forme : ce qui démontre le principe énoncé.

723. Quand le poids d'un corps est égal au poids d'un égal volume du fluide dans lequel il plonge, ce corps reste en équilibre à toutes les profondeurs, pourvu que son centre de gravité et celui du volume du fluide déplacé soient sur la même verticale. Le corps descend au fond du vase ou remonte à la surface selon que son poids est supérieur ou inférieur à celui du fluide déplacé. Dans ce dernier cas, le corps doit être en partie au-dessus du niveau supérieur, et l'équilibre ne s'établit que lorsque le poids du liquide déplacé est égal au poids du corps.

724. Quand on pèse un corps dans un fluide, on n'obtient pas son véritable poids, mais seulement l'excès de ce poids sur celui du fluide déplacé. Si P est le poids du corps et P′ celui d'un égal volume de liquide, D la densité vraie, ρ la densité apparente, on a

$$\frac{P}{P-P'}=\frac{D}{\rho},$$

d'où

$$P=\frac{DP'}{D-\rho}.$$

725. Le principe d'Archimède subsiste et sa démonstration est la même dans le cas où l'on considère un fluide contenu dans un vase : on en conclut que la résultante

des pressions d'un fluide sur les parois du vase qui le contient est égale au poids du fluide. Il faut bien distinguer cette pression de celle que supporte la paroi horizontale inférieure, qui peut être plus grande ou plus petite que le poids du fluide. Si l'on fait une ouverture à l'une des parois latérales, la pression n'ayant plus lieu sur la portion de la paroi qu'on a enlevée, celle qui s'exerce sur la paroi opposée ne sera plus détruite, et le vase sera mis en mouvement en sens contraire de l'écoulement du liquide. C'est là le principe des différentes machines dites *à réaction*.

CINQUANTE-CINQUIÈME LEÇON.

CORPS FLOTTANTS. — MESURE DES HAUTEURS PAR LE BAROMÈTRE.

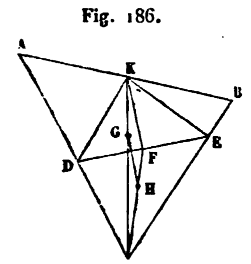
Équilibre des corps flottants. — Stabilité des corps flottants. — Métacentre. — Mesure des hauteurs par l'observation du baromètre.

ÉQUILIBRE DES CORPS FLOTTANTS.

726. Déterminer la position d'équilibre d'un corps solide plongé en partie dans un liquide, revient à couper ce corps par un plan en deux segments, dans un rapport déterminé, de telle sorte que le centre de gravité du corps et celui d'un des deux segments soient sur une même perpendiculaire au plan sécant. Nous allons résoudre ce problème pour un prisme triangulaire droit dont nous supposerons les arêtes horizontales.

Une section ABC perpendiculaire aux arêtes étant faite dans le prisme, le niveau du liquide devra partager le triangle par une droite DE en deux segments CDE, ADEB tels, que l'on ait

Fig. 186.



$$\frac{\text{CDE}}{\text{ABC}} = r,$$

r étant le rapport de la densité du prisme à celle du liquide. Il faudra en outre que les centres de gravité G et H de ces deux triangles soient sur une même perpendiculaire à DE. Soient

$$\text{CA} = a,\ \ \text{CB} = b,\ \ \text{AB} = c,\ \ \text{CK} = h,\ \ \text{CD} = x,\ \ \text{CE} = y,$$

x et y sont les deux inconnues qu'il s'agit de déterminer. Or on a

$$\text{surf}\,\text{CAB} = \frac{1}{2} ab \sin C, \quad \text{surf}\,\text{CDE} = \frac{1}{2} xy \sin C,$$

d'où

$$(1) \qquad xy = rab.$$

D'un autre côté, GH est perpendiculaire à DE ainsi que FK qui lui est parallèle, et comme DF = FE, il s'ensuit qu'on a KD = KE. Réciproquement, si KD = KE, la droite KF et par suite GH sera perpendiculaire à DE. Or si l'on nomme α et β les angles ACK et BCK, on a

$$\overline{KD}^2 = x^2 + h^2 - 2hx\cos\alpha, \quad \overline{KE}^2 = y^2 + h^2 - 2hy\cos\beta;$$

donc, puisque KD = KE,

$$(2) \qquad x^2 - 2hx\cos\alpha = y^2 - 2hy\cos\beta.$$

En éliminant y entre les équations (1) et (2), on trouve

$$(3) \quad x^4 - 2h\cos\alpha . x^3 + 2rhab\cos\beta . x - r^2a^2b^2 = 0.$$

Cette équation, dont le dernier terme est négatif, a au moins deux racines réelles, l'une positive, l'autre négative. Cette dernière doit être rejetée, puisque la ligne DE doit être comprise dans l'intérieur du triangle ABC. D'après la règle de Descartes, si les angles α et β sont aigus et si l'équation (3) a toutes ses racines réelles, elle aura trois racines positives et une racine négative. Celle-ci est inadmissible, et l'on rejettera de même comme étrangère à la question une racine qui surpasserait a ou qui donnerait pour y une valeur plus grande que b. Il y a donc au plus trois positions d'équilibre pour lesquelles le sommet seul est plongé dans le liquide.

727. Le problème précédent revient à mener par un point donné K une normale à une hyperbole ayant pour

asymptotes CA et CB. En effet, si l'on mène dans l'angle ACB différentes droites, telles que DE, formant des triangles DCE équivalents entre eux, le milieu de chaque droite DE se trouve sur une hyperbole ayant CA et CB pour asymptotes, et cette courbe est tangente à DE. La droite KF étant perpendiculaire à DE, la question revient à mener par le point K une normale à cette hyperbole. On sait qu'on peut en général en mener quatre, dont l'une aboutit à la branche située dans l'angle opposé à l'angle ACB.

728. Quand le triangle ABC est isocèle, on a

$$a = b, \quad \alpha = 6, \quad h\cos\alpha = \frac{h^2}{a}, \quad h^2 = a^2 - \frac{c^2}{4},$$

d'où

$$h\cos\alpha = \frac{4a^2 - c^2}{4a}.$$

Les équations (1) et (2) deviennent

$$xy = ra^2, \quad x^2 - y^2 = \frac{4a^2 - c^2}{2a}(x - y).$$

On y satisfait d'abord en faisant

$$x = y = a\sqrt{r},$$

valeur admissible à cause de $r < 1$. On obtient une autre solution en résolvant les équations

$$xy = ra^2, \quad x + y = \frac{4a^2 - c^2}{2a},$$

qui donnent, si l'on suppose $x > y$,

$$x = \frac{4a^2 - c^2 + \sqrt{(4a^2 - c^2)^2 - 16ra^4}}{4a},$$

$$y = \frac{4a^2 - c^2 - \sqrt{(4a^2 - c^2)^2 - 16ra^4}}{4}.$$

Comme x doit être moindre que a, on doit avoir

$$4a^2 - c^2 + \sqrt{(4a^2 - c^2) - 16ra^4} < 4a^2$$

ou

$$(4a^2 - c^2)^2 - 16ra^4 < c^4,$$

$$16a^4 - 8a^2c^2 - 16ra^4 < 0,$$

d'où l'on tire

$$c > a\sqrt{2 - 2r}.$$

Il faut en outre que x et y soient réelles et par conséquent que l'on ait

$$4a^2 - c^2 > 4h^2\sqrt{r}$$

ou

$$c < 2a\sqrt{1 - \sqrt{r}}.$$

Si ces deux conditions sont remplies, la solution précédente sera admissible.

729. Le cas où deux sommets A et B du triangle sont immergés, se ramène au cas où un seul plonge dans le liquide. En effet, si l'on a (*fig.* 186, p. 303)

$$\frac{\text{ABDE}}{\text{ABC}} = r,$$

on aura

$$\frac{\text{CDE}}{\text{ABC}} = 1 - r,$$

et si les centres de gravité du quadrilatère ABDE et du triangle ABC sont sur une même verticale, il en sera de même de ceux de ABC et de CDE. Il suffit donc, en conservant les mêmes notations, de changer r en $1 - r$. Les deux inconnues $CD = x$, $CE = y$ se déterminent au moyen des équations

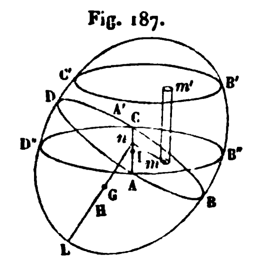
$$xy = (1 - r)\,ab,$$

$$x^2 - 2hx\cos\alpha = y^2 - 2hy\cos\beta.$$

STABILITÉ D'UN CORPS FLOTTANT.

730. Un corps solide étant plongé dans un liquide, le centre de gravité G de ce corps et celui H de la partie immergée doivent être sur une même verticale perpendiculaire au plan de flottaison ABCD. Supposons que l'on écarte un peu le corps de sa position d'équilibre et que tous ses points reçoivent de petites vitesses. Soit A′ B′ C′ D′ la section faite dans le corps par le nouveau plan de flottaison, le premier étant venu en ABCD.

Fig. 187.



Par le centre de gravité I de la section ABCD menons un plan AB″CD″, parallèle au plan horizontal A′ B′ C′ D′ et qui coupe ABCD suivant la droite AIC. Désignons par θ l'angle des deux plans ABCD, AB″ CD″, et par ζ la distance du point I au plan A′ B′ C′ D′, cette distance étant positive ou négative suivant que le point I est situé au-dessous ou au-dessus du niveau du liquide.

Pour résoudre la question de stabilité, nous ferons usage du principe des forces vives. Un élément de masse dm du corps flottant est sollicité par son poids $g\,dm$, force verticale. La partie du corps plongée dans le liquide est soumise, en outre, à la poussée, qui équivaut au poids du liquide déplacé, et qui agit verticalement au centre de gravité du liquide dont le corps occupe la place, en sens contraire de la pesanteur. La poussée du liquide peut donc être remplacée par de petites forces verticales, en appliquant à chaque élément de masse dm situé au-dessous du niveau une force égale et contraire au poids du volume d'eau dont cet élément de masse tient la place. Cette dernière force est $g\rho\,dv$, en appelant dv le volume occupé par l'élément dm et ρ la densité du fluide. La ré-

sultante de toutes ces petites forces est la même que celle des pressions exercées par le fluide sur la surface immergée du corps flottant. Ainsi, pour chaque point matériel dm de ce corps, les composantes X, Y, Z de la force motrice sont

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = gdm \quad \text{ou} \quad gdm - g\rho dv,$$

selon que la molécule dm est au-dessus ou au-dessous du niveau du fluide. Donc on a, $\frac{1}{2}\varphi$ étant la somme des quantités de travail des forces motrices dans le temps écoulé t,

$$\varphi = 2\int dz \sum g dm - 2\int dz \sum g\rho\, dv,$$

ou

(1) $$\varphi = 2g\sum z dm - 2g\rho \sum z dv,$$

la première somme $\sum z dm$ comprenant toute la masse du corps et la seconde seulement la partie plongée. On a donc, d'après le principe des forces vives et u désignant la vitesse de la molécule dm,

(2) $$\sum u^2 dm = C + 2\left(g\sum z dm - g\rho \sum z dv\right).$$

Or $\sum z dm = M z_1$, M étant la masse du corps et z_1 le z de son centre de gravité G. D'ailleurs $M = V\rho$, V étant le volume de la partie immergée, quand le corps est en équilibre. On a donc

(3) $$\sum z dm = M z_1 = V\rho z_1.$$

Il faut maintenant calculer $\sum z dv$. Partageons cette somme en deux parties, l'une relative à la partie ABCDL

du volume V limitée à la section ABCD et l'autre à la partie comprise entre ABCD et A'B'C'D'. La première est égale à Vz', z' étant le z du centre de gravité H de la masse totale du fluide. En désignant par k la seconde, on a

$$(4) \qquad \sum u^2 dm = C + 2gV\rho(z_1 - z') - 2g\rho k.$$

Or soit $GH = a$. Si l'on projette cette droite sur la verticale du point G, on voit que $z_1 - z' = \mp a \cos\theta$, suivant que H est au-dessus ou au-dessous de G. Il faut maintenant calculer k.

Considérons, à cet effet, un élément de surface $d\lambda$, en un point m, sur la section ABCD, et projetons-le, par un petit cylindre vertical mm', sur le plan de flottaison A'B'C'D'. Sa projection est $d\lambda\cos\theta$. Pour calculer dk ou la partie de $\sum z\,dv$ relative à ce petit cylindre, décomposons-le en une infinité d'éléments par des plans horizontaux. On aura pour l'un d'entre eux

$$dv = dz\,d\lambda\cos\theta, \quad z\,dv = z\,dz\,d\lambda\cos\theta.$$

Donc, en posant $mm' = y$,

$$dk = \int_0^y z\,dz\,d\lambda\cos\theta = \frac{y^2}{2}d\lambda\cos\theta.$$

On peut exprimer y en fonction de ρ et de θ. En effet, abaissons $mn = l$ perpendiculaire sur Ac. Si l'on projette mn sur mm', on a mm' ou $y = \zeta + l\sin\theta$, l étant positive ou négative suivant que mn est au-dessous ou au-dessus de AC. Donc

$$dk = \frac{1}{2}(\zeta + l\sin\theta)^2 d\lambda\cos\theta$$

ou

$$dk = \frac{1}{2}\zeta^2\cos\theta\,d\lambda + \zeta\sin\theta\cos\theta . l\,d\lambda + \frac{1}{2}\sin^2\theta\cos\theta . l^2\,d\lambda.$$

On aura donc

$$k = \frac{1}{2}\zeta^2\cos\theta\sum d\lambda + \zeta\sin\theta\cos\theta\sum l\,d\lambda + \frac{1}{2}\sin^2\theta\cos\theta\sum l^2\,d\lambda,$$

expressions où toutes les sommes s'étendent à tous les éléments de la section ABCD. Soient b l'aire ABCD et μ le moment d'inertie de cette section par rapport à AIC. On a

$$\sum d\lambda = b, \quad \sum l\,d\lambda = 0, \quad \sum l^2\,d\lambda = \mu.$$

Donc

$$k = \frac{1}{2}b\zeta^2\cos\theta + \frac{1}{2}\mu\sin^2\theta\cos\theta.$$

Substituant dans l'équation (4), on a

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}\sum u^2 dm = \mathrm{C} \mp 2g\mathrm{V}\rho a\cos\theta - g\rho b\zeta^2\cos\theta\\ - g\rho\mu\sin^2\theta\cos\theta + \varepsilon.\end{aligned}\right.$$

Nous ajoutons ε, parce que dans le calcul de k nous avons pris, au lieu du volume ABCD A′B′C′D′, celui d'un cylindre vertical ayant pour base ABCD et limité au plan A′B′C′D′ : de sorte que ε est un infiniment petit du troisième ordre au moins.

Maintenant θ et ζ étant des quantités très-petites, on peut négliger θ^3 et ζ^3, et remplacer $\cos\theta$ par $1 - \frac{\theta^2}{2}$, $\sin\theta$ par θ. En désignant par c la constante $\mathrm{C} \mp 2g\mathrm{V}\rho a$, l'équation (5) devient

$$(6)\quad \sum u^2 dm = c - g\rho b\zeta^2 - g\rho(\mu \mp \mathrm{V}a)\theta^2 + \varepsilon.$$

On détermine c d'après l'état du corps flottant à l'origine du mouvement. On suppose connues les valeurs initiales de ζ et de θ, ainsi que les vitesses initiales de tous les points du corps. Comme toutes ces quantités peuvent

être prises aussi petites que l'on veut, il en résulte que la constante c peut être supposée aussi petite qu'on voudra.

731. Ponr déduire de l'équation (2) les conditions de stabilité de l'équilibre du corps flottant, il faut distinguer deux cas.

En premier lieu, si le centre de gravité G du corps est au-dessous de celui du fluide déplacé H, l'équilibre est toujours stable. En effet, l'équation (2) est alors

$$\sum u^2 dm = c - g\rho b \zeta^2 - g\rho(\mu + \mathrm{V}a)\theta^2 + \varepsilon.$$

La valeur de c qu'on détermine d'après les valeurs initiales de μ, ζ, θ, qu'on suppose très-petites, est positive et très-petite. Les quantités ζ et θ ne peuvent pas croître assez pour que la somme $g\rho b\zeta^2 + g\rho(\mu + \mathrm{V}a)\theta^2$ devienne plus grande que $2c$; car si cette somme devenait égale à $2c$, la quantité ε étant au moins du troisième ordre, le second membre de l'équation précédente serait négatif et on aurait $\sum u^2 dm < 0$, ce qui est absurde. Il en résulte que dans le mouvement du système on a toujours

$$\zeta < \sqrt{\frac{2c}{g\rho b}}, \quad \theta < \sqrt{\frac{2c}{g\rho(\mu + \mathrm{V}a)}}.$$

On pourrait démontrer de la même manière qu'on a

$$\zeta < \sqrt{\frac{ic}{g\rho b}}, \quad \theta < \sqrt{\frac{ic}{g\rho(\mu + \mathrm{V}a)}},$$

i étant un nombre quelconque plus grand que l'unité.

Donc, comme c est une quantité positive très-petite et aussi petite que l'on veut, les valeurs des variables ζ et θ resteront toujours très-petites et par conséquent le corps s'éloignera fort peu de sa position d'équilibre.

732. Quand le point G est au-dessous du point H, l'équation (2) est

$$\sum u^2\, dm = c - g\rho b\zeta^2 - g\rho(\mu - Va)\theta^2 + \varepsilon$$

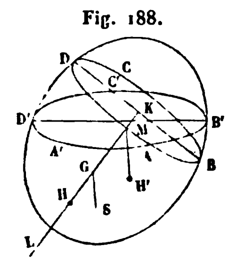
La valeur de c reste positive si l'on a $\mu > Va$, à l'origine du temps. Si μ ou le moment d'inertie de l'aire ABCD par rapport à la droite AIC reste plus grand que Va à toute époque, on verra comme précédemment que θ et ζ resteront toujours extrêmement petites et l'équilibre sera stable. Il faudra dans ce cas que le moment d'inertie de la section ABCD, par rapport à une droite quelconque passant par son centre de gravité I, soit plus grand que Va, parce que dans le déplacement infiniment petit du corps l'intersection des plans ABCD et AB″CD″ peut prendre toutes les positions possibles autour du point I. Donc il faut et il suffit que Va soit moindre que le plus petit moment d'inertie de la section ABCD, par rapport à toutes les droites qu'on peut y mener par le point I. La ligne qui correspond à ce moment d'inertie minimum est ordinairement connue. Par exemple, dans un vaisseau, c'est la droite qui va de la proue à la poupe. C'est par rapport à cette ligne qu'il faut calculer le moment d'inertie de la section, et s'il est plus grand que Va, l'équilibre sera stable. Si μ devenait moindre que Va, l'équation (2) ne ferait rien connaître relativement à la stabilité de l'équilibre, parce que le second membre n'étant pas nécessairement négatif à une époque quelconque, on ne tombe pas sur la conséquence absurde que la somme des forces vives devienne négative, en supposant que ρ et θ croissent indéfiniment.

DU MÉTACENTRE.

733. Soit S un corps solide flottant. Lorsqu'il est en équilibre, on sait que son centre de gravité G et celui H

du volume de liquide déplacé sont sur une même perpendiculaire au plan de flottaison ABCD. Supposons que ce corps soit symétrique par rapport à un plan vertical BLD, lequel contient alors la droite KGH. Imaginons qu'on dérange un peu ce solide de sa position d'équilibre, tout en maintenant vertical le plan BDG. Ce plan contiendra donc toujours le centre de gravité de la masse fluide déplacée. Soit à un instant quelconque A'B'C'D' la section de niveau. Le centre de gravité du fluide déplacé A'B'C'D'L est un certain point H' et le corps peut être regardé comme se mouvant par l'action de deux forces : son poids P appliqué à son centre de gravité G et la poussée du fluide qui s'exerce en sens inverse suivant H'M. Le point M où la verticale H'M rencontre la droite KGH est ce qu'on appelle le *métacentre*. Pour avoir le mouvement du centre de gravité, il faut (600) supposer toute la masse du corps réunie en ce point et y supposer appliquées les deux forces verticales dont nous venons de parler. Elles se réduiront à une seule égale à leur différence. Si le volume de liquide déplacé est toujours égal à celui que le corps déplace dans sa position d'équilibre, ces deux forces sont égales et contraires, et alors le point G devra rester immobile, pourvu que le corps n'ait pas reçu de vitesse initiale. On aura ensuite le mouvement de rotation autour du centre de gravité en le supposant fixé, ce qui détruira le poids du corps, et la poussée du fluide appliquée en M le fera tourner autour d'un axe horizontal passant par G et perpendiculaire au plan de symétrie BLD. Mais ici il faut distinguer plusieurs cas.

Fig. 188.



Si dans ce mouvement le métacentre reste toujours au-dessus du point G, sur la droite HGK, la poussée du fluide tendra constamment à ramener cette droite dans

la position verticale qui répond à l'équilibre du corps. Donc cet équilibre est stable.

Si, au contraire, le métacentre est constamment au-dessous du centre de gravité, la poussée du fluide tendra à éloigner la droite KGH de la verticale, et l'équilibre du corps sera instable.

Enfin, si le métacentre peut être, tantôt au-dessus, tantôt au-dessous du centre de gravité, la considération seule du métacentre ne fait plus rien connaître relativement à la stabilité de l'équilibre du corps flottant.

DE LA MESURE DES HAUTEURS PAR LE BAROMÈTRE.

734. La hauteur de la colonne de mercure dans le baromètre indique la pression exercée par l'air atmosphérique dans le lieu où l'on observe. Cette pression diminue quand on s'élève verticalement. Il faut chercher la loi de sa variation en fonction de la hauteur verticale à laquelle on s'élève.

La pression ou force élastique de l'air dépend de sa densité et de sa température, en vertu de la loi de Mariotte et de celle de Gay-Lussac. Si l'air et différents gaz, soumis à une pression constante et la même pour tous, sont placés dans une enceinte dont la température varie, l'observation prouve que tous ces fluides se dilatent également pour des augmentations égales de température, indiquées par les degrés du thermomètre à mercure. La dilatation de l'air qui correspond à chaque degré du thermomètre centigrade est de 0,00366. Elle est à peu près la même pour tous les gaz, ainsi que pour les vapeurs.

Soient ϖ la force élastique de l'air et D sa densité à la température zéro : la pression restant la même, soit D' la densité de l'air à la température de θ degrés. La masse d'air à la température zéro contenue dans l'unité de volume, étant portée à la température θ, occupera un volume égal

à $1+\alpha\theta$, en désignant par α le coefficient de dilatation 0,00366 pour chaque degré d'accroissement de la température. Les densités étant en raison inverse des volumes qu'occupe la même masse, on aura

$$(1) \qquad D' = \frac{D}{1+\alpha\theta}.$$

Supposons ensuite qu'on fasse varier la pression sans changer la température θ. En désignant par p la nouvelle pression et par ρ la densité correspondante, on aura, d'après la loi de Mariotte,

$$(2) \qquad p = \frac{\varpi\rho}{D'}.$$

En remplaçant D' par sa valeur et faisant $\frac{\varpi}{D} = k$, on aura la formule

$$(3) \qquad p = k\rho(1+\alpha\theta).$$

On pourrait déterminer k en substituant dans cette formule les valeurs de p, ρ et θ obtenues par l'expérience directe; mais il vaut mieux laisser k indéterminé dans les calculs qui suivent.

Nous avons dit que le coefficient de α, dans la valeur de p, est à peu près 0,00366; mais comme la quantité de vapeur contenue dans l'air augmente avec la température et que la vapeur a une densité moindre que l'air sous une même pression, la densité de l'air mélangé de vapeur, quand la température s'élève, la pression ϖ restant la même, doit diminuer un peu plus que ne l'indiquerait la formule précédente. Pour avoir égard à cette circonstance, on augmente le coefficient α, et l'on prend $\alpha = 0,004$.

735. Cela posé, nous pouvons établir l'équation d'équilibre de la masse atmosphérique qui s'étend au-dessus de la surface de la terre. En désignant par z la hauteur d'un point quelconque de l'atmosphère au-dessus de la surface

terrestre, par p la pression, par ρ la densité de l'air et par g' l'intensité de la pesanteur en ce point, on aura l'équation

$$(4) \qquad dp = -g'\rho dz,$$

déduite de l'équation

$$dp = \rho(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz) \quad (703).$$

On a égard dans cette formule à la variation de la pesanteur; mais on néglige comme insensibles l'action de la force centrifuge qu'il faudrait combiner avec l'attraction de la terre, ainsi que l'attraction de la masse d'air ou de terre comprise entre la portion plane et horizontale de la terre qu'on prend pour plan des xy et la surface de niveau passant par le point que l'on considère à la hauteur z. On a alors

$$(5) \qquad g' = \frac{gr^2}{(r+z)^2},$$

g étant l'intensité de la pesanteur à la surface de la terre où $z = 0$, et r le rayon terrestre.

En mettant les valeurs de g' et de $\rho = \frac{p}{1+\alpha\theta}$ dans l'équation (4), elle devient

$$(6) \qquad \frac{dp}{p} = -\frac{gr^2}{k(1+\alpha\theta)}\frac{dz}{(r+z)^2}.$$

Comme on ne connait pas θ en fonction de z, on est obligé de donner à θ une valeur constante égale à la moyenne ou demi-somme des températures de l'air aux deux stations extrêmes où l'on se place à des hauteurs différentes. On trouve alors, en intégrant,

$$(7) \qquad \mathrm{l}p = \frac{gr^2}{k(1+\alpha\theta)}\frac{1}{r+z} + \mathrm{C}.$$

Pour déterminer la constante C, soit ϖ la pression à la

station inférieure où l'on a $z = 0$. On aura

$$\mathrm{l}\,\varpi = \frac{gr^2}{k(1+\alpha\theta)}\,\frac{1}{r} + \mathrm{C},$$

d'où

$$\mathrm{l}\,\frac{\varpi}{p} = \frac{gr}{k(1+\alpha\theta)}\,\frac{z}{r+z} = \frac{g}{k(1+\alpha\theta)}\,\frac{z}{1+\frac{z}{r}}.$$

Le logarithme indiqué est pris dans le système népérien. Pour passer aux logarithmes ordinaires, on multiplie par le module $\mathrm{M} = 0{,}4342946$, et l'on a

$$(8) \qquad \log\frac{\varpi}{p} = \frac{\mathrm{M}g}{k(1+\alpha\theta)}\,\frac{z}{1+\frac{z}{r}}.$$

736. Le rapport $\frac{\varpi}{p}$ peut s'exdrimer au moyen des hauteurs du mercure dans le baromètre, correspondant aux pressions ϖ et p. Soit h la hauteur de la colonne barométrique pour la station dont la hauteur verticale est z, et soit T la température du mercure, qui peut être différente de celle de l'air ambiant. Soient h_0 et T_0 la hauteur et la température du mercure à la station inférieure. En désignant par m et m_0 la densité du mercure aux températures T et T_0, on a

$$p = g'mh, \quad \varpi = gm_0h_0,$$

d'où

$$\frac{\varpi}{p} = \frac{g}{g'}\,\frac{m_0}{m}\,\frac{h_0}{h};$$

or on a

$$\frac{g}{g'} = \frac{(r+z)^2}{r^2} = \left(1+\frac{z}{r}\right)^2.$$

Le mercure se dilatant de $\frac{1}{5550}$ de son volume à 0 degré pour chaque degré d'accroissement de sa température, devient $1+\frac{\mathrm{T}}{5550}$ à la température T et $1+\frac{\mathrm{T}_0}{5550}$ à la

température T_0. Les densités correspondantes étant en raison inverse de ces volumes, on aura

$$\frac{m_0}{m}=\frac{1+\frac{T}{5550}}{1+\frac{T_0}{5550}}=\frac{1+\frac{T}{5550}}{1+\frac{T}{5550}+\frac{T_0-T}{5550}},$$

ou, à très-peu près,

$$\frac{m_0}{m}=\frac{1}{1+\frac{T_0-T}{5550}}.$$

On aura donc

$$\frac{\varpi}{p}=\left(1+\frac{z}{r}\right)^2\frac{h_0}{h\left(1+\frac{T_0-T}{5550}\right)}$$

ou

(9) $$\frac{\varpi}{p}=\left(1+\frac{z}{r}\right)^2\frac{h_0}{H},$$

en posant, pour abréger,

$$H=h\left(1+\frac{T_0-T}{5550}\right).$$

H est dite la *hauteur corrigée*; c'est celle qu'aurait la colonne barométrique si la température du mercure à la station supérieure était la même qu'à la station inférieure.

737. En remplaçant $\frac{\varpi}{p}$ par cette valeur dans la formule (8), elle devient

$$\frac{Mg}{k(1+\alpha\theta)}\,\frac{z}{1+\frac{z}{r}}=\log\frac{h_0}{H}+2\log\left(1+\frac{z}{r}\right),$$

et l'on en tire

(10) $$z=\frac{k}{Mg}(1+\alpha\theta)\left(1+\frac{z}{r}\right)\left[\log\frac{h_0}{H}+2\log\left(1+\frac{z}{r}\right)\right].$$

L'intensité g de la pesanteur à la station inférieure varie avec la latitude. Si l'on désigne par λ la latitude de la station, et par G la pesanteur à Paris, dont la latitude est de 48° 50′ 14″, on a

$$G = 9,80896$$

et

$$g = \frac{G(1 - 0,002588 \cos 2\lambda)}{1 - 0,002588 \cos 2(48^\circ 50' 14'')}.$$

La formule (10) devient

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} z &= \frac{a(1 + 0,004\theta)}{1 - 0,002588 \cos 2\lambda}\left(1 + \frac{z}{r}\right) \\ &\times \left[\log \frac{h_0}{H} + 2 \log\left(1 + \frac{z}{r}\right)\right], \end{aligned} \right.$$

en posant

$$a = \frac{k}{MG}[1 - 0,002588 \cos 2(48^\circ 58' 14'')].$$

On pourrait calculer le nombre a d'après les valeurs connues de k, m et G; mais il vaut mieux le regarder comme inconnu et le déterminer par l'équation même où l'on substituerait à la place de z une ou plusieurs hauteurs mesurées par les procédés trigonométriques. On a trouvé ainsi

$$a = 18336.$$

738. On peut calculer z par la formule qui précède, en négligeant d'abord dans le second membre la quantité $\frac{z}{r}$, qui est très-petite. On a ainsi une première valeur approchée de z :

$$z_1 = \frac{a(1 + 0,004\theta)}{1 - 0,002588 \cos 2\lambda} \log \frac{h_0}{H}.$$

On aura une seconde valeur plus rapprochée z_2, en substituant cette première valeur z_1 à la place de z dans le

second membre. On pourrait continuer ainsi ces approximations successives; mais on s'arrête ordinairement à la seconde valeur.

Lorsque z n'est pas très-grande, on néglige entièrement $\frac{z}{r}$ dans la formule; mais alors il faut augmenter le nombre a. M. Ramond a conclu d'un grand nombre d'observations faites dans le midi de la France, $a = 18393$, et il a adopté pour les latitudes peu différentes de 45° la formule très-simple

$$z = 18393\,(1 + 0,004\,\theta)\log\frac{h_0}{H}.$$

HYDRODYNAMIQUE.

CINQUANTE-SIXIÈME LEÇON.

MOUVEMENT DES FLUIDES.

Équations générales du mouvement des fluides. — Mouvement dans une hypothèse particulière. — Mouvement permanent d'un fluide.

ÉQUATIONS GÉNÉRALES DU MOUVEMENT.

739. Les équations d'équilibre des fluides sont fondées sur la propriété qu'ils ont de transmettre également en tous sens les pressions appliquées à leur surface, et sur celle d'exercer sur chaque élément de surface autour d'un point quelconque de leur masse, en vertu des actions moléculaires, une pression égale en tous sens et normale à l'élément de surface qui le supporte. Certains faits semblent indiquer que cette dernière propriété n'a pas toujours lieu quand le fluide est en mouvement, c'est-à-dire que la pression peut n'être pas normale à l'élément sur lequel elle s'exerce, ni être la même dans toutes les directions autour d'un même point. Cependant on peut admettre que cette propriété des fluides a encore lieu, quand le mouvement n'est pas très-rapide, les expériences s'accordant assez bien avec les résultats qu'on déduit de cette hypothèse.

Quand on veut déterminer le mouvement d'un système de points dans l'espace, on se propose ordinairement de trouver des équations qui servent à exprimer les coor-

données de chaque point en fonction du temps. Mais, au lieu de suivre dans son mouvement une seule et même molécule, il est plus avantageux de déterminer la vitesse de la molécule fluide qui, au bout d'un temps quelconque, passe par un point pris à volonté dans l'espace occupé par le fluide, ainsi que la pression et la densité du fluide en ce même point, qui reste fixe. Soient x, y, z les coordonnées d'un point m; μ la masse de la molécule fluide qui se trouve au point m après le temps t. Désignons par X, Y, Z les composantes, rapportées à l'unité de masse, de la force qui agit sur la molécule μ. Les composantes de la force motrice seront $X\mu$, $Y\mu$, $Z\mu$. Il faudra cinq équations pour déterminer les composantes u, v, w de la vitesse du point, sa pression p et sa densité ρ.

740. Le principe de d'Alembert fournit d'abord trois équations. Soient $u'dt$, $v'dt$, $w'dt$ les accroissements de u, v, w, lorsque le temps t augmente de dt. Les composantes de la force perdue sont $(X - u')\mu$, $(Y - v')\mu$, $(Z - w')\mu$, et celles de la force effective $\frac{dp}{dx}\frac{\mu}{\rho}$, $\frac{dp}{dy}\frac{\mu}{\rho}$, $\frac{dp}{dz}\frac{\mu}{\rho}$. Donc, d'après les équations d'équilibre des fluides, on aura

$$\frac{dp}{dx} = (X - u')\rho, \quad \frac{dp}{dy} = (Y - v')\rho, \quad \frac{dp}{dz} = (Z - w')\rho.$$

Pour obtenir u', v', w', on doit différentier u, v, w, en regardant x, y, z comme des fonctions de t, dont les accroissements sont udt, vdt, wdt, en sorte que $dx = udt$, etc. On aura donc

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} u' &= \frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz}, \\ v' &= \frac{dv}{dt} + u\frac{dv}{dx} + v\frac{dv}{dy} + w\frac{dv}{dz}, \\ w' &= \frac{dw}{dt} + u\frac{dw}{dx} + v\frac{dw}{dy} + w\frac{dw}{dz}, \end{aligned} \right.$$

et, par conséquent,

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} &= X - \frac{du}{dt} - u\frac{du}{dx} - v\frac{du}{dy} - w\frac{du}{dz},\\ \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy} &= Y - \frac{dv}{dt} - u\frac{dv}{dx} - v\frac{dv}{dy} - w\frac{dv}{dz},\\ \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} &= Z - \frac{dw}{dt} - u\frac{dw}{dx} - v\frac{dw}{dy} - w\frac{dw}{dz}.\end{aligned}\right.$$

741. Il reste encore à trouver deux équations d'équilibre ou une seule si ρ est constante. Nous trouverons cette équation en exprimant que le fluide est continu.

Concevons dans l'espace occupé par le fluide un petit parallélipipède *me* (*fig.* 180, p. 286). A chaque instant une partie du fluide sort de ce volume, et une autre y entre. La masse du fluide contenue dans ce parallélipipède, $\rho\,dx\,dy\,dz$, au temps t, devient $\left(\rho + \frac{d\rho}{dt}\right) dx\,dy\,dz$ au temps $t + dt$. L'accroissement de masse est donc $\frac{d\rho}{dt}\,dt\,dx\,dy\,dz$. En vertu du mouvement il passe par la face $dy\,dz$ une tranche fluide $\rho u\,dt\,dy\,dz$. Il passe par la face opposée une masse $\left(\rho u + \frac{d\rho u}{dx}\right) dt\,dy\,dz$. L'excès de la quantité qui entre sur celle qui sort est donc $-\frac{d\rho u}{dx}\,dx\,dy\,dz\,dt$, en supposant ρu constant dans toute l'étendue de la face *mabg* et de sa parallèle. Or cette supposition est permise, car si l'on considère deux points h et k pris sur les faces *md* et *ae*, la différence des valeurs de ρu en ces deux points surpasse la différence des valeurs de ρu aux points m et a d'une quantité infiniment petite par rapport à elle-même. On obtiendrait des expressions analogues pour les quantités de fluide acquises par les autres faces. En exprimant que l'accroissement total de la masse est égal à $\frac{d\rho}{dt}\,dx\,dy\,dz$ et divisant par $dx\,dy\,dz\,dt$,

on aura donc

$$(4)\qquad \frac{d\rho}{dt}+\frac{d\rho u}{dx}+\frac{d\rho v}{dy}+\frac{d\rho w}{dz}=0.$$

Cette équation est connue sous le nom d'*équation de continuité.*

742. Si la densité du fluide est constante, ce qui arrive pour les liquides homogènes et incompressibles, l'équation précédente devient

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0.$$

Elle suffit avec les équations (3) pour déterminer toutes les inconnues en fonction de x, y, z, t.

743. Si le fluide est incompressible, mais non homogène, la densité de chaque molécule est variable dans le cours de son mouvement; mais elle varie à chaque instant avec le temps dans un point déterminé et fixe m. La densité ρ au point m sera donc une fonction des coordonnées de ce point et du temps; mais on peut considérer momentanément x, y, z comme représentant les coordonnées d'une même molécule dans son mouvement. Ces coordonnées deviennent fonction de t, et leurs dérivées par rapport à cette dernière variable sont respectivement u, v, w. En différentiant la valeur de ρ sous ce point de vue, on aura donc

$$(5)\qquad \frac{d\rho}{dt}+\frac{d\rho}{dx}u+\frac{d\rho}{dy}v+\frac{d\rho}{dz}w=0.$$

En vertu de cette relation, l'équation (4) revient aux deux suivantes :

$$(6)\qquad \frac{d\rho}{dt}+u\frac{d\rho}{dx}+v\frac{d\rho}{dy}+w\frac{d\rho}{dz}=0,$$

$$(7)\qquad \frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0,$$

qui, jointes aux équations (3), serviront à déterminer les cinq inconnues u, v, w, p, ρ en fonction de x, y, z, t.

744. Dans le cas d'un fluide élastique et compressible, comme l'air, on aura encore cinq équations en joignant aux équations (3) et (4) la relation $p = k\rho$ qui existe entre la pression et la densité, le coefficient k ne dépendant que de la température de la masse gazeuse.

745. Ces équations suffisent pour déterminer le mouvement si le fluide est indéfini et si l'on connaît son état initial, c'est-à-dire les valeurs de u, v, w, p, ρ en fonction de x, y, z et pour $t = 0$. Mais si le fluide est terminé, il faut y joindre des conditions particulières. On suppose que les molécules en contact avec une paroi fixe ou mobile y restent indéfiniment et que les molécules qui appartiennent à la surface libre ne cessent jamais d'en faire partie. Soit $f(t, x, y, z) = 0$ l'équation d'une surface sur laquelle un point du fluide doit toujours demeurer. On a

$$f(t + dt,\ x + u\,dt,\ y + v\,dt,\ z + w\,dt) = 0,$$

équation qui exprime que la molécule sera encore sur cette surface au bout du temps $t + dt$, et qui donne

$$\frac{df}{dt} + u\frac{df}{dx} + v\frac{df}{dy} + w\frac{df}{dz} = 0.$$

Si la paroi est fixe, $\frac{df}{dt}$ disparaît, et l'équation se reduisant à

$$\frac{df}{dx}u + \frac{df}{dy}v + \frac{df}{dz}w = 0$$

montre que la vitesse du point est à chaque instant dirigée suivant une tangente à la surface.

Il reste à considérer la surface libre du liquide, ordinairement soumise à une pression ϖ qui est la même pour tous les points, mais qui peut varier avec le temps. On

aura pour cette surface $p - \varpi = 0$, d'où

$$\frac{dp}{dt} + u\frac{dp}{dx} + v\frac{dp}{dy} + w\frac{dp}{dz} = \frac{d\varpi}{dt},$$

équation qui détermine ϖ.

746. On a considéré jusqu'ici x, y, z comme étant les coordonnées d'un point déterminé pris à volonté dans l'espace occupé par la masse fluide. Si l'on veut obtenir le mouvement d'une molécule particulière, ses coordonnées x, y, z cesseront d'être des variables indépendantes. Elles dépendent du temps, et pour les connaître il faudra intégrer les équations simultanées,

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w,$$

après y avoir remplacé u, v, w par leurs valeurs générales en fonction de x, y, z obtenues comme on l'a dit précédemment. Les valeurs de x, y, z renfermeront comme constantes arbitraires les coordonnées initiales de la molécule.

747. Lorsque u, v, w sont telles, que l'on ait

$$udx + vdy + wdz = d\varphi,$$
$$Xdx + Ydy + Zdz = dV,$$

on a (740)

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = \frac{dV}{dx} - \frac{d^2\varphi}{dx\,dt} - \frac{d\varphi}{dx}\frac{d^2\varphi}{dx^2} - \frac{d\varphi}{dy}\frac{d^2\varphi}{dx\,dy} - \frac{d\varphi}{dz}\frac{d^2\varphi}{dx\,dz},$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy} = \frac{dV}{dy} - \frac{d^2\varphi}{dy\,dt} - \frac{d\varphi}{dx}\frac{d^2\varphi}{dx\,dy} - \frac{d\varphi}{dy}\frac{d^2\varphi}{dy^2} - \frac{d\varphi}{dz}\frac{d^2\varphi}{dy\,dz},$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} = \frac{dV}{dz} - \frac{d^2\varphi}{dz\,dt} - \frac{d\varphi}{dx}\frac{d^2\varphi}{dz\,dx} - \frac{d\varphi}{dy}\frac{d^2\varphi}{dy\,dz} - \frac{d\varphi}{dz}\frac{d^2\varphi}{dz^2};$$

d'où, en multipliant par dx, dy, dz et ajoutant, on a

$$\frac{dp}{\rho} = dV - d\frac{d\varphi}{dt} - \frac{1}{2}d\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right].$$

Les différentielles sont prises par rapport à x, y, z sans faire varier t.

Si le fluide est homogène, on a

$$\int \frac{dp}{\rho} = \mathrm{P},$$

et, en intégrant l'équation précédente,

$$\mathrm{V} - \mathrm{P} = \frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right].$$

Il faut y joindre l'équation

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{d\left(\rho \frac{d\varphi}{dx}\right)}{dx} + \frac{d\left(\rho \frac{d\varphi}{dy}\right)}{dy} + \frac{d\left(\rho \frac{d\varphi}{dz}\right)}{dz} = 0,$$

qui devient, pour un fluide incompressible,

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0.$$

MOUVEMENT D'UN FLUIDE DANS UNE HYPOTHÈSE PARTICULIÈRE.

748. Quand un liquide homogène est renfermé dans un vase et s'écoule par un orifice horizontal pratiqué au fond du vase, l'expérience montre que les molécules situées dans une même tranche horizontale à un certain instant, y restent constamment tant qu'elles ne sont pas très-voisines de l'orifice : en d'autres termes, les tranches horizontales infiniment minces se remplacent successivement en demeurant parallèles à elles-mêmes. On peut négliger les vitesses horizontales, lorsque les sections varient peu dans toute l'étendue du vase et que leurs dimensions sont très-petites par rapport à la hauteur. Il n'y a plus alors que deux inconnues, la vitesse verticale d'une tranche et la pression, à déterminer en fonction de la distance de la tranche à un plan horizontal et du temps.

Prenons l'axe des x vertical et dans le sens de la pesanteur. En conservant les notations du n° 739, nous aurons

$$X = g, \quad Y = 0, \quad Z = 0.$$

L'équation $\frac{dp}{dx} = \rho(X - u')$ (740) deviendra

$$(1) \qquad \frac{dp}{dx} = \rho\left(g - \frac{du}{dt} - u\frac{du}{dx}\right),$$

et les deux autres équations (1) du n° 740 se réduiront à

$$\frac{dp}{dy} = 0, \quad \frac{dy}{dz} = 0,$$

car on a

$$Y = 0, \quad v' = 0, \quad Z = 0, \quad w' = 0.$$

On exprimera bien simplement l'hypothèse du parallélisme des tranches en égalant la quantité de liquide qui passe par une tranche quelconque à celle qui sort par l'orifice pendant le temps dt. Soient ω la section de la tranche à la hauteur x, Ω l'aire de l'orifice et U la vitesse des molécules à cet orifice. Les quantités de liquide qui passent par les aires ω et Ω pendant le temps dt sont $\omega u\,dt$ et $\Omega U\,dt$: on doit donc avoir

$$(2) \qquad u = \frac{\Omega U}{\omega}.$$

Les vitesses u et U se rapportent au même temps t. U est une fonction de t seulement, u une fonction de x et de t. Éliminant u entre (1) et (2), on a

$$(3) \qquad \frac{dp}{dx} = \rho\left(g - \frac{\Omega}{\omega}\frac{dU}{dt} + \frac{\Omega^2 U^2}{\omega^3}\frac{d\omega}{dx}\right),$$

et, en intégrant par rapport à x,

$$(4) \qquad p = C + g\rho x - \rho\Omega\frac{dU}{dt}\int\frac{dx}{\omega} - \rho^2\frac{\Omega^2 U^2}{2\omega^2},$$

C est une quantité indépendante de x, mais qui peut être une fonction de t.

Soient P la pression constante exercée sur la surface supérieure du liquide et P′ la pression à l'orifice. On aura $P = P'$ si tout l'appareil est dans le même milieu. Soient h la distance du niveau au plan des xy et l la distance du niveau à l'orifice. On aura $p = P$ pour $x = h$, d'où

$$C = P - g\rho h + \rho\frac{\Omega^2 U^2}{2 O^2},$$

en appelant O la section du vase à la hauteur du niveau, et par suite

$$(5)\quad p = P + g\rho(x - h) - \rho\Omega\frac{dU}{dt}\int_h^x \frac{dx}{\omega} - \rho\frac{\Omega^2 U^2}{2}\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{O^2}\right).$$

Pour $x = h + l$ on a $p = P'$, $\omega = \Omega$, et si l'on pose

$$\int_h^{h+l}\frac{dx}{\omega} = m, \quad P - P' = g\rho\delta,$$

il vient

$$(6)\qquad g(l + \delta) = m\Omega\frac{dU}{dt} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\Omega^2}{O^2}\right)U^2.$$

Mais ici nous développerons deux cas, suivant que le niveau du liquide sera constant ou variable.

NIVEAU CONSTANT.

749. On tire de l'équation (6)

$$(7)\qquad dt = \frac{2m\Omega\, dU}{k^2 - a^2 U^2},$$

en posant

$$-\frac{\Omega^2}{O^2} = a^2, \quad 2g(l + \delta) = k^2.$$

En intégrant l'équation (7), on a

$$t = \frac{m\Omega}{k\alpha}\,\mathrm{l}\,\frac{1}{c}\left(\frac{k+\alpha U}{k-\alpha U}\right).$$

Si l'on suppose les vitesses nulles pour $t = 0$, on aura $c = 1$, et l'équation résolue par rapport à U devient

$$U = \frac{k}{\alpha}\,\frac{1 - e^{-\frac{k\alpha t}{m\Omega}}}{1 + e^{-\frac{k\alpha t}{m\Omega}}}.$$

U étant déterminée, on connaîtra u par l'équation $u = \frac{\Omega U}{\omega}$ et p par l'équation (5).

750. La valeur de U montre qu'après un certain temps, d'autant plus court que Ω est plus petit, cette quantité sera sensiblement constante et égale à $\frac{k}{\alpha}$ ou à $\sqrt{\frac{2g(l+\delta)}{1-\frac{\Omega^2}{O^2}}}$: u et p convergent vers des limites correspondantes.

Si l'on néglige le carré de $\frac{\Omega}{O}$, la limite de la vitesse sera $\sqrt{2g(l+\delta)}$ ou $\sqrt{2gl}$ quand δ sera nul, c'est-à-dire si la pression extérieure est la même à l'orifice et au niveau du liquide. Cette vitesse est donc la même que celle qu'acquerrait un corps pesant en tombant dans le vide d'une hauteur égale à celle du liquide dans le vase. Ce résultat constitue ce qu'on appelle le *principe de Torricelli*.

751. Quand la vitesse U est devenue constante, on a

$$\frac{dU}{dt} = 0,$$

et l'équation (5) se réduit à

$$p = P + g\rho(x-h) - \rho\,\frac{\Omega^2 U^2}{2}\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{O^2}\right):$$

or, dans l'état d'équilibre, la pression serait égale à $P + g\rho(x - h)$: elle est donc moindre, dans l'état de mouvement, pour les sections telles que l'on ait $\omega < O$, c'est-à-dire pour celles dont l'aire est moindre que la surface libre du liquide. Elle est au contraire plus grande pour les sections dont les aires sont plus grandes que O.

752. Le volume V du liquide qui est sorti du vase au bout du temps t s'obtient en intégrant $\Omega U dt$ entre les limites o et t. On aura

$$V = \frac{2m}{\frac{1}{\Omega^2} - \frac{1}{O^2}}\, l\, \frac{e^{\frac{kat}{2m\Omega}} + e^{-\frac{kat}{2m\Omega}}}{2}.$$

Au bout d'un certain temps, on pourra négliger la seconde exponentielle, et l'on aura sensiblement, en mettant pour k sa valeur $\sqrt{2g(l+\delta)}$,

$$V = \frac{\sqrt{2g(l+\delta)}}{\sqrt{\frac{1}{\Omega^2} - \frac{1}{O^2}}}\, t - \frac{2m\, l\, 2}{\frac{1}{\Omega^2} - \frac{1}{O^2}}.$$

Le premier terme du second membre est le volume qui serait sorti si la vitesse avait été dès l'origine égale à sa limite.

NIVEAU VARIABLE.

753. Dans ce cas m et O sont des fonctions connues de h par l'équation

$$h + l = a,$$

a désignant la distance constante de l'orifice à l'origine des x. Il faudra exprimer que la quantité de liquide écoulée dans un intervalle de temps dt est égale au volume compris entre les deux niveaux correspondants au

commencement et à la fin de cet intervalle. On a ainsi l'équation

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\Omega U}{O}.$$

L'équation (6) devient, en remplaçant l par $a - h$,

$$g(a + \delta - h) = m\Omega \frac{dU}{dt} + \frac{1}{2}\Omega U^2\left(\frac{1}{\Omega^2} - \frac{1}{O^2}\right).$$

En éliminant dt entre ces deux équations et posant $U^2 = 2gz$, on aura

$$\frac{dz}{dh} + \frac{O}{m}\left(\frac{1}{\Omega^2} - \frac{1}{O^2}\right)z + \frac{O}{m\Omega^2}(h - a - \delta) = 0,$$

équation linéaire qu'on sait intégrer. Lorsque z sera connu en fonction de h, on connaîtra U et par suite t. La quantité de liquide écoulée se déterminera en calculant le volume du vase compris entre le niveau initial et le niveau variable.

754. Si l'orifice Ω est très-petit, l'équation (6) se réduit à

$$U^2 = 2g(l + \delta),$$

ce qui donne pour U la vitesse limite que nous avons trouvée pour $t = \infty$. La vitesse que donne l'expérience est moindre que celle calculée par cette formule, dans le rapport de 0,62 à 1, rapport à peu près constant.

MOUVEMENT PERMANENT D'UN LIQUIDE

755. Il peut arriver qu'un liquide soit animé d'un mouvement permanent, c'est-à-dire tel, qu'en un point quelconque la pression soit toujours la même et que la vitesse de chaque molécule qui passe par ce point soit aussi constante en grandeur et en direction; d'où il suit que des molécules qui à des époques différentes occupent une même position parcourent la même trajectoire d'une manière identique.

Le principe de d'Alembert fournit les trois équations

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dp}{dx} &= \rho\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right),\\ \frac{dp}{dy} &= \rho\left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right),\\ \frac{dp}{dz} &= \rho\left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right), \end{aligned}\right.$$

qui expriment que les forces perdues se font équilibre dans la masse fluide; p désigne la pression en un point quelconque m, dont les coordonnées x, y, z sont considérées comme des variables indépendantes. La molécule fluide μ qui passe par ce point m, au bout du temps t, a aussi pour coordonnées x, y, z à cette époque; et si l'on suit cette molécule dans son mouvement, ses coordonnées deviennent des fonctions du temps et prennent après le temps dt qui succède au temps t des accroissements qu'on désigne par dx, dy, dz. Les composantes de la force effective sont $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$, x, y, z étant, comme nous le disons, fonctions de t pour la molécule mobile que l'on considère, ce que nous supposerons toujours dans ce qui va suivre.

En multipliant les trois équations (1) respectivement par dx, dy, dz, on obtient

$$dp = \rho(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) - \rho\,\frac{(dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z)}{dt^2}$$

ou

$$(2)\qquad dp = \rho(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) - \frac{\rho}{2}\,dv^2$$

v est la vitesse de la molécule μ à l'époque t où elle passe au point m, et dp est l'accroissement de la pression quand on passe du point m au point où arrive cette molécule après le temps dt, la pression en un même point étant toujours indépendante du temps.

756. Cette équation peut s'appliquer à un liquide pesant, dont le niveau est entretenu à une hauteur constante et qui s'écoule hors du vase qui le contient par un orifice pratiqué à sa partie inférieure. On a pour le mouvement d'une molécule quelconque, en prenant l'axe des z vertical et dirigé dans le sens de la pesanteur,

$$(3) \qquad dp = g\rho dz - \frac{1}{2}\rho dv^2.$$

En intégrant entre deux points quelconques de la trajectoire dont les distances au plan des xy soient z_0 et z, il vient

$$(4) \qquad p - p_0 = g\rho(z - z_0) - \frac{1}{2}\rho(v^2 - v_0^2),$$

p_0 et v_0 étant la pression et la vitesse au premier point, p et v au second.

757. Supposons que la surface supérieure du liquide soit plane et soumise en tous ses points à une pression égale et constante P_0. Si nous faisons dans l'équation (3) $z_0 = 0$, $p_0 = P_0$, le premier des deux points que l'on considère sera pris à la surface supérieure du liquide, et l'on aura

$$p - P_0 = g\rho z - \frac{1}{2}\rho(v^2 - v_0^2).$$

Si le vase est percé d'un petit orifice à la partie inférieure à une distance h au-dessous du niveau supérieur, on peut admettre que tous les points qui passent par cet orifice ont la même vitesse v, en sorte que pour $x = h$ il n'y ait qu'une valeur de v. En désignant par P la pression extérieure qui s'exerce à l'orifice, on aura

$$P - P_0 = g\rho h - \frac{1}{2}\rho(v^2 - v_0^2)$$

ou

$$v^2 - v_0^2 = 2g(h + k),$$

en posant $P_0 - P = g\rho k$, k devant être positive ou négative suivant que P est plus petite ou plus grande que P_0.

On voit que la vitesse v_0 doit être la même pour toutes les molécules situées à la surface supérieure du liquide.

Soient ω l'aire de l'orifice et Ω l'aire de la section du vase par le plan du niveau supérieur : on a

$$\omega v dt = \Omega v_0 dt;$$

car la quantité de liquide qui sort du vase par l'orifice ω pendant le temps dt et qui a pour expression $\omega v dt$, la direction de la vitesse v étant sensiblement verticale, est égale à une tranche de liquide située à la partie supérieure ayant pour base l'aire Ω et pour hauteur $v_0 dt$, la vitesse v_0 étant aussi verticale.

On a donc

$$v_0 = \frac{\omega}{\Omega} v$$

et

$$v^2\left(1 - \frac{\omega^2}{\Omega^2}\right) = 2g(h + k),$$

d'où

$$v = \sqrt{\frac{2g(h + k)}{1 - \frac{\omega^2}{\Omega^2}}}.$$

758. Si le rapport $\frac{\omega}{\Omega}$ est très-petit, on a à très-peu près

$$v = \sqrt{2g(h + k)}:$$

et si la pression est sensiblement la même à la partie supérieure du liquide et à l'orifice, on a

$$v = \sqrt{2gh},$$

en négligeant k.

CINQUANTE-SEPTIÈME LEÇON.

VIBRATIONS DES GAZ DANS LES TUYAUX CYLINDRIQUES.

Équation du mouvement. — Cas du tuyau indéfini dans les deux sens. — Tuyau fermé à une extrémité et indéfini dans un sens. — Tuyau indéfini dans un sens et ouvert dans un milieu gazeux de densité constante. — Tuyau limité ouvert à ses deux extrémités.

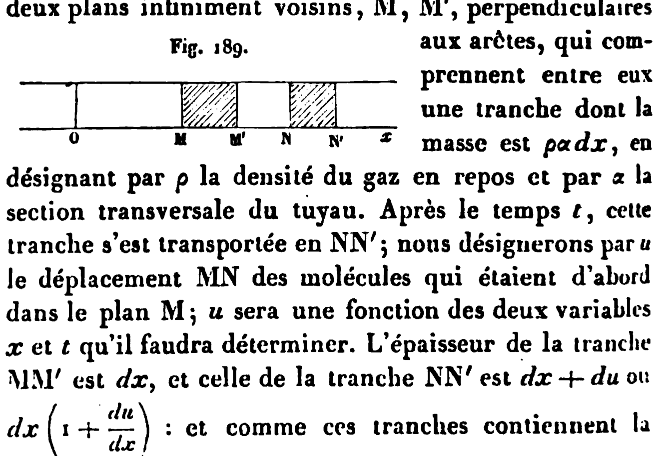
ÉQUATION DU MOUVEMENT.

759. Dans l'état naturel d'équilibre d'un gaz, sa force élastique ϖ est égale à gmh, g étant la pesanteur, m la densité du mercure et h la hauteur de la colonne de mercure qui fait équilibre à la pression de ce gaz.

Nous supposons que les molécules du fluide en repos qui sont dans un même plan perpendiculaire aux arêtes du tuyau, se déplacent d'un mouvement commun parallèlement aux arêtes.

Soient x et $x + dx$ les distances à un point fixe de deux plans infiniment voisins, M, M', perpendiculaires aux arêtes, qui comprennent entre eux une tranche dont la masse est $\rho\alpha dx$, en désignant par ρ la densité du gaz en repos et par α la section transversale du tuyau.

Fig. 189.



Après le temps t, cette tranche s'est transportée en NN'; nous désignerons par u le déplacement MN des molécules qui étaient d'abord dans le plan M; u sera une fonction des deux variables x et t qu'il faudra déterminer. L'épaisseur de la tranche MM' est dx, et celle de la tranche NN' est $dx + du$ ou $dx\left(1 + \frac{du}{dx}\right)$: et comme ces tranches contiennent la

même masse de gaz, les forces élastiques du gaz en M et en N doivent, d'après la loi de Mariotte, être en raison inverse des volumes des deux tranches, et par conséquent de leurs épaisseurs, ce qui donne, en appelant p la force élastique ou la pression du gaz en N rapportée à l'unité de surface,

$$\frac{p}{\varpi} = \frac{dx}{dx + du} = \frac{1}{1 + \frac{du}{dx}}$$

ou

$$p = \varpi\left(1 - \frac{du}{dx}\right),$$

en négligeant le carré de la *dilatation* $\frac{du}{dx}$ qui est très-petite.

La pression sur la face N de la tranche NN′ étant αp ou $\alpha\varpi\left(1 - \frac{du}{dx}\right)$, on aura la pression $\alpha p'$ sur l'autre face en changeant x en $x + dx$ dans l'expression de αp, ce qui donne

$$\alpha p' = \alpha\varpi\left(1 - \frac{du}{dx} - \frac{d^2 u}{dx^2}\,dx\right).$$

La différence de ces deux pressions $\alpha\varpi\frac{d^2 u}{dx^2}\,dx$ est la force motrice de la masse de gaz comprise dans la tranche NN′, masse égale à $\rho\alpha dx$. En divisant la force motrice par la masse, on aura pour l'expression de la force accélératrice

$$\frac{\varpi}{\rho}\,\frac{d^2 u}{dx^2}.$$

Si la tranche n'était pas considérée comme solide, cette force accélératrice serait celle du centre de gravité de cette tranche NN′, en y supposant toute la masse réunie. Or on peut dire que ce centre se meut comme la base N dont il est infiniment voisin.

Si la tranche est sollicitée encore par une force accélératrice étrangère, on aura pour force accélératrice $\frac{\varpi}{\rho}\frac{d^2u}{dx^2}+X$, qu'il faudra égaler à $\frac{d^2(x+u)}{dt^2}$ ou simplement à $\frac{d^2u}{dt^2}$, puisque x ne varie pas avec t.

On a donc pour le mouvement d'une tranche l'équation

$$\frac{d^2u}{dt^2}=\frac{\varpi}{\rho}\frac{d^2u}{dx^2}+X,$$

et, s'il n'y a pas de force étrangère,

$$\frac{d^2u}{dt^2}=\frac{\varpi}{\rho}\frac{d^2u}{dx^2}$$

ou

$$(1)\qquad \frac{d^2u}{dt^2}=a^2\frac{d^2u}{dx^2},$$

en posant

$$a^2=\frac{\varpi}{\rho}=\frac{gmh}{\rho}.$$

CAS DU TUYAU INDÉFINI DANS LES DEUX SENS.

760. L'intégrale de l'équation (1) est

$$(2)\qquad u=\varphi(x+at)+\psi(x-at).$$

On déterminera les fonctions φ et ψ si l'on connaît le déplacement initial u pour $t=0$ de chaque tranche à partir de sa position d'équilibre et sa vitesse initiale $\frac{du}{dt}$, qui seront des fonctions données de x. Mais, au lieu du déplacement u pour $t=0$, nous supposerons donnée la dilatation initiale $\frac{du}{dx}$ pour $t=0$. Ainsi l'on doit avoir pour $t=0$

$$\frac{du}{dx}=f(x)\quad \text{et}\quad \frac{du}{dt}=f_1(x).$$

Or la formule (2) donne

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{du}{dx} = \varphi'(x+at) + \psi'(x-at), \\ \dfrac{du}{dt} = a[\varphi'(x+at) - \psi'(x-at)]. \end{cases}$$

En faisant $t = 0$, on aura

$$\varphi'(x) + \psi'(x) = f(x),$$

$$\varphi'(x) - \psi'(x) = \frac{1}{a} f_1(x),$$

et conséquemment

$$(4)\quad \begin{cases} \varphi'(x) = \dfrac{1}{2}\left[f(x) + \dfrac{1}{a} f_1(x)\right], \\ \psi'(x) = \dfrac{1}{2}\left[f(x) - \dfrac{1}{a} f_1(x)\right]. \end{cases}$$

761. Supposons que la partie primitivement ébranlée s'étende de $x = 0$ à $x = l$ seulement. Alors les fonctions $f(x)$ et $f_1(x)$, et par conséquent aussi $\varphi'(x)$ et $\psi'(x)$ sont nulles pour toutes les valeurs de x non comprises entre 0 et l.

Fig. 190.

D' C' O L C D

Considérons d'abord un point situé au delà de l'ébranlement initial OL du côté des x positives. Son x étant plus grande que l, $x + at$ sera *à fortiori* plus grande que l, t étant positif; on aura par conséquent

$$\varphi'(x+at) = 0$$

et

$$\frac{du}{dx} = \psi'(x-at),$$

$$\frac{du}{dt} = -a\psi'(x-at),$$

et pour que ces valeurs de $\frac{du}{dx}$ et $\frac{du}{dt}$ ne soient pas nulles,

il faut que $x - at$ soit comprise entre o et l, ou qu'on ait $x > at$ et $x < at + l$, c'est-à-dire qu'au bout du temps t il n'y a de mouvement au delà de OL que dans une portion CD du tuyau d'une longueur égale à l. Cette portion, qu'on appelle *onde*, est constituée d'une manière invariable qui ne dépend que de la fonction ψ'. Elle s'éloigne indéfiniment de OL avec une vitesse constante a; il ne faut pas confondre ce déplacement de l'onde avec le mouvement d'une molécule qui ne dure que pendant le temps $\frac{l}{a}$; car il résulte de $x - at > o$ et $< l$ qu'une même molécule ne commence à se mouvoir qu'après un temps égal à $\frac{x-l}{a}$ et ne revient au repos qu'après un temps égal à $\frac{x}{a}$.

Pour une tranche quelconque de cette onde, il y a un rapport constant a entre la vitesse et la dilatation, car on a la relation

$$\frac{du}{dt} = -a\frac{du}{dx}.$$

762. Pour les points à gauche de l'origine O, x étant négative, on a

$$\psi'(x - at) = o$$

et

$$\frac{du}{dx} = \varphi'(x + at), \quad \frac{du}{dt} = a\varphi'(x + at);$$

d'ailleurs $\varphi'(x + at)$ est nulle quand x n'est pas comprise entre $-at$ et $-at + l$.

Le mouvement se propage donc aussi vers les x négatives par une onde C'D' dont la nature dépend de la fonction φ' et qui se transporte à gauche du point O avec une vitesse uniforme égale à a.

Une même molécule est en mouvement pendant un intervalle de temps égal à $\frac{l}{a}$, depuis $t > \frac{-x}{a}$ jusqu'à

$t < \frac{l-x}{a}$. Dans chaque tranche on a la relation

$$\frac{du}{dt} = a\frac{du}{dx}.$$

763. Quant aux points situés entre O et L, $\frac{du}{dx}$ et $\frac{du}{dt}$ dépendent d'abord des deux fonctions $\varphi'(x+at)$ et $\psi'(x-at)$. Ces deux fonctions s'annulent dès que t surpasse $\frac{l}{a}$, de sorte qu'après ce temps-là toute la partie OL reste en repos, et il y a deux ondes qui s'en éloignent à droite et à gauche, comme nous l'avons dit.

Le mouvement se propagerait par une seule de ces deux ondes, si l'ébranlement initial était tel, qu'on eût, dans la partie OL, $\varphi'(x) = 0$ ou $\psi'(x) = 0$, ce qui, d'après les formules (4), revient à supposer la relation

$$\frac{du}{dt} = -a\frac{du}{dx}. \quad \text{ou} \quad \frac{du}{dt} = a\frac{du}{dx} \quad \text{pour} \quad t = 0.$$

764. Si l'ébranlement initial avait lieu dans plusieurs parties du tuyau séparées par des intervalles en repos, il suffirait de supposer les fonctions $\varphi'(x)$ et $\psi'(x)$ nulles dans ces intervalles pour rentrer dans le cas qui précède d'un ébranlement limité; chaque partie ébranlée doit donner naissance à deux ondes qui s'en vont à droite et à gauche avec la vitesse uniforme a.

TUYAU FERMÉ A UNE EXTRÉMITÉ ET INDÉFINI DANS UN SENS.

765. En prenant pour origine des x l'extrémité fermée, on aura la condition $\frac{du}{dt} = 0$ pour $x = 0$,

Fig. 191.

L' K' O L K

quel que soit t. Les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ ne sont données que pour les valeurs de x positives.

La condition $\frac{du}{dt} = 0$ pour $x = 0$ donnera, quel que soit t (positif ou négatif si l'on veut que les états antérieurs à l'origine du temps soient représentés aussi bien que ceux qui suivent),

$$\varphi'(at) - \psi'(-at) = 0,$$

ou, en désignant par z une variable quelconque, positive ou négative,

$$(5) \qquad \varphi'(z) = \psi'(-z).$$

Cette équation détermine les fonctions φ' et ψ' pour les valeurs négatives de la variable, ces fonctions étant données pour les valeurs positives.

Les valeurs (3) de $\frac{du}{dx}$ et de $\frac{du}{dt}$ ainsi déterminées pour des valeurs quelconques de x et de t sont les mêmes que si le tuyau, n'étant pas fermé en O, s'étendait indéfiniment dans les deux sens, l'état initial étant choisi du côté où l'on prolonge le tuyau de la manière qui vient d'être indiquée.

Dans cette hypothèse, en changeant x en $-x$ dans les formules (4), on aura, pour la dilatation et la vitesse de la tranche qui répond à l'abscisse $-x$, en ayant égard à la relation (5),

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{-x} = \varphi'(-x + at) + \psi'(-x - at)$$
$$= \psi'(x - at) + \varphi'(x + at) = \left(\frac{du}{dx}\right)_x,$$
$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{-x} = a[\varphi'(-x + at) - \psi'(-x - at)]$$
$$= a[\psi'(x - at) - \varphi'(x + at)] = -\left(\frac{du}{dt}\right)_x.$$

Ainsi dans deux sections à égales distances de l'origine O, la dilatation est la même et les vitesses sont égales et de signes contraires.

Il suffit que cette propriété ait lieu à l'origine du temps pour qu'elle ait lieu à une époque quelconque; car pour qu'elle ait lieu quand $t = 0$, on retrouve la condition

$$\varphi'(z) = \psi'(-z).$$

766. Si l'ébranlement initial est renfermé dans un espace limité KL entre les abscisses k et $k + l$, il donnera naissance à deux ondes animées des vitesses a et $-a$, et, d'après ce qui précède, il y aura deux ondes symétriques de celles-ci, s'écartant à droite et à gauche de l'intervalle K′L′ symétrique de KL.

Celles qui s'éloignent de l'origine O n'éprouveront aucune altération. Quant aux deux autres, elles arriveront en même temps en O, et, continuant leur route, elles se composeront en se pénétrant, de sorte que les valeurs de $\frac{du}{dx}$ et $\frac{du}{dt}$ en un même point commun aux deux ondes seront les sommes des valeurs qu'elles ont dans chaque onde; puis ces deux ondes, après s'être traversées et séparées, continueront leur marche sans altération.

On voit, d'après leur symétrie, que l'effet produit dans le tuyau réel est le même que si les diverses tranches de l'onde, qui s'approche du plan fixe O, se repliaient sur elles-mêmes en conservant la même densité et prenant une vitesse égale en sens contraire. Après que toutes ces tranches seront arrivées en O, on aura une onde se dirigeant du côté des x positives, et qui ne sera autre chose que la première renversée, comme on vient de le dire. C'est en cela que consiste la réflexion du mouvement sur un plan fixe.

TUYAU INDÉFINI DANS UN SENS ET OUVERT DANS UN MILIEU GAZEUX DE DENSITÉ CONSTANTE.

767. On admet que la force élastique du gaz à l'ouverture O du tuyau est la même que celle du gaz extérieur

en repos, et par conséquent la dilatation $\frac{du}{dx}$ est nulle pour $x = 0$, à cause de $p = \varpi\left(1 - \frac{du}{dx}\right)$.

Il en résulte, quel que soit t,

$$\varphi'(at) + \psi'(-at) = 0$$

ou

$$\varphi'(z) + \psi'(-z) = 0. \tag{6}$$

En supposant le tuyau et le fluide prolongés indéfiniment à gauche de O, on aura, d'après les formules (5) et (6), pour la tranche dont l'abscisse est $-x$,

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{-x} = \varphi'(-x + at) + \psi'(-x - at)$$
$$= -\psi'(x - at) - \varphi'(x + at) = -\left(\frac{du}{dx}\right)_x,$$
$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{-x} = a\left[\varphi'(-x + at) - \psi'(-x - at)\right]$$
$$= a\left[-\psi'(x - at) + \varphi'(x + at)\right] = \left(\frac{du}{dt}\right)_x.$$

Ainsi, dans deux sections également distantes de l'origine, les vitesses sont égales et de même signe, et les dilatations égales et de signes contraires.

Il suit de là que si l'ébranlement initial n'a lieu que dans une étendue limitée, il y aura dans le tuyau réel une onde s'éloignant indéfiniment de l'origine, et dans le tuyau prolongé indéfiniment, deux autres ondes marchant vers l'origine, se pénétrant et se traversant sans s'altérer, de sorte que dans le tuyau réel à un instant quelconque se trouvera l'onde qui se dirigeait d'abord vers l'origine et qui s'y réfléchit ensuite de manière à former une nouvelle onde dirigée en sens contraire ; les vitesses dans les différentes sections sont les mêmes et de même sens que quand l'onde s'approchait de l'origine, tandis que la dilatation change de signe.

C'est en cela que consiste la réflexion du mouvement sur un milieu de densité constante.

TUYAU FERMÉ A SES DEUX EXTRÉMITÉS.

768. L'état du fluide dans ce tuyau fermé est toujours représenté par les formules (3) en supposant le tuyau et le fluide prolongés indéfiniment dans les deux sens. Mais ici il faut déterminer pour les valeurs quelconques de la variable x, les deux fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$, qui ne sont connues que pour les valeurs de x comprises entre o et l, l étant la longueur du tuyau fermé.

Il faut exprimer que la vitesse $\frac{du}{dt}$ est nulle pour $x=0$ et pour $x=l$, quel que soit t, ce qui donne, en faisant $at=z$,

$$\varphi'(z)=\psi'(-z),\quad \varphi'(l+z)=\psi'(l-z).$$

On connaît $\psi'(l-z)$, z étant entre o et l; donc on connaît aussi $\varphi'(l+z)$. Ainsi $\varphi'(z)$ est connue pour les valeurs de z plus petites que $2l$.

En changeant z en $l+z$ dans la seconde équation, elle donne

$$\varphi'(2l+z)=\psi'(-z),$$

et comme on a aussi

$$\varphi'(z)=\psi'(-z),$$

il s'ensuit

$$\varphi'(z)=\varphi'(2l+z).$$

La fonction $\varphi'(z)$ reprend donc la même valeur, quand la variable z augmente de $2l$. Il en est de même de $\psi'(-z)$, car la formule

$$\varphi'(z)=\psi'(-z)$$

donne

$$\psi'(-z-2l)=\varphi'(z+2l)=\varphi'(z)=\psi'(-z).$$

Il suit de la périodicité des fonctions φ' et ψ' que la dilatation et la vitesse redeviennent les mêmes en un même point du tuyau à des époques distantes les unes des autres d'un intervalle $T = \frac{2l}{a}$.

769. On peut encore établir ce fait en considérant que l'ébranlement initial donne naissance à deux ondes qui marchent en sens inverse et vont successivement se réfléchir aux deux extrémités suivant les lois qui ont été expliquées précédemment.

Après avoir subi deux réflexions et parcouru des chemins égaux à deux fois la longueur du tuyau, elles viennent, au bout d'un intervalle de temps égal à $\frac{2l}{a}$, reproduire, en se composant, l'état initial; et cet effet se répétera de nouveau indéfiniment.

TUYAU LIMITÉ OUVERT A SES DEUX EXTRÉMITÉS.

770. On doit avoir, quel que soit t, $\frac{du}{dx} = 0$ pour $x = 0$ et $x = l$, ce qui donne, quel que soit z,

$$\varphi'(z) + \psi'(-z) = 0, \quad \varphi'(l+z) + \psi'(l-z) = 0.$$

$\varphi'(z)$ et $\psi'(z)$ sont données pour les valeurs de z comprises entre 0 et l. Donc $\varphi'(l+z)$ est connue pour ces mêmes valeurs, d'après la deuxième équation. Et par conséquent $\varphi'(z)$ est connue depuis $z = 0$ jusqu'à $z = 2l$. En changeant z en $z + l$, cette deuxième équation donne

$$\varphi'(2l+z) + \psi'(-z) = 0,$$

et comme on a aussi

$$\varphi'(z) + \psi'(-z) = 0,$$

il en résulte

$$\varphi'(z) = \varphi'(2l+z);$$

et de même

$$\psi'(-z) = \psi'(-2l-z).$$

L'état du tuyau est donc encore périodique et redevient le même après chaque intervalle de temps égal à $\frac{2l}{a}$, conclusion qu'on peut déduire aussi de la réflexion des ondes.

TUYAU LIMITÉ OUVERT A UNE EXTRÉMITÉ ET FERMÉ A L'AUTRE.

771. On doit avoir, quel que soit t, $\frac{du}{dx}=0$ pour $x=0$, et $\frac{du}{dt}=0$ pour $x=l$; ce qui donne

$$\varphi'(z)+\psi'(-z)=0,\quad \varphi'(l+z)-\psi'(l-z)=0,$$

quel que soit z.

Ces équations déterminent les fonctions $\varphi'(z)$ et $\psi'(z)$ pour toutes les valeurs positives et négatives de z, quand on les connaît pour les valeurs positives plus petites que l.

La seconde équation donne

$$\varphi'(2l+z)=\psi'(-z)$$

et la première

$$\psi'(-z)=-\varphi'(z).$$

Donc

$$\varphi'(2l+z)=-\varphi'(z);$$

de sorte que la fonction $\varphi'(z)$ change de signe quand la variable augmente de $2l$: par conséquent si z augmente de $4l$, la fonction reprendra sa première valeur; car on aura

$$\varphi'(4l+z)=-\varphi'(2l+z)=\varphi'(z).$$

La fonction $\psi'(z)$ aura la même période $4l$, puisque

$$\varphi'(z)+\psi'(-z)=0.$$

Ainsi l'état du tuyau ne redevient le même qu'après un intervalle de temps égal à $\frac{4l}{a}$.

On arriverait à la même conclusion en considérant le mouvement des deux ondes qui proviennent de l'ébranlement initial, leurs réflexions successives aux deux extrémités du tuyau et leur retour aux parties primitivement ébranlées, après avoir parcouru des chemins égaux à $4l$ dans un temps égal à $\frac{4l}{a}$.

FIN DU COURS DE MÉCANIQUE.

NOTES.

NOTE I.

MÉMOIRE (*) SUR QUELQUES PROPOSITIONS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Le théorème de Carnot sur la perte de force vive qui a lieu dans un système dont certaines parties dénuées d'élasticité changent brusquement de vitesse en se choquant, a été étendu par quelques auteurs à tous les changements brusques de vitesse produits par des causes quelconques. La démonstration de Carnot n'étant pas fondée sur la considération des actions mutuelles développées entre les molécules dans le choc, semblait se prêter à cette extension de son principe. Mais, après un examen plus approfondi, plusieurs géomètres ont été conduits à juger cette démonstration de Carnot insuffisante, et à restreindre considérablement la généralité de son théorème. On savait déjà qu'il n'avait pas lieu dans le choc des corps élastiques : on a cru devoir le borner au cas des changements brusques de vitesse dus au choc proprement dit entre des corps dépourvus d'élasticité, en observant que pour ce cas même il ne donne qu'une partie de la perte de force vive du système, quand il y a frottement entre les corps en contact : qu'il faut d'ailleurs que les vitesses des points en contact dans le sens de la normale commune aux surfaces des deux corps qui se touchent soient les

(*) On n'a pas trouvé de rédaction suivie de ce Mémoire dans les papiers de M. Sturm, mais seulement des parties détachées, couvertes de ratures. On a réuni ici tous ces fragments, en s'aidant, pour les coordonner et les compléter, de l'analyse du Mémoire donnée par l'Auteur dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XIII, p. 1046

mêmes à la fin du choc, et qu'enfin les conditions ou liaisons géométriques auxquelles les points du système sont assujettis ne doivent pas changer de nature avec le temps. M. Poisson a remarqué qu'une explosion ou une production subite de forces qui séparerait brusquement des corps d'abord en contact, doit toujours donner lieu à une augmentation de forces vives dont l'expression est analogue à celle de la perte dans le théorème de Carnot.

S'il est certain que ce théorème ne peut pas s'appliquer à tous les changements très-rapides de vitesse, quelles qu'en soient les causes, il ne doit pas cependant être limité exclusivement au cas du choc des corps non élastiques. Le présent Mémoire a pour objet principal de faire voir qu'il a lieu dans d'autres circonstances qu'il est utile de connaître.

Considérons un système de points matériels en mouvement, sollicités par des forces quelconques et assujettis à des liaisons exprimées par des équations entre leurs coordonnées, qui ne renferment pas le temps explicitement. Soient m, m', m'', ..., les masses de ces points; x, y, z, les coordonnées du point m au bout du temps t; x', y', z', celles du point m', etc. : ces coordonnées se rapportant à trois axes rectangulaires fixes dans l'espace. Désignons par v la vitesse du point m au bout du temps t, et par a, b, c les composantes de cette vitesse parallèles aux axes fixes des x, y, z; soient de même v' la vitesse du point m' et a', b', c' ses composantes, et ainsi de suite. Enfin soient

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0, \ldots,$$

les équations qui ont lieu à chaque instant, pendant le temps t, entre les coordonnées x, y, z, x', ..., des points du système, sans contenir le temps explicitement.

Imaginons maintenant qu'à un instant donné, au bout d'un temps t, on établisse entre les points du système de nouvelles liaisons exprimées par les équations

$$L_1 = 0, \quad M_1 = 0, \quad N_1 = 0, \ldots;$$

et parmi lesquelles pourraient se trouver comprises les liaisons

$$L = o, \quad M = o, \quad N = o, \ldots,$$

qui avaient lieu précédemment ou seulement quelques-unes d'entre elles.

A l'instant où l'on assujettit le système à ces nouvelles conditions, la vitesse de chaque point du système changera brusquement soit en grandeur, soit en direction. Désignons par v_1 la nouvelle vitesse que prendra le point m qui avait auparavant la vitesse v, et par a_1, b_1, c_1 les composantes de v_1. Il résulte du principe de d'Alembert qu'à l'instant où commence le nouvel état du système, les quantités de mouvement telles que mv_1 que prennent les différents points étant considérées comme des forces et prises en sens contraire, doivent faire équilibre aux quantités de mouvement mv que ces points possédaient auparavant : de sorte qu'on a l'équation

$$(h) \quad \sum m[(a - a_1)\delta x + (b - b_1)\delta y + (c - c_1)\delta z] = o,$$

en désignant par δx, δy, δz, $\delta x'$, ..., les projections sur les axes des déplacements virtuels des points m, m', ..., compatibles avec les liaisons nouvelles

$$L_1 = o, \quad M_1 = o, \ldots.$$

Ainsi l'on peut donner à δx, δy, ... toutes les valeurs qui satisfont aux équations simultanées

$$(i) \quad \begin{cases} \dfrac{dL_1}{dx}\delta x + \dfrac{dL_1}{dy}\delta y + \dfrac{dL_1}{dz}\delta z + \dfrac{dL_1}{dx'}\delta x' + \ldots = o, \\ \dfrac{dM_1}{dx}\delta x + \dfrac{dM_1}{dy}\delta y + \dfrac{dM_1}{dz}\delta z + \dfrac{dM_1}{dx'}\delta x' + \ldots = o, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

En différentiant les mêmes équations $L_1 = o$, $M_1 = o$, .. par rapport au temps t, puis remplaçant $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, ...

par leurs valeurs actuelles a_1, b_1, c_1, . . . , on aura

$$(k)\begin{cases}\dfrac{dL_1}{dx}a_1 + \dfrac{dL_1}{dy}b_1 + \dfrac{dL_1}{dz}c_1 + \dfrac{dL_1}{dx'}a'_1 + \ldots = 0,\\ \dfrac{dM_1}{dx}a_1 + \dfrac{dM_1}{dy}b_1 + \dfrac{dM_1}{dz}c_1 + \dfrac{dM_1}{dx'}a'_1 + \ldots = 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{cases}$$

Au moyen des équations (i) on éliminera de l'équation (h) une partie des variations δx, δy, . . . , puis on égalera à zéro les quantités multipliées par chacune des variations restantes. Les équations qu'on obtiendra, jointes aux équations connues (k), fourniront la valeur des $3n$ inconnues a_1, b_1, c_1, . . . , qui n'y entrent que sous forme linéaire. On peut aussi combiner l'équation (h) avec les équations (i) par les équations

$$m(a_1 - a) = \lambda \frac{dL_1}{dx} + \mu \frac{dM_1}{dx} + \ldots,$$

$$m(b_1 - b) = \lambda \frac{dL_1}{dy} + \mu \frac{dM_1}{dy} + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

dont le nombre est triple du nombre n des points m, m', ... Ces équations et celles qui précèdent (k) donneront les valeurs des $3n$ inconnues a_1, b_1, c_1, . . . , et en outre celles des facteurs λ, μ, . . . qui font connaître les percussions que les liens du système éprouvent par le changement brusque des vitesses.

Les équations de condition

$$L_1 = 0, \quad M_1 = 0, \quad N_1 = 0, \ldots$$

étant par hypothèse indépendantes du temps, on voit que le mouvement effectif du système pendant l'instant dt qui succède au temps t est l'un des mouvements virtuels que les liaisons données lui permettent de prendre. En effet, les équations (i) sont vérifiées si l'on prend δx,

δy, δz.... proportionnelles aux composantes a_1, b_1, c_1, a'_1,... des vitesses réelles. On peut donc remplacer dans l'équation générale δx, δy, δz,... par a_1, b_1, c_1..... On a ainsi l'équation

$$\sum m\left[(a-a_1)a_1+(b-b_1)b_1+(c-c_1)c_1\right]=0,$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$\sum m(a^2+b^2+c^2)$$
$$=\sum m(a_1^2+b_1^2+c_1^2)+\sum m\left[(a-a_1)^2+(b-b_1)^2+(c-c_1)^2\right];$$

et comme $a-a_1$, $b-b_1$, $c-c_1$ sont les composantes de la vitesse perdue par le point m, quand on décompose sa vitesse v en v_1 et u_1, cette formule devient

$$\sum mv^2=\sum mv_1^2+\sum mu_1^2.$$

Elle signifie que *si les liaisons d'un système de points en mouvement sont changées à un instant donné, la somme des forces vives acquises avant cet instant surpasse celle qui a lieu immédiatement après, d'une quantité égale à la somme des forces vives correspondant aux vitesses perdues dans le passage du premier état du système au second* (*).

Quoique la formule précédente soit semblable à celle du théorème de Carnot sur la perte de force vive dans le choc des corps dénués d'élasticité, les deux propositions reposent sur des considérations assez différentes pour être distinguées l'une de l'autre. Les conséquences suivantes feront mieux ressortir cette différence.

(*) Ce théorème a été démontré par M. Duhamel dans une Note présentée à l'Académie des Sciences en 1832 et imprimée en 1835 dans le tome XV du *Journal de l'École Polytechnique*.

D'autres démonstrations ont été données en 1843 par M. Combes dans la lithographie de ses Leçons de Mécanique faites à l'École des Mines, et par M. Bertrand, dans les *Comptes rendus* de l'année 1856 (t. XLIII, p. 1108).

Rien n'empêche de supposer qu'à l'instant même où l'on établit les liaisons $L_1 = o$, $M_1 = o \ldots$, le système soit mis en mouvement par des percussions, c'est-à-dire par des forces d'une très-grande intensité agissant pendant un temps inappréciable sur les différents points m, $m', \ldots$, et capables de leur imprimer, *s'ils étaient libres*, les vitesses v, $v', \ldots$, qui se changent en v_1, $v'_1 \ldots$ par l'effet des liaisons $L_1 = o$, $M_1 = o, \ldots$ Chaque vitesse v se décomposant en v_1 et u_1, on aura toujours

$$\sum mv^2 = \sum mv_1^2 + \sum mu_1^2.$$

Considérons de nouveau un système de points en mouvement, m, $m', \ldots$, assujettis à des liaisons $L = o$, $M = o, \ldots$ indépendantes du temps; supposons qu'à un instant donné pour lequel ces points ont les vitesses v, $v' \ldots$ on établisse de nouvelles liaisons exprimées par les équations $L_1 = o$, $M_1 = o \ldots$, et parmi lesquelles se trouvent comprises toutes les anciennes liaisons. Appelons v_1 la vitesse que prendra le point m, qui avait auparavant la vitesse v. En décomposant cette vitesse v en v_1 et u_1, on a trouvé

$$\sum mv^2 - \sum mv_1^2 = \sum mu_1^2$$

ou

$$\sum mv^2 - \sum mv_1^2 = \sum m[(a - a_1)^2 + (b - b_1)^2 + (c - c_1)^2].$$

On déduit immédiatement des propositions qui précèdent quelques propriétés de mouvement déjà connues, qu'on avait démontrées par des calculs plus ou moins simples. Par exemple, si l'on considère un corps solide en mouvement autour d'un point fixe, la somme des forces vives de tous les points de ce corps à une époque quelconque de son mouvement est toujours plus grande que celle qu'on obtiendrait si, en conservant à chaque molécule sa vitesse actuelle, on fixait un point quelconque de

ce corps situé hors de cet axe instantané ou, en d'autres termes, si l'on forçait le corps à tourner autour d'un axe différent de son axe instantané. Il en est de même pour un mouvement initial. Si un corps solide retenu par un point fixe est mis en mouvement par des percussions, l'axe instantané autour duquel il commencera à tourner sera, parmi tous les axes passant par le point fixe qu'on peut imaginer dans le corps, celui pour lequel la somme des forces vives initiales est un maximum, c'est-à-dire que cette somme sera plus grande que celle que produiraient les mêmes percussions, si l'on assujettissait le corps à tourner autour d'un axe différent de l'*axe spontané*. Euler et Lagrange avaient dit que la somme des forces vives du corps tournant autour de son axe spontané, devait être un maximum ou un minimum. M. Delaunay a prouvé, par l'application de la méthode générale des maxima et minima, que cette force vive est toujours un maximum. Au reste, on obtient aisément cette proposition et une autre encore plus précise par la considération de la surface que M. Poinsot a nommée l'*ellipsoïde central*.

Le principe général donne de même, sans aucun calcul, cet autre théorème dû à M. Coriolis.

La somme des forces vives d'un système de points matériels à une époque quelconque de son mouvement est égale à la somme des forces vives que prendraient ces points, si, étant animés de leurs vitesses actuelles, ils venaient à former à cet instant un système de figure invariable assujetti aux mêmes conditions qu'auparavant, plus la somme des forces vives qu'auraient ces points en vertu des seules vitesses relatives par lesquelles ils s'écartent des positions qu'ils occuperaient dans le système solidifié.

La somme des forces vives dans le mouvement que prendrait le système s'il venait à être solidifié dans l'état où il se trouve à un instant quelconque, et que M. Coriolis appelle son *mouvement moyen* pour cet instant, peut elle-

même se décomposer en deux parties dont l'une est la force vive qu'aurait la masse totale du système animée de la vitesse du centre de gravité, et dont l'autre est la somme des forces vives qu'auraient les molécules dans le mouvement relatif ou apparent du système solidifié autour du centre de gravité considéré comme fixe.

Soit un système de points matériels en mouvement assujettis à des liaisons quelconques qui peuvent ici contenir le temps explicitement (*). Considérons ce système à un instant donné et supposons qu'à cet instant et pour cette même position du système, on lui donne un autre mouvement quelconque différent du mouvement réel, mais toutefois compatible avec les liaisons données. Cet autre mouvement sera, si l'on veut, purement fictif. On pourra décomposer la vitesse v de chaque point m dans le premier mouvement en deux vitesses, dont l'une v_1 soit la vitesse de ce point dans le second mouvement, l'autre composante ω sera la vitesse *perdue* ou *relative* avec laquelle le point devrait s'écarter de la position qu'il occuperait dans le mouvement fictif (après l'instant dt) pour arriver à celle qu'il occupe dans le mouvement réel : le produit ωdt de cette vitesse perdue ou relative par l'élément du temps peut être appelé le déplacement *relatif* du point m, vdt étant le déplacement réel, et $v_1 dt$ le déplacement fictif. Cela posé, la demi-somme des forces vives $\frac{1}{2}\sum m\omega^2$ correspondantes aux vitesses relatives ω, prendra dans chaque instant dt un accroissement égal à la somme des quantités

(*) Dans un système de liaisons $L=0$, $M=0$, $N=0,\ldots$, fonctions du temps, on peut toujours supposer qu'une seule renferme t explicitement, en éliminant t entre elle et les autres. Mais l'équation des forces vives devient

$$d.\sum mv^2 = 2\sum(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) - \lambda\frac{dL}{dt}dt.$$

(λ n'est pas le même que si l'on conservait toutes les liaisons fonctions du temps.) (*Note de M. Sturm.*)

de travail élémentaire $P\omega\, dt \cos(P, \omega)$, dues aux forces extérieures P qui agissent sur les points du système et à leurs déplacements relatifs, plus les quantités de travail $Q\omega\, dt \cos(Q, \omega)$ qu'on obtient en considérant les forces Q égales et contraires à celles qui donneraient à chaque point supposé libre et d'abord animé de la vitesse fictive v_1, le mouvement fictif qu'on a supposé, et multipliant ces nouvelles forces Q par les mêmes déplacements relatifs ωdt projetés sur les directions des forces : en sorte qu'on a, pour un temps quelconque,

$$\sum m\omega^2 - \sum m\omega_0^2$$
$$= 2\int \sum P \cos\omega\, dt \cos(P, \omega) + 2\int \sum Q\omega\, dt \cos(Q, \omega),$$

ω_0 étant la valeur initiale de ω à l'origine du temps.

Pour démontrer ce théorème (*), nommons α, 6, γ les composantes de la vitesse ω, a_1, b_1, c_1, celles de la vitesse fictive, a, b, c celles de la vitesse réelle, et X, Y, Z celles de la force motrice P. En conservant les notations déjà employées, on a

$$\sum \left[\left(X - m\frac{da}{dt} \right) \delta x + \left(Y - m\frac{db}{dt} \right) \delta y + \left(Z - m\frac{dc}{dt} \right) \delta z \right] = 0,$$

ou, à cause de $a = a_1 + \alpha$, $b = b_1 + 6, \ldots$,

$$(l) \quad \begin{cases} \sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) - \sum m \left[\left(\frac{da_1}{dt} + \frac{d\alpha}{dt} \right) \delta x \right. \\ \left. \qquad + \left(\frac{db_1}{dt} + \frac{d6}{dt} \right) \delta y + \left(\frac{dc_1}{dt} + \frac{d\gamma}{dt} \right) \delta z \right] = 0. \end{cases}$$

Mais l'équation de condition $L = 0$ donne

$$\frac{dL}{dt} + \frac{dL}{dx} a + \frac{dL}{dy} b + \frac{dL}{dz} c + \frac{dL}{dx'} a' + \ldots = 0,$$

(*) Ce théorème a été aussi démontré par M. Combes (*Cours de Mécanique professé à l'École des Mines*). Dans l'exemplaire qu'il possédait, M. Sturm avait ajouté en marge sa démonstration, que nous reproduisons ici.

puisque $\frac{dx}{dt} = a$, $\frac{dy}{dt} = b, \ldots$, et

$$\frac{dL}{dt} + \frac{dL}{dx}a_1 + \frac{dL}{dy}b_1 + \frac{dL}{dz}c_1 + \frac{dL}{dx'}a'_1 + \ldots = 0,$$

puisque les vitesses a_1, $b_1, \ldots$, sont compatibles avec les liaisons du système à l'époque t.

Donc, en retranchant les deux équations précédentes, on aura

$$\frac{dL}{dx}(a - a_1) + \frac{dL}{dy}(b - b_1) + \ldots = 0,$$

ou

$$\frac{dL}{dx}\alpha + \frac{dL}{dy}\beta + \ldots = 0.$$

Donc on peut prendre pour vitesses virtuelles αdt, $\beta dt, \ldots$, c'est-à-dire faire

$$\delta x = \alpha dt, \quad \delta y = \beta dt, \ldots,$$

et l'équation (l) devient

$$\sum(X\alpha + Y\beta + Z\gamma)\,dt - \sum m\left(\frac{da_1}{dt}\alpha + \frac{db_1}{dt}\beta + \frac{dc_1}{dt}\gamma\right)dt$$
$$= \sum m(\alpha d\alpha + \beta d\beta + \gamma d\gamma).$$

Le second membre est égal à $\frac{1}{2}\,d\sum m\omega^2$ et les composantes de la force Q étant $-Q\frac{da_1}{dt}$, $-Q\frac{db_1}{dt}$, $-Q\frac{dc_1}{dt}$, la formule précédente revient à

$$d\sum m\omega^2 = 2\sum P\omega dt\cos(P, \omega) + 2\sum Q\omega dt\cos(Q, \omega),$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

On peut encore supposer dans cette formule que les forces Q soient des forces égales et contraires à celles qui seraient capables de produire le mouvement fictif à l'aide

des liaisons données; car on aurait, d'après le principe de d'Alembert,

$$\sum m\left(\frac{da_1}{dt}\alpha + \frac{db_1}{dt}\beta + \frac{dc_1}{dt}\gamma\right)dt = -\sum Q\omega\, dt \cos(Q, \omega),$$

sans avoir

$$m\frac{da_1}{dt} = Q\cos(Q, x)\ldots.$$

Autrement. On a les deux équations

$$\sum\left[\left(X - m\frac{da}{dt}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{db}{dt}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{dc}{dt}\right)\delta z\right] = 0,$$

$$\sum\left[\left(X_1 - m\frac{da_1}{dt}\right)\delta x + \left(Y_1 - m\frac{db_1}{dt}\right)\delta y + \left(Z_1 - m\frac{dc_1}{dt}\right)\delta z\right] = 0,$$

en appelant X_1, Y_1, Z_1 les composantes des forces $-Q$ qui donneraient aux points le mouvement fictif. De là

$$\sum\left[(X - X_1)\delta x - m\left(\frac{da}{dt} - \frac{da_1}{dt}\right)\delta x + \ldots\right] = 0,$$

ou

$$\sum\left[\left(X - X_1 - m\frac{d\alpha}{dt}\right)\delta x + \ldots\right] = 0.$$

Mais on peut prendre $\delta x = \alpha\, dt$, $\delta y = \beta\, dt, \ldots$, Donc... (*).

Cette proposition comprend le beau théorème que M. Coriolis a donné pour l'extension du principe des forces vives ou de la transmission du travail aux mouvements relatifs en vertu desquels les points d'un système animés de leurs vitesses acquises à chaque instant s'écarteraient des positions infiniment voisines qu'ils prendraient dans le système solidifié. M. Coriolis a fait des applications importantes de son théorème : il en a donné

(*) *Application.* — Prendre le mouvement d'une planète pour le mouvement réel et le mouvement elliptique pour le mouvement fictif.

(*Note de M. Sturm.*)

un autre analogue pour estimer la force vive dans le mouvement fictif, et qui peut aussi être généralisé, comme l'exprime la formule suivante :

$$d\sum mv_1^2 = 2\sum Pv_1\,dt\cos(P, v_1) - 2\sum Q\omega\,dt\cos(Q, \omega),$$

qui suppose, toutefois, les liaisons indépendantes du temps. Dans cette hypothèse, en ajoutant les valeurs précédentes de $d\sum m\omega^2$ et de $d\sum mv_1^2$, on retrouve l'équation ordinaire des forces vives.

Dans la démonstration de ces formules, on observe qu'en décomposant le mouvement réel de chaque point en un mouvement fictif quelconque satisfaisant à toutes les conditions du système, et en un mouvement relatif, ce dernier peut toujours être pris pour un mouvement virtuel quelconque compatible avec toutes les liaisons données, quand bien même elles dépendraient du temps explicitement. Cette remarque suffit pour déduire de la formule générale de dynamique toutes les équations du mouvement relatif du système, en supposant connu le mouvement fictif à chaque instant.

Note sur le théorème de la page 353. — La vitesse du point m ne peut varier d'une manière continue depuis v jusqu'à v_1 pendant le temps θ si les nouvelles liaisons $L = 0$, $M = 0, \ldots$ sont indépendantes du temps ; car pour $t = 0$ on a

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dL}{dx} a + \dfrac{dL}{dy} b + \ldots \gtrless 0, \\ \dfrac{dM}{dx} a + \dfrac{dM}{dy} b + \ldots \gtrless 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array} \right.$$

puisque les vitesses v sont incompatibles avec les liaisons $L = 0$, $M = 0$, .., ou $dL = 0$, $dM = 0, \ldots$.

Mais dans l'instant suivant t', la vitesse devient v' et

doit être compatible avec $L = 0$, $M = 0, \ldots$, puisque ces liaisons doivent par hypothèse subsister depuis $t = 0$ jusqu'à $t = \theta$ et au delà. On a donc pour $t = t'$

$$(2) \qquad \frac{dL}{dx} a' + \frac{dL}{dy} b' + \ldots = 0.$$

Mais, dans les formules (1) et (2), $\frac{dL}{dx}, \frac{dL}{dy}, \ldots$ ont sensiblement les mêmes valeurs, puisque les points ne sont pas sensiblement déplacés. D'ailleurs la vitesse variant d'une manière continue, v' diffère infiniment peu de v, a' de a, b' de b et c' de c. Donc $\frac{dL}{dx} a + \frac{dL}{dy} b + \ldots$ diffère infiniment peu de $\frac{dL}{dx} a' + \frac{dL}{dy} b' + \ldots$, c'est-à-dire de zéro, ce qui est faux, puisque les vitesses initiales a, b, c sont arbitraires, et que par conséquent $\frac{dL}{dx} a + \frac{dL}{dx} b + \ldots$ peut avoir une valeur quelconque différente de zéro. Mais il n'y a plus aucune absurdité si l'on suppose que les liaisons $L = 0$, $M = 0, \ldots$ contiennent le temps pendant le temps θ et deviennent ensuite indépendantes du temps; car la liaison $L = 0$ peut être exprimée par $\varphi(x, y, z, x', \ldots) = t$ ou $\psi(t)$, $\psi(t)$ étant très-petit pendant le temps θ et nul après ce temps, tandis que $\psi'(t)$ a une valeur finie qui s'évanouit après θ.

En supposant, par exemple,

$$L = x^2 + y^2 + z^2 - k^2 + 2t - \frac{t^2}{\theta} - \theta = 0,$$

on aura pour un temps quelconque (depuis zéro jusqu'à θ)

$$\frac{dL}{dt} + \frac{dL}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dL}{dy}\frac{dy}{dt} + \ldots = 0,$$

d'où, pour $t = 0$,

$$\frac{dL}{dt} + \frac{dL}{dx} a + \frac{dL}{dy} b + \ldots = 0.$$

Ici $\frac{dL}{dt} = 2 - \frac{2t}{\theta}$, et pour $t = 0$ on a $\frac{dL}{dt} = 2$. Les valeurs de x, y, z et celles de $\frac{dL}{dx}$, $\frac{dL}{dy}$, ... ne varient pas sensiblement pendant l'intervalle de temps θ. Mais $\frac{dL}{dt}$ décroît depuis 2 jusqu'à zéro et au delà de θ reste nul, puisque L ne contient plus t.

Pour $t \geqq \theta$, on a

$$\frac{dL}{dt} = 0, \quad \frac{dM}{dt} = 0, \ldots.$$

On a pour un temps t quelconque

$$\frac{dL}{dx}\delta x + \frac{dL}{dy}\delta y + \ldots = 0,$$
$$\frac{dM}{dx}\delta x + \frac{dM}{dy}\delta y + \ldots = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et comme $\frac{dL}{dx}$, $\frac{dL}{dy}$, ... restent sensiblement constants, δx, δy, δz sont constants pendant le temps θ et les mêmes qu'à la fin du temps θ. On peut donc prendre $\delta x = a_1\, dt$, $\delta y = b_1\, dt$, ..., puisqu'on a ainsi

$$\frac{dL}{dx}a_1 + \frac{dL}{dy}b_1 + \ldots = 0,$$

à cause de $\frac{dL}{dt} = 0$, c'est-à-dire prendre pour déplacement virtuel pendant tout le temps θ le déplacement réel qui a lieu à la fin de ce temps quand L est devenu indépendant du temps. Or on a, en faisant abstraction des forces extérieures,

$$\sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \ldots\right) = 0.$$

Intégrant, en supposant δx, δy, ... constants depuis

$t = 0$ jusqu'à $t = \theta$,

$$\sum m\left[\left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_0}{dt}\right)\delta x + \ldots\right] = 0,$$

ou

$$\sum m[(a_1 - a)\delta x + \ldots] = 0.$$

Il est permis de prendre $\delta x = a_1\,dt$, $\delta y = b_1\,dt, \ldots$: alors

$$\sum m[(a_1 - a)a_1 + \ldots] = 0 \quad (^*).$$

Vérification, méthode inverse. — Appliquons au point m, *supposé libre* et animé de la vitesse initiale v pour $t = 0$, les forces $\lambda\frac{dL}{dx}$, $\lambda\frac{dL}{dy}, \ldots$, $\mu\frac{dM}{dx}, \ldots$ On a

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \lambda\frac{dL}{dx} + \mu\frac{dM}{dx} + \ldots.$$

Supposons que pour un temps t, entre zéro et θ, x, y, z restent à peu près constants, ainsi que $\frac{dL}{dx}, \frac{dM}{dx}, \ldots,$ quoique L contienne t. En intégrant l'équation précédente, on aura

$$m(a_1 - a) = \frac{dL}{dx}\int_0^\theta \lambda\,dt + \frac{dM}{dx}\int_0^\theta \mu\,dt + \ldots.$$

Supposons $\frac{dL}{dx}\delta x + \frac{dL}{dy}\delta y + \ldots = 0$: $\delta x, \delta y, \ldots$ resteront constants. On aura

$$m[(a_1 - a)\delta x + \ldots]$$
$$= \left(\frac{dL}{dx}\delta x + \frac{dL}{dy}\delta y + \ldots\right)\int_0^\theta \lambda\,dt + \ldots = 0,$$
$$m(a_1 - a)a_1 + \ldots = 0.$$

(*) Cette équation est la première de la page 353. On en déduit comme plus haut le théorème énoncé. La démonstration précédente avait été indiquée par M. Sturm à M. l'abbé Jullien. Voir *Problèmes de Mécanique rationnelle*. Paris, 1855, t. II, p. 255.

Autrement et plus brièvement on a

$$\sum\left(m\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\ldots\right)=0.$$

Intégrant, on a, puisque δx, δy, δz,... ne varient pas avec le temps,

$$\sum\left(m\frac{dx}{dt}\delta x+\ldots\right)=0,$$

et entre les limites zéro et θ

$$\sum[m(a_1-a)\delta x+\ldots]=0.$$

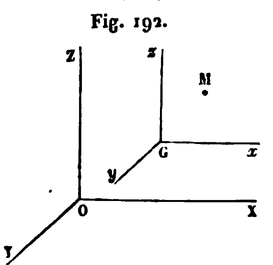
NOTE II.

SUR LE MOUVEMENT DU PENDULE SIMPLE, EN AYANT ÉGARD AU MOUVEMENT DE LA TERRE.

(Leçon faite par M. Sturm à la Faculté des Sciences, en Juin 1851.) (*)

Soient X, Y, Z les coordonnées, rapportées à trois axes rectangulaires fixes, de l'extrémité M du pendule : le point M est sollicité par deux forces dont l'une est la résultante des attractions des diverses parties de la terre, tandis que l'autre provient de l'attraction du soleil et des autres corps célestes. Nommons g et f ces deux forces rapportées à l'unité de masse et désignons par g_X, g_Y, g_Z, f_X, f_Y, f_Z leurs composantes parallèles aux axes. En appelant δX, δY, δZ les variations des coordonnées X, Y, Z

Fig. 192.



(*) Nous devons à l'obligeance de M. Puiseux la rédaction de cette Leçon, sur laquelle nous n'avons trouvé, dans les papiers de M. Sturm, que des Notes incomplètes.

qui résultent d'un déplacement virtuel quelconque du point M, on aura l'équation

$$\left(\frac{d^2X}{dt^2} - g_X - f_X\right)\delta X + \left(\frac{d^2Y}{dt^2} - g_Y - f_Y\right)\delta Y + \left(\frac{d^2Z}{dt^2} - g_Z - f_Z\right)\delta Z = 0.$$

Appelons α, β, γ les coordonnées du centre de gravité G de la terre et x, y, z celles du point M par rapport à trois axes parallèles aux axes fixes menés par le centre de gravité. On aura

$$X = \alpha + x, \quad Y = \beta + y, \quad Z = \gamma + z,$$

et si l'on observe que les composantes f_X, $g_X, \ldots$, peuvent aussi bien être représentées par f_x, $g_x, \ldots$, on remplacera l'équation précédente par celle-ci

$$\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{d^2x}{dt^2} - g_x - f_x\right)\delta x + \left(\frac{d^2\beta}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2} - g_y - f_y\right)\delta y + \left(\frac{d^2\gamma}{dt^2} + \frac{d^2z}{dt^2} - g_z - f_z\right)\delta z = 0.$$

Mais si l'on admet, comme nous le ferons, que la force f soit la même en grandeur et en direction pour tous les points de la terre, et si l'on nomme μ la masse d'un point de celle-ci et M sa masse entière, les principes généraux de la dynamique nous donneront l'équation

$$M\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \sum \mu f_x = f_x \sum \mu = M f_x, \quad \text{ou} \quad \frac{d^2\alpha}{dt^2} = f_x.$$

On aura de même

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} = f_y, \quad \frac{d^2\gamma}{dt^2} = f_z.$$

Par suite l'équation établie ci-dessus deviendra

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2} - g_x\right)\delta x + \left(\frac{d^2y}{dt^2} - g_y\right)\delta y + \left(\frac{d^2z}{dt^2} - g_z\right)\delta z = 0;$$

ainsi le mouvement du pendule sera le même que si, le

centre de gravité étant immobile, le point M n'était soumis qu'à l'attraction de la terre.

Supposons que l'axe Gz passant par le centre de gravité soit l'axe de rotation de la terre (*). Soit P le point de suspension du pendule PM; abaissons du point P sur l'axe la perpendiculaire PK que nous désignerons par r; appelons n la vitesse angulaire de rotation de la terre et comptons le temps t à partir du moment où la droite PK se trouvait dans le plan Gyz; les coordonnées du point P relativement à l'origine G seront

Fig. 193.

$$x = r\sin nt,$$
$$y = r\cos nt,$$
$$z = k,$$

k désignant une constante. Si l'on prend la seconde sidérale pour unité de temps, le nombre n est égal à $\frac{2\pi}{86400}$ ou environ $\frac{1}{13713}$; on voit que c'est une petite fraction.

Regardons maintenant le point P comme l'origine de trois nouveaux axes de coordonnées Px_1, Py_1, Pz_1 que nous supposerons emportés avec la terre. Nommons a, b, c les cosinus des angles que Gx fait avec ces nouveaux axes, a', b', c' ceux des angles que fait Gy, et a'', b'', c'' ceux des angles que fait avec les mêmes axes le prolongement Gz' de Gz. On aura

$$x = r\sin nt + ax_1 + by_1 + cz_1,$$
$$y = r\cos nt + a'x_1 + b'y_1 + c'z_1,$$
$$z = k - (a''x_1 + b''y_1 + c''z_1).$$

La quantité $g_x\,\delta x + g_y\,\delta y + g_z\,\delta z$ exprimant le mo-

(*) Et que les z positives soient dirigées vers le pôle boréal; admettons de plus que la rotation se fasse de Gy vers Gz.

ment virtuel de la force g, conserve la même valeur quels que soient les axes des coordonnées ; l'équation

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2} - g_x\right)\delta x + \left(\frac{d^2y}{dt^2} - g_y\right)\delta y + \left(\frac{d^2z}{dt^2} - g_z\right)\delta z = 0$$

peut donc s'écrire

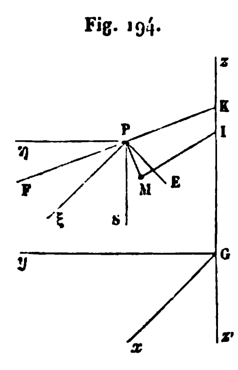
$$\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2x}{dt^2}\delta z = g_{x_1}\delta x_1 + g_{y_1}\delta y_1 + g_{z_1}\delta z_1.$$

Mais on a

$$\delta x = a\delta x_1 + b\delta y_1 + c\delta z_1,$$
$$\delta y = a'\delta x_1 + b'\delta y_1 + c'\delta z_1,$$
$$\delta z = -(a''\delta x_1 + b''\delta y_1 + c''\delta z_1).$$

D'un autre côté, menons par le point P les droites Pξ, Pη, PS respectivement parallèles à Gx, Gy, Gz, et dans le plan P$\xi\eta$ perpendiculaire à Gz, menons PE perpendiculaire à la droite KPF, dans le sens de la rotation. Les angles des droites PE, PF avec Px_1, Py_1, Pz_1 ne varieront pas avec le temps, et l'angle FPη étant égal à nt, on aura (*)

Fig. 194.



$$a = \cos x_1 P\xi = \cos nt \cos EPx_1 + \sin nt \cos FPx_1,$$
$$b = \cos y_1 P\xi = \cos nt \cos EPy_1 + \sin nt \cos FPy_1,$$
$$c = \cos z_1 P\xi = \cos nt \cos EPz_1 + \sin nt \cos FPz_1,$$

$$a' = \cos x_1 P\eta = -\sin nt \cos EPx_1 + \cos nt \cos FPx_1,$$
$$b' = \cos y_1 P\eta = -\sin nt \cos EPy_1 + \cos nt \cos FPy_1,$$
$$c' = \cos z_1 P\eta = -\sin nt \cos EPz_1 + \cos nt \cos FPz_1 :$$

a'', b'', c'' sont indépendants du temps.

(*) La première de ces équations, par exemple, s'obtient en prenant sur Pξ une longueur égale à l'unité ; en la projetant sur ox_1, on a a ; mais on peut aussi projeter, au lieu de Pξ, ses composantes suivant PE et PF. Ce qui donne

$$\cos nt \cos EPx_1 + \sin nt \cos FPx_1.$$

On conclut de ces formules

$$\frac{da}{dt} = na', \qquad \frac{db}{dt} = nb', \qquad \frac{dc}{dt} = nc',$$

$$\frac{da'}{dt} = -na, \quad \frac{db'}{dt} = -nb, \quad \frac{dc'}{dt} = -nc.$$

L'équation

$$x = r \sin nt + ax_1 + by_1 + cz_1,$$

nous donne par suite

$$\frac{dx}{dt} = nr \cos nt + a\frac{dx_1}{dt} + b\frac{dy_1}{dt} + c\frac{dz_1}{dt} + na'x_1 + nb'y_1 + nc'z_1,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -n^2 r \sin nt + a\frac{d^2x_1}{dt^2} + b\frac{d^2y_1}{dt^2} + c\frac{d^2z_1}{dt}$$
$$+ 2na'\frac{dx_1}{dt} + 2nb'\frac{dy_1}{dt} + 2nc'\frac{dz_1}{dt} - n^2ax_1 - n^2by_1 - n^2cz_1.$$

On aura pareillement

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -n^2 r \cos nt + a'\frac{d^2x_1}{dt^2} + b'\frac{d^2y_1}{dt^2} + c'\frac{d^2z_1}{dt^2}$$
$$- 2na\frac{dx_1}{dt} - 2nb\frac{dy_1}{dt} - 2nc\frac{dz_1}{dt} - n^2a'x_1 - n^2b'y_1 - n^2c'z_1,$$

et de plus

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -a''\frac{d^2x_1}{dt^2} - b''\frac{d^2y_1}{dt^2} - c''\frac{d^2z_1}{dt^2}.$$

Observons maintenant que les coordonnées x_1, y_1, z_1 du point mobile M doivent vérifier l'équation

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = l^2,$$

l désignant la longueur du pendule : il en résulte

$$\frac{x_1}{l}\delta x_1 + \frac{y_1}{l}\delta y_1 + \frac{z_1}{l}\delta z_1 = 0.$$

Ajoutons cette équation multipliée par un facteur in-

déterminé λ à l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z - g_{x_1}\delta x_1 - g_{y_1}\delta y_1 - g_{z_1}\delta z_1 = 0,$$

et remplaçons δx, δy, δz, $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ par les valeurs qu'on vient de trouver. Nous aurons

$$\begin{aligned}
&\left(a\frac{d^2x_1}{dt^2} + b\frac{d^2y_1}{dt^2} + c\frac{d^2z_1}{dt^2} + 2na'\frac{dx_1}{dt} + 2nb'\frac{dy_1}{dt} + 2nc'\frac{dz_1}{dt}\right. \\
&\qquad\qquad \left. - n^2ax_1 - n^2by_1 - n^2cz_1 - n^2r\sin nt\right) \\
&\quad \times (a\delta x_1 + b\delta y_1 + c\delta z_1) \\
&+ \left(a'\frac{d^2x_1}{dt^2} + b'\frac{d^2y_1}{dt^2} + c'\frac{d^2z_1}{dt^2} - 2na\frac{dx_1}{dt} - 2nb\frac{dy_1}{dt} - 2nc\frac{dz_1}{dt}\right. \\
&\qquad\qquad \left. - n^2a'x_1 - n^2b'y_1 - n^2c'z_1 - n^2r\cos nt\right) \\
&\quad \times (a'\delta x_1 + b'\delta y_1 + c'\delta z_1) \\
&+ \left(a''\frac{d^2x_1}{dt^2} + b''\frac{d^2y_1}{dt^2} - c''\frac{d^2z_1}{dt^2}\right)(a''\delta x_1 + b''\delta y_1 + c''\delta z_1) \\
&+ \frac{\lambda x_1}{l}\delta x_1 + \frac{\lambda y_1}{l}\delta y_1 + \frac{\lambda z_1}{l}\delta z_1 - g_{x_1}\delta x_1 - g_{y_1}\delta y_1 - g_{z_1}\delta z_1 = 0.
\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant dans cette équation égaler séparément à zéro les coefficients de δx_1, δy_1, δz_1, et si nous avons égard aux relations connues

$$\begin{gathered}
a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, \\
b^2 + b'^2 + b''^2 = 1, \\
c^2 + c'^2 + c''^2 = 1, \\
bc + b'c' + b''c'' = 0, \\
ac + a'c' + a''c'' = 0, \\
ab + a'b' + a''b'' = 0, \\
bc' - cb' = a'', \quad ca' - ac' = b'', \quad ab' - ba' = c'',
\end{gathered}$$

et aussi aux formules

$$\begin{gathered}
a\sin nt + a'\cos nt = \cos \mathrm{FP}x_1, \\
b\sin nt + b'\cos nt = \cos \mathrm{FP}y_1, \\
c\sin nt + c'\cos nt = \cos \mathrm{FP}z_1,
\end{gathered}$$

nous trouverons

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + 2nc''\frac{dy_1}{dt} - 2nb''\frac{dz_1}{dt} - n^2x_1$$
$$+ n^2a''(a''x_1 + b''y_1 + c''z_1) - n^2r\cos\mathrm{FP}x_1 + \frac{\lambda x_1}{l} - g_{x_1} = 0,$$

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} - 2nc''\frac{dx_1}{dt} + 2na''\frac{dz_1}{dt} - n^2y_1$$
$$+ n^2b''(a''x_1 + b''y_1 + c''z_1) - n^2r\cos\mathrm{FP}y_1 + \frac{\lambda y_1}{l} - g_{y_1} = 0,$$

$$\frac{d^2z_1}{dt^2} + 2nb''\frac{dx_1}{dt} - 2na''\frac{dy_1}{dt} - n^2z_1$$
$$+ n^2c''(a''x_1 + b''y_1 + c''z_1) - n^2r\cos\mathrm{FP}z_1 + \frac{\lambda z_1}{l} - g_{z_1} = 0.$$

Ces équations ne diffèrent de celles du mouvement d'un point libre que par les termes $\frac{\lambda x_1}{l}$, $\frac{\lambda y_1}{l}$, $\frac{\lambda z_1}{l}$ qui pris en signes contraires expriment les composantes parallèles aux axes $\mathrm{P}x_1$, $\mathrm{P}y_1$, $\mathrm{P}z_1$ d'une force λ dirigée dans le sens MP suivant le fil qui supporte le point M. La tension de ce fil est donc égale à λ.

Il est aisé de reconnaître que dans les trois équations du mouvement obtenues tout à l'heure les termes en n^2, pris en signes contraires, représentent les composantes de la force centrifuge du point M due à la vitesse de rotation n. En effet, soit I la projection du point M sur l'axe de rotation $\mathrm{G}z$; le quadrilatère PMIK projeté sur l'axe $\mathrm{P}x_1$ nous donnera

$$\mathrm{KP}\cos\mathrm{FP}x_1 + \mathrm{PM}\cos\mathrm{MP}x_1$$
$$+ \mathrm{MI}\cos(\mathrm{MI}, x_1) + \mathrm{IK}\cos(\mathrm{IK}, x_1) = 0,$$

ou bien, en observant que l'angle (IM, x_1) est le supplément de (MI, x_1),

$$\mathrm{MI}\cos(\mathrm{IM}, x_1) = r\cos\mathrm{FP}x_1 + x_1 - a''(a''x_1 + b''y_1 + c''z_1),$$

et par suite

$$n^2 \mathrm{MI}\cos(\mathrm{IM}, x_1)$$
$$= n^2 r \cos \mathrm{FP}x_1 + n^2 x_1 - n^2 a''(a'' x_1 + b'' y_1 + c'' z_1).$$

Or le premier membre est la composante suivant $\mathrm{P}x_1$ de la force centrifuge du point M due à la vitesse de rotation n : les termes

$$- n^2 x_1 + n^2 a''(a'' x_1 + b'' y_1 + c'' z_1) - n^2 r \cos \mathrm{FP}x_1,$$

qui se trouvent dans l'équation en $\frac{d^2 x_1}{dt^2}$ expriment donc cette même composante prise en signe contraire.

Appelons f la force centrifuge pour le point M et $f_{x_1}, f_{y_1}, f_{z_1}$ ses trois composantes parallèlement aux axes $\mathrm{P}x_1$, $\mathrm{P}y_1$, $\mathrm{P}z_1$; nos trois équations pourront s'écrire

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{\lambda x_1}{l} + 2nc''\frac{dy_1}{dt} - 2nb''\frac{dz_1}{dt} - f_{x_1} - g_{x_1} = 0,$$
$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} + \frac{\lambda y_1}{l} - 2nc''\frac{dx_1}{dt} + 2na''\frac{dz_1}{dt} - f_{y_1} - g_{y_1} = 0,$$
$$\frac{d^2 z_1}{dt^2} + \frac{\lambda z_1}{l} + 2nb''\frac{dx_1}{dt} - 2na''\frac{dy_1}{dt} - f_{z_1} - g_{z_1} = 0.$$

Les quantités $f_{x_1} + g_{x_1}$, $f_{y_1} + g_{y_1}$, $f_{z_1} + g_{z_1}$ sont les composantes de la pesanteur apparente au point M, c'est-à-dire de la résultante de l'attraction de la terre et de la force centrifuge. Désignons-les par p_{x_1}, p_{y_1}, p_{z_1}, et les trois équations précédentes deviendront

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{\lambda x_1}{l} + 2nc''\frac{dy_1}{dt} - 2nb''\frac{dz_1}{dt} - p_{x_1} = 0,$$
$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} + \frac{\lambda y_1}{l} - 2nc''\frac{dx_1}{dt} + 2na''\frac{dz_1}{dt} - p_{y_1} = 0,$$
$$\frac{d^2 z_1}{dt^2} + \frac{\lambda z_1}{l} + 2nb''\frac{dx_1}{dt} - 2na''\frac{dy_1}{dt} - p_{z_1} = 0.$$

Jusqu'à présent nous n'avons pas déterminé les direc-

tions des axes des x_1, y_1, z_1 : supposons maintenant qu'on fasse coïncider l'axe des z_1 avec la position d'équilibre Pm du pendule (*). Les équations précédentes doivent être vérifiées lorsqu'on suppose le pendule en repos dans cette position ; si l'on observe qu'alors on a $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$, et si l'on appelle P la valeur correspondante de λ, on aura pour le pendule en équilibre

$$p_{x_1} = 0, \quad p_{y_1} = 0, \quad p_{z_1} = \mathrm{P}.$$

On voit par là que la tension P du fil dans la position d'équilibre se confond avec la pesanteur apparente p au point m. Si maintenant on néglige les variations que cette pesanteur apparente éprouve en grandenr et en direction dans l'étendue des excursions du pendule, on pourra dans les équations du mouvement remplacer p_{x_1} par zéro, p_{y_1} par zéro et p_{z_1} par p : elles deviendront, à ce degré d'approximation,

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{\lambda x_1}{l} + 2nc'' \frac{dy_1}{dt} - 2nb'' \frac{dz_1}{dt} = 0,$$

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} + \frac{\lambda y_1}{l} - 2nc'' \frac{dx_1}{dt} + 2na'' \frac{dz_1}{dt} = 0,$$

$$\frac{d^2z_1}{dt^2} + \frac{\lambda z_1}{l} + 2nb'' \frac{dx_1}{dt} - 2na'' \frac{dy_1}{dt} - p = 0.$$

La pesanteur apparente est, comme on l'a dit, la résultante de l'attraction de la terre et de la force centrifuge. Si l'on regarde la première force comme constante en grandeur et en direction dans l'étendue des excursions du pendule (et en effet, ignorant la constitution

(*) *Nota*. On doit remarquer que la direction Pm du pendule en équilibre est celle de la verticale ou de la pesanteur apparente au point m, mais qu'elle est généralement différente de la direction de la verticale au point de suspension P. L'écart de ces deux verticales explique la déviation entre l'est et le sud qu'on observe dans la chute des corps qui tombent d'une grande hauteur.

intérieure de la terre, nous ne savons pas apprécier les variations que cette force éprouve); mais qu'on veuille tenir compte des variations qu'éprouve la force centrifuge dans les mêmes limites, on pourra encore regarder $g_{x_1}, g_{y_1}, g_{z_1}$ comme ayant toujours les mêmes valeurs que dans la position d'équilibre, mais cela ne sera plus permis pour $f_{x_1}, f_{y_1}, f_{z_1}$.

Pour nous débarrasser des quantités $g_{x_1}, g_{y_1}, g_{z_1}$, écrivons que les équations du mouvement, telles que nous les avons obtenues d'abord, sont vérifiées lorsqu'on y suppose à x_1, y_1, z_1 les valeurs constantes $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = l$. Il nous viendra

$$n^2 a'' c'' l - n^2 r \cos \mathrm{FP} x_1 - g_{x_1} = 0,$$
$$n^2 b'' c'' l - n^2 r \cos \mathrm{FP} y_1 - g_{y_1} = 0,$$
$$\mathrm{P} - n^2 l + n^2 c''^2 l - n^2 r \cos \mathrm{FP} z_1 - g_{z_1} = 0.$$

Tirons de là les valeurs de $g_{x_1}, g_{y_1}, g_{z_1}$, et regardons-les comme convenant à une position quelconque du point M : alors nous pourrons les substituer dans les équations du mouvement, et elles deviendront

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{\lambda x_1}{l} + 2nc'' \frac{dy_1}{dt} - 2nb'' \frac{dz_1}{dt}$$
$$- n^2 x_1 + n^2 a'' [a'' x_1 + b'' y_1 + c'' (z_1 - l)] = 0,$$

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} + \frac{\lambda y_1}{l} - 2nc'' \frac{dx_1}{dt} + 2na'' \frac{dy_1}{dt}$$
$$- n^2 y_1 + n^2 b'' [a'' x_1 + b'' y_1 + c'' (z_1 - l)] = 0,$$

$$\frac{d^2 z_1}{dt^2} + \frac{\lambda z_1}{l} + 2nb'' \frac{dx_1}{dt} - 2na'' \frac{dy_1}{dt}$$
$$- n^2 (z_1 - l) + n^2 c'' [a'' x_1 + b'' y_1 + c'' (z_1 - l)] - \mathrm{P} = 0.$$

En négligeant les termes en n^2, on retrouverait les équations qu'on a obtenues tout à l'heure en négligeant les variations de la force centrifuge.

Concevons le plan passant par la position d'équilibre

Pm du pendule et par une parallèle à l'axe de rotation de la terre; c'est ce qu'on appelle le *plan du méridien* pour le point m. Prenons l'axe des x_1 perpendiculaire à ce plan, on aura $a'' = 0$, et si l'on fait

$$b'' = \cos\gamma, \quad c'' = \sin\gamma,$$

l'angle γ sera la latitude du point m. Les équations précédentes deviendront, en supprimant les indices des lettres x, y, z,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\lambda x}{l} + 2n\sin\gamma\frac{dy}{dt} - 2n\cos\gamma\frac{dz}{dt} + \text{des termes en } n^2 = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\lambda y}{l} - 2n\sin\gamma\frac{dx}{dt} \qquad + \text{des termes en } n^2 = 0,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\lambda z}{l} - P + 2n\cos\gamma\frac{dx}{dt} \qquad + \text{des termes en } n^2 = 0,$$

et en négligeant les termes en n^2 ou les variations de la force centrifuge,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\lambda x}{l} + 2n\sin\gamma\frac{dy}{dt} - 2n\cos\gamma\frac{dz}{dt} = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\lambda y}{l} - 2n\sin\gamma\frac{dx}{dt} = 0,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\lambda z}{l} - P + 2n\cos\gamma\frac{dx}{dt} = 0.$$

Bornons-nous à ces dernières équations; si la terre était immobile, de sorte qu'on eût $n = 0$, elles se réduiraient à

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\lambda x}{l} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\lambda y}{l} = 0, \quad \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\lambda z}{l} - P = 0.$$

Admettons de plus que le pendule s'écarte peu de sa position d'équilibre, et regardons x et y comme de très-petites quantités du premier ordre; en vertu de l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2,$$

z ne différera de l que de quantités du second ordre, et en

les négligeant la troisième des équations ci-dessus nous donnera $\lambda = \mathrm{P}$; par suite les deux autres deviendront

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mathrm{P}x}{l} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\mathrm{P}y}{l} = 0.$$

Ne supposons plus maintenant $n = 0$, mais regardons n comme une petite fraction; nous allons montrer qu'on a encore deux équations semblables aux précédentes, mais par rapport à des axes qui tourneraient uniformément autour de la verticale $\mathrm{P}m$ du point m. En effet, la troisième équation du mouvement nous donne

$$\lambda = \mathrm{P} - 2n\cos\gamma\,\frac{dx}{dt};$$

portons cette valeur dans les deux autres et négligeons-y les termes du second ordre; elles deviendront

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mathrm{P}x}{l} + 2n\sin\gamma\,\frac{dy}{dt} = 0,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mathrm{P}y}{l} - 2n\sin\gamma\,\frac{dx}{dt} = 0.$$

Imaginons maintenant dans le plan $\mathrm{P}x_1y_1$ deux droites rectangulaires mobiles $\mathrm{P}\xi$, $\mathrm{P}\eta$ tournant autour du point P avec la vitesse angulaire constante $n\sin\gamma = k$: si nous appelons ξ, η, z les coordonnées de l'extrémité du pendule par rapport aux axes $\mathrm{P}\xi$, $\mathrm{P}\eta$, $\mathrm{P}z$, nous aurons

$$x = \xi\cos kt - \eta\sin kt, \quad y = \xi\sin kt + \eta\cos kt,$$

et en substituant ces valeurs dans les équations précédentes, puis supprimant les termes qui contiennent le produit de n^2 ou de k^2 par des quantités du premier ordre, il viendra

$$\left(\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{\mathrm{P}\xi}{l}\right)\cos kt - \left(\frac{d^2\eta}{dt^2} + \frac{\mathrm{P}\eta}{l}\right)\sin kt = 0,$$

$$\left(\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{\mathrm{P}\xi}{l}\right)\sin kt + \left(\frac{d^2\eta}{dt^2} + \frac{\mathrm{P}\eta}{l}\right)\cos kt = 0,$$

d'où

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{P\xi}{l} = 0, \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} + \frac{P\eta}{l} = 0,$$

équations pareilles à celles qu'on avait trouvées dans la supposition de la terre immobile. Ainsi en supposant l'amplitude des oscillations très-petite, la projection horizontale de l'extrémité du pendule se mouvra sensiblement par rapport aux axes mobiles $P\xi$, $P\eta$ comme elle le ferait par rapport aux axes Px_1, Py_1 si la terre était en repos. Si donc chaque oscillation est à peu près plane, le plan dans lequel elle paraîtra s'accomplir tournera autour de la verticale avec la vitesse angulaire $n \sin \gamma$.

NOTE III.

ÉQUATIONS GÉNÉRALES DU MOUVEMENT RELATIF,

Par M. A. DE SAINT-GERMAIN.

Le mouvement relatif d'un point matériel, par rapport à un système d'axes ou de points de repère dont le mouvement est bien connu, peut toujours se déterminer comme un mouvement absolu, à condition d'adjoindre aux forces qui sollicitent réellement le mobile certaines forces fictives, dites *forces apparentes*, dont nous allons donner, d'une manière générale, la grandeur et la direction. Cherchons d'abord l'accélération totale d'un point, connaissant le mouvement relatif du point et le mouvement du système de comparaison, qu'on appelle *mouvement d'entraînement*.

Soient, à une époque t, x, y, z les coordonnées absolues d'un point M; x_1, y_1, z_1 ses coordonnées relatives à trois axes rectangulaires O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1, que je prends pour lignes de repère. Les premières ont en fonc-

tion des secondes des expressions de forme connue :

$$x = \alpha + ax_1 + by_1 + cz_1,$$
$$y = \beta + a'x_1 + b'y_1 + c'z_1,$$
$$z = \gamma + a''x_1 + b''y_1 + c''z_1.$$

$\alpha, \beta, \gamma, a, b, \ldots$ sont des fonctions connues du temps qui définissent la position des axes mobiles. La vitesse v du point M a pour projection sur l'axe des x

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} + x_1 \frac{da}{dt} + y_1 \frac{db}{dt} + z_1 \frac{dc}{dt} \\ + a \frac{dx_1}{dt} + b \frac{dy_1}{dt} + c \frac{dz_1}{dt}. \end{aligned} \right.$$

Les trois derniers termes représentent les projections des composantes, parallèles aux axes mobiles, de la vitesse relative v_1 ; leur somme est donc la projection de v_1. Quant aux quatre premiers termes, leur somme est égale à la projection de ce que deviendrait v si x_1, y_1, z_1 étaient constants, c'est-à-dire de la vitesse d'un point qui coïnciderait avec M à l'époque t, mais ne bougerait pas par rapport aux axes de comparaison ; cette vitesse s'appelle *vitesse d'entraînement*.

Les projections de la vitesse absolue sur les axes des y et des z peuvent se décomposer d'une manière analogue à la précédente ; cette vitesse se déduit de la vitesse relative et de la vitesse d'entraînement comme la résultante de deux forces se déduit de ces forces ; suivant l'expression adoptée en Géométrie dans un sens général, la vitesse absolue est la résultante de la vitesse relative et de la vitesse d'entraînement. Il suffit de considérer le triangle dont les trois côtés représentent ces vitesses pour voir que la vitesse relative est la résultante de la vitesse absolue et de la vitesse d'entraînement changée de sens.

Le mouvement des axes mobiles peut être regardé

(§ 659) comme résultant de deux autres : un mouvement de translation, dont la vitesse est à chaque instant celle du point O_1, et un mouvement de rotation, qui se fait à l'époque t avec une vitesse ω autour d'un axe instantané $O_1 I$. La vitesse d'entraînement peut être regardée comme la résultante de deux vitesses dues à ce double mouvement : la première, dont les projections sont

$$\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\beta}{dt}, \frac{d\gamma}{dt},$$

correspond au mouvement de translation ; la seconde a pour projections

$$(2) \quad \begin{cases} x_1 \dfrac{da}{dt} + y_1 \dfrac{db}{dt} + z_1 \dfrac{dc}{dt}, \\ x_1 \dfrac{da'}{dt} + y_1 \dfrac{db'}{dt} + z_1 \dfrac{dc'}{dt}, \\ x_1 \dfrac{da''}{dt} + y_1 \dfrac{db''}{dt} + z_1 \dfrac{dc''}{dt}; \end{cases}$$

c'est la vitesse que la rotation ω donnerait à un point coïncidant avec M et lié au système $O_1 x_1 y_1 z_1$. Rappelons qu'on a trouvé (§ 649), pour ses projections sur les axes mobiles,

$$(3) \qquad q z_1 - r y_1, \quad r x_1 - p z_1, \quad p y_1 - q x_1,$$

p, q, r étant les composantes de la rotation instantanée ω.

La projection de l'accélération φ sur l'axe des x s'obtient en différentiant l'équation (1) ;

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + x_1 \frac{d^2 a}{dt^2} + y_1 \frac{d^2 b}{dt^2} + z_1 \frac{d^2 c}{dt^2}$$
$$+ a \frac{d^2 x_1}{dt^2} + b \frac{d^2 y_1}{dt^2} + c \frac{d^2 z_1}{dt^2}$$
$$+ \left(\frac{dx_1}{dt} \frac{da}{dt} + \frac{dy_1}{dt} \frac{db}{dt} + \frac{dz_1}{dt} \frac{dc}{dt} \right).$$

En se reportant à ce qui a été dit pour $\frac{dx}{dt}$, on voit que la somme des quatre premiers termes représente la projection de l'accélération d'un point coïncidant avec M à l'époque t, mais lié invariablement à $O_1 x_1 y_1 z_1$: c'est l'accélération d'entraînement; la somme des trois suivants est égale à la projection de l'accélération relative; nous dirons que le trinôme final, qui est multiplié par 2, représente la projection d'une accélération complémentaire. M. Gilbert a remarqué que ce trinôme se déduit de la première des quantités (2) en y remplaçant x_1, y_1, z_1 par $\frac{dx_1}{dt}$, $\frac{dy_1}{dt}$, $\frac{dz_1}{dt}$; c'est donc la projection de la vitesse que la rotation ω imprimerait à un point H dont les coordonnées par rapport à $O_1 x_1$, $O_1 y_1$, $O_1 z_1$ seraient $\frac{dx_1}{dt}$, $\frac{dy_1}{dt}$, $\frac{dz_1}{dt}$; on voit que $O_1 H$ représente la vitesse relative de M.

Les projections de φ sur les deux autres axes donnent lieu à des résultats analogues; donc l'accélération totale est la résultante de l'accélération d'entraînement, de l'accélération relative et de l'accélération complémentaire; celle-ci est égale à $2\omega v_1 \sin IO_1 H$, perpendiculaire à l'axe instantané et à la vitesse relative; enfin elle est dirigée dans le sens où la rotation tend à entraîner le point H, c'est-à-dire vers la droite de $O_1 H$ pour un observateur dirigé suivant l'axe de la rotation instantanée.

Le polygone qui permet de construire l'accélération totale à l'aide de ses composantes montre que l'accélération relative φ_1 est la résultante de φ et des accélérations d'entraînement et complémentaire prises en sens contraires; ces accélérations ainsi changées de sens s'appellent *accélération d'inertie d'entraînement* et *accélération centrifuge composée;* désignons-les par φ' et φ''.

La dernière, perpendiculaire à IO_1H, est dirigée à gauche de O_1H par rapport à l'axe de la rotation instantanée; ses projections sur les axes mobiles se déduisent des formules (3) en y remplaçant x_1, y_1, z_1 par $\frac{dx_1}{dt}, \frac{dy_1}{dt}, \frac{dz_1}{dt}$, changeant les signes et multipliant par 2. Les projections de φ' ne peuvent se calculer d'une manière générale.

Supposons maintenant que le point M soit un point matériel de masse m; pour lui donner un mouvement absolu tel que ses coordonnées par rapport à des axes fixes soient à chaque instant égales aux fonctions de t que nous avons appelées x_1, y_1, z_1, il faut faire agir sur lui une force égale à $m\varphi_1$ et placée par rapport aux axes fixes dont il vient d'être question comme φ_1 l'est par rapport à $O_1x_1y_1z_1$. Construisons un polygone dont les côtés soient parallèles à φ, φ_1, φ', φ'' et égaux à ces accélérations multipliées par m; la force $m\varphi_1$, qui donnerait au point M un mouvement absolu identique à son mouvement relatif, est la résultante de trois autres: 1° une force parallèle à φ et égale à $m\varphi$: c'est la résultante F des forces qui agissent réellement sur M; 2° une force F' parallèle à φ' et égale à $m\varphi'$: c'est la *force d'inertie d'entraînement*, égale et de sens contraire à celle qu'il faudrait appliquer à la masse m pour qu'elle ne bougeât point par rapport à $O_1x_1y_1z_1$; 3° une force $F''=m\varphi''$, parallèle à φ'', appelée *force centrifuge composée*. En supposant que M soit sollicité, outre la force F, par F' et F'', dites *forces apparentes*, on peut déterminer son mouvement relatif comme un mouvement absolu; cet important théorème est dû à Coriolis.

Soient X_1, Y_1, Z_1 les composantes de F suivant O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1; X'_1, Y'_1, Z'_1 celles de F'; les composantes de F'' se déduisent de celles de φ'' en les multipliant par m, et l'on a, pour les équations générales du mouvement

relatif,

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = X_1 + X'_1 + 2m\left(r\frac{dy_1}{dt} - q\frac{dx_1}{dt}\right),$$

$$m\frac{d^2y_1}{dt^2} = Y_1 + Y'_1 + 2m\left(p\frac{dz_1}{dt} - r\frac{dx_1}{dt}\right),$$

$$m\frac{d^2z_1}{dt^2} = Z_1 + Z'_1 + 2m\left(q\frac{dx_1}{dt} - p\frac{dy_1}{dt}\right).$$

La force centrifuge composée s'annule quand le point M est en équilibre relatif. Or, pour maintenir un point pesant en équilibre apparent à la surface de la Terre, il faut lui appliquer une force dirigée suivant la verticale ascendante et égale à son poids : c'est dire que l'attraction de la Terre et la force d'inertie d'entraînement ont pour résultante la force que nous appelons le *poids* du corps, et, pour étudier les mouvements apparents des corps à la surface du globe, il suffit d'exprimer qu'ils sont soumis à la pesanteur, aux forces particulières qui agissent dans les cas considérés, enfin à la force centrifuge composée. Prenons pour axe des x_1 la tangente au méridien dirigée vers le nord, pour axe des y_1 la tangente au parallèle dirigée vers l'est, pour axe des z_1 la verticale montante; soient λ la latitude du lieu, n la vitesse de rotation de la Terre, $\frac{2\pi}{86164} = 0{,}000073$, dont l'axe est dirigé vers le sud; p, q, r sont respectivement égaux à $-n\cos\lambda$, 0, $-n\sin\lambda$. Si X_1, Y_1, Z_1 désignent les composantes de la force qui sollicite le point, indépendamment de son poids, les équations du mouvement apparent à la surface terrestre sont

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = X_1 - 2mn\sin\lambda\frac{dy_1}{dt},$$

$$m\frac{d^2y_1}{dt^2} = Y_1 + 2mn\left(\sin\lambda\frac{dx_1}{dt} - \cos\lambda\frac{dz_1}{dt}\right),$$

$$m\frac{d^2z_1}{dt^2} = Z_1 - mg + 2mn\cos\lambda\frac{dy_1}{dt}.$$

On en déduit la déviation vers l'est des corps abandonnés à leur poids et le mouvement du pendule exposé dans la Note précédente.

NOTE IV.

ÉQUATIONS DE LAGRANGE. — ÉQUATIONS CANONIQUES [1].

Par M. A. DE SAINT-GERMAIN,
Professeur à la Faculté des Sciences de Caen.

Équations de Lagrange.

On a vu dans la XXXVI[e] Leçon que le mouvement d'un système de k points matériels sollicités par des forces données peut être déterminé, en vertu du principe de d'Alembert, par l'équation générale

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right) \\ &\quad = \sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z); \end{aligned}\right.$$

δx, δy, δz sont les projections d'un déplacement virtuel quelconque compatible avec les liaisons du système, que je suppose exprimées par μ équations de condition

$$(2)\qquad L = 0,\quad M = 0,\quad N = 0,\quad \ldots.$$

Souvent le moyen le plus simple de faire connaître à un certain instant la position des divers points du système n'est pas de donner leurs $3k$ coordonnées rectilignes; mais on peut considérer n variables, $q_1, q_2, \ldots,$

---

(1) Ces questions, récemment introduites dans le programme de la Licence, forment un complément immédiat à la Leçon XXXVI de Sturm.

q_n, dont les valeurs déterminent d'une façon plus claire l'état du système. Il faudra que les anciennes coordonnées puissent s'exprimer en fonction des nouvelles inconnues par des relations de la forme

$$(3) \quad x = f(t, q_1, q_2, \ldots, q_n), \quad y = f_1(t, q_1, \ldots), \quad \ldots;$$

$q_1, q_2, \ldots, q_n$ seront liés par $n - (3k - \mu)$ équations de condition telles que, si l'on en tient compte après avoir remplacé dans les équations (2) $x, y, z, \ldots$ par leurs valeurs (3), on ait des identités. Généralement n est égal à $3k - \mu$, les variables q sont indépendantes et constituent les coordonnées qui définissent de la manière la plus simple la position du système considéré.

Il s'agit de voir d'une manière générale comment se transforme l'équation (1) lorsqu'aux coordonnées $x, y, z, \ldots$ on substitue $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Cette transformation est effectuée très heureusement dans le Livre II de la *Mécanique analytique;* je ne reproduirai cependant pas exactement les calculs de Lagrange, parce qu'ils sont faits dans l'hypothèse où les fonctions (3) ne dépendent pas explicitement du temps et parce que je ne veux pas invoquer les principes du Calcul des variations, dont Sturm n'a pas fait usage dans ses Leçons. Représentons par des lettres accentuées les dérivées prises par rapport au temps et par ∂ la caractéristique des dérivées partielles; considérons, avec Lagrange, la demi-force vive du système

$$T = \sum \frac{1}{2} m(x'^2 + y'^2 + z'^2);$$

nous en tirerons

$$mx' = \frac{\partial T}{\partial x'}, \quad m\frac{d^2 x}{dt^2} = mx'' = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial x'}, \quad \ldots,$$

ce qui permettra d'écrire l'équation (1) sous la forme

suivante :

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}&\sum\left(\delta x \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x'} + \delta y \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y'} + \delta z \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial z'}\right)\\ &\quad = \sum(\mathrm{X}\delta x + \mathrm{Y}\delta y + \mathrm{Z}\delta z).\end{aligned}\right.$$

Pour effectuer notre changement de variables, nous tirerons des équations (3), en traitant t comme une constante,

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial x}{\partial q_n}\delta q_n,$$
$$\delta y = \frac{\partial y}{\partial q_1}\delta q_1 + \ldots,$$
$$\delta z = \frac{\partial z}{\partial q_1}\delta q_1 + \ldots.$$

Si l'on remplace δx, δy, ... par ces valeurs dans le second membre de l'équation (4), et si dans les expressions de X, Y, Z on substitue à x, y, z leurs valeurs (3), on trouve sans artifice particulier la nouvelle expression du travail élémentaire virtuel :

$$(5)\quad \sum(\mathrm{X}\delta x + \mathrm{Y}\delta y + \mathrm{Z}\delta z) = \mathrm{Q}_1\delta q_1 + \mathrm{Q}_2\delta q_2 + \ldots + \mathrm{Q}_n\delta q_n.$$

Le premier membre de l'équation (4) devient

$$\sum_{i=1}^{i=n} \delta q_i \sum \frac{\partial x}{\partial q_i}\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x'},$$

le second Σ s'étendant aux $3k$ coordonnées rectilignes. Calculons le coefficient de δq_i,

$$\sum \frac{\partial x}{\partial q_i}\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x'} = \frac{d}{dt}\sum \frac{\partial x}{\partial q_i}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x'} - \sum \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x'}\frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial q_i},$$

les Σ s'étendant toujours aux $3k$ coordonnées. Les deux parties du second membre vont se simplifier grâce aux

valeurs de $\frac{\partial x}{\partial q_i}$ et de sa dérivée par rapport au temps. Différentions les équations (3) par rapport à cette variable :

$$(6) \qquad x' = \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} q'_2 + \ldots + \frac{\partial x}{\partial q_n} q'_n, \quad \ldots\ldots$$

Comme les fonctions f et leurs dérivées partielles ne contiennent pas les q', il en résulte que x' est fonction linéaire de ces quantités et que

$$\frac{\partial x'}{\partial q'_i} = \frac{\partial x}{\partial q_i}.$$

T, fonction des x', y', z', devient, quand on remplace ces dérivées par leurs valeurs (6), fonction des q et des q', et l'on a

$$(7) \qquad \sum \frac{\partial T}{\partial x'} \frac{\partial x}{\partial q_i} = \sum \frac{\partial T}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial q'_i} = \frac{\partial T}{\partial q'_i}.$$

Prenons les dérivées des deux membres de l'équation (6) par rapport à q_i :

$$\frac{\partial x'}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial q_i} + \frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_i} q'_1 + \ldots + \frac{\partial^2 x}{\partial q_n \partial q_i} q'_n.$$

En intervertissant l'ordre des dérivations, on a

$$\frac{\partial x'}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 x}{\partial q_i \partial t} + \frac{\partial^2 x}{\partial q_i \partial q_1} q'_1 + \ldots + \frac{\partial^2 x}{\partial q_i \partial q_n} q'_n.$$

Le second membre est la dérivée par rapport à t de $\frac{\partial x}{\partial q_i}$ supposé exprimé en fonction de $q_1, q_2, \ldots, q_n$ et t ; donc

$$\sum \frac{\partial T}{\partial x'} \frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial q_i} = \sum \frac{\partial T}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial q_i} = \frac{\partial T}{\partial q_i}.$$

Cette relation, jointe à l'équation (7), nous donne la valeur du coefficient de δq_i dans la transformée du pre-

mier membre de l'équation (4); si nous tenons compte de l'équation (5), qui transforme le second membre en fonction des q_i, nous pourrons écrire l'équation cherchée, en faisant tout passer dans le premier membre, sous la forme définitive

$$(8) \qquad \sum\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i\right)\delta q_i = 0.$$

On tirera des équations auxquelles satisfont $q_1, q_2, \ldots$ les valeurs de quelques-unes de leurs variations en fonction des autres, on les substituera dans l'équation précédente, et l'on égalera à zéro les coefficients des variations qui restent et qui sont indéterminées. Le plus ordinairement, $q_1, q_2, \ldots, q_n$ sont des variables indépendantes, et l'on doit égaler à zéro le coefficient de chaque variation dans l'équation (8); le mouvement du système est déterminé par n équations simultanées qu'on appelle les *équations de Lagrange* :

$$(9) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial q'_1} - \dfrac{\partial T}{\partial q_1} - Q_1 = 0, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial q'_2} - \dfrac{\partial T}{\partial q_2} - Q_2 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial q'_n} - \dfrac{\partial T}{\partial q_n} - Q_n = 0. \end{cases}$$

Quand on aura choisi les inconnues les plus propres à définir l'état du système à un instant quelconque, on formera l'expression de T, puis celle de $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, et l'on aura un procédé uniforme pour mettre en équation un problème quelconque de Dynamique; on ne s'occupe pas des forces qui représenteraient l'effet des liaisons, mais ces forces se calculent aisément, une fois le mouvement connu.

Il arrive souvent que la somme des travaux virtuels $\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)$ est la variation exacte d'une fonction U des coordonnées des points mobiles; si dans U on remplace $x, y, z, \ldots$ par leurs valeurs (3), cette fonction, dite *fonction des forces*, dépendra de t et de $q_1, q_2, \ldots, q_n$; sa variation, prise en traitant t comme une constante, sera égale à $Q_1 \delta q_1 + \ldots$. Donc on aura, dans ce cas,

$$Q_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1}, \quad Q_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2}, \quad \ldots.$$

On obtiendra $Q_1, Q_2, \ldots$ en différentiant la valeur de U exprimée au moyen de t et des q, sans être obligé de transformer directement $\Sigma(X\delta x + \ldots)$, et les équations de Lagrange deviendront

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial q'_1} - \dfrac{\partial T}{\partial q_1} - \dfrac{\partial U}{\partial q_1} = 0, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial q'_2} - \dfrac{\partial T}{\partial q_2} - \dfrac{\partial U}{\partial q_2} = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Nous allons montrer qu'en supposant les liaisons indépendantes du temps, c'est-à-dire les fonctions (3) indépendantes de t, ces équations donnent l'équation des forces vives. Ajoutons-les après les avoir multipliées respectivement par $dq_1, dq_2, \ldots, dq_n$, et nous aurons

$$\sum q'_i\, d\frac{\partial T}{\partial q'_i} - \sum \frac{\partial T}{\partial q_i}\, dq_i - \sum \frac{\partial U}{\partial q_i}\, dq_i = 0$$

ou

$$\sum d\left(q'_i \frac{\partial T}{\partial q'_i}\right) - \sum \frac{\partial T}{\partial q'_i}\, dq'_i - \sum \frac{\partial T}{\partial q_i}\, dq_i - \sum \frac{\partial U}{\partial q_i}\, dq_i = 0.$$

Mais, puisque $\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \cdots$ sont nuls dans l'hypothèse admise, en se reportant aux valeurs (6) de $x', y', \ldots$, on

voit que T est une fonction homogène du second degré des q', et le théorème des fonctions homogènes nous donne

$$\sum q'_i \frac{\partial T}{\partial q'_i} = 2T.$$

La dernière équation équivaut, on le voit sans peine, à

$$2dT - dT - dU = 0;$$

l'intégrale est celle des forces vives, $T - U = \text{const.}$

Nous allons appliquer les équations de Lagrange à la résolution de quelques problèmes particuliers.

Pendule conique.

Reprenons la question traitée dans la XLIVe Leçon sur le mouvement d'un point pesant soutenu par un fil ou par une tige inextensible et sans masse qui l'oblige à rester sur la surface d'une sphère de rayon l. Les coordonnées rectangulaires du pendule sont assujetties à la condition

$$(2\ bis) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = l^2.$$

On peut définir la position du pendule par l'angle θ de sa tige avec la verticale et par l'angle ψ que le plan vertical contenant cette tige fait avec un plan vertical fixe. Les variables q de la théorie générale se réduisent à deux, θ et ψ. Une transformation de coordonnées bien connue donne x, y, z en fonction de θ et ψ :

$$(3\ bis) \quad x = l\sin\theta\cos\psi, \quad y = l\sin\theta\sin\psi, \quad z = l\cos\theta.$$

On vérifiera que ces valeurs satisfont identiquement à l'équation (2 *bis*). On obtient la demi-force vive T en calculant x', y', z' par la différentiation des équations (3 *bis*) ou en se rappelant l'expression de la vitesse en

coordonnées polaires; si l'on suppose la masse du pendule égale à l'unité, on trouve

$$T = \frac{1}{2}(l^2\theta'^2 + l^2 \sin^2\theta\psi'^2).$$

On forme les dérivées partielles

$$\frac{\partial T}{\partial \theta'} = l^2\theta', \qquad \frac{\partial T}{\partial \theta} = l^2 \sin\theta \cos\theta\psi'^2,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \psi'} = l^2 \sin^2\theta\psi', \quad \frac{\partial T}{\partial \psi} = 0.$$

La fonction des forces U existe : elle est égale à

$$gz = gl\cos\theta;$$

donc

$$\delta U = -gl\sin\theta\delta\theta, \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} = -gl\sin\theta, \quad \frac{\partial U}{\partial \psi} = 0.$$

Nous avons tous les éléments pour former les équations (10) du paragraphe précédent, et nous trouvons

$$\frac{d}{dt} l^2\theta' - l^2 \sin\theta\cos\theta\psi'^2 + gl\sin\theta = 0,$$

$$\frac{d}{dt} l^2 \sin^2\theta\psi' = 0.$$

La seconde donne $l^2 \sin^2\theta\psi' = C$; si l'on en tire ψ pour le substituer dans la première, celle-ci devient

$$l^2\frac{d\theta'}{dt} - \frac{C^2}{l^2}\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} + gl\sin\theta = 0.$$

En multipliant par $2\,d\theta$, on peut intégrer et l'on trouve

$$l^2\theta'^2 + \frac{C^2}{l^2\sin^2\theta} - 2gl\cos\theta = C',$$

$$dt = \frac{\pm l^2 \sin\theta\, d\theta}{\sqrt{C' l^2 \sin^2\theta + 2gl^3\cos\theta\sin^2\theta - C^2}}.$$

Il serait avantageux d'étudier le mouvement en cherchant comment varie θ; mais, si dans la formule précé-

dente on remplace $l\cos\theta$ par z, $l\sin\theta d\theta$ par $-dz$, $l^2\sin^2\theta$ par $l^2 - z^2$, et C' par $2g(h_0 - z_0)$, on retombe sur l'équation (5) du § 578, dont les conséquences ont été développées dans le texte de Sturm.

Mouvement d'un point à l'intérieur d'un tube.

Nous nous proposons de déterminer le mouvement d'une très-petite sphère placée dans un tube rectiligne parfaitement poli, dont le diamètre est égal à celui de la sphère, et qui tourne uniformément autour d'un axe horizontal.

Nous n'avons encore qu'un seul point mobile, mais il est assujetti à une liaison qui change avec le temps, puisqu'il doit rester sur une droite qui se déplace suivant une loi donnée. Soient a la longueur de la perpendiculaire commune OA au tube et à l'axe de rotation, φ l'angle de ces deux droites. A un moment quelconque on connaît la position du tube, et, pour déterminer la position du mobile M, il suffirait de connaître aussi sa distance AM au pied de la perpendiculaire OA; je désigne cette distance par q. Prenons trois axes rectangulaires, OX coïncidant avec l'axe de rotation, OZ dirigé en sens contraire de la pesanteur, OY perpendiculaire au plan ZOX, et supposons qu'à l'origine du temps OA soit dirigé suivant OZ et que la portion du tube dans lequel q est positif soit du même côté que OY par rapport à ZOX; à l'époque t, OA ainsi que la projection du tube sur YOZ ont tourné d'un angle ωt, et, en projetant le contour OAM sur les trois axes, on obtient les coordonnées rectangulaires de M en fonction de q:

$$x = q\cos\varphi,$$
$$y = -a\sin\omega t + q\sin\varphi\cos\omega t,$$
$$z = a\cos\omega t + q\sin\varphi\sin\omega t.$$

On calcule sans peine x', y', z', et l'on trouve, en supposant la masse de M égale à l'unité, la demi-force vive

$$T = \frac{1}{2}(q'^2 - 2a\omega q' \sin\varphi + q^2\omega^2 \sin^2\varphi + a^2\omega^2).$$

La pesanteur est la seule force qui agisse en dehors des liaisons, et son travail virtuel

$$\delta U = -g\delta z = -g \sin\varphi \sin\omega t \delta q.$$

Nous avons tous les éléments nécessaires pour former l'équation unique dont nous avons besoin :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'} - \frac{\partial T}{\partial q} - \frac{\partial U}{\partial q} = 0.$$

Cette équation peut s'écrire

$$\text{(I)} \qquad \frac{d^2 q}{dt^2} - \omega^2 q \sin^2\varphi + g \sin\varphi \sin\omega t = 0.$$

Le moyen le plus commode pour intégrer cette équation est de chercher une intégrale particulière de la forme $q = \lambda \sin\omega t$; en substituant, on voit qu'une pareille expression satisfait à l'équation (I) en prenant

$$\lambda = \frac{g \sin\varphi}{\omega^2(1 + \sin^2\varphi)}.$$

On pose alors

$$q = u + \frac{g \sin\varphi \sin\omega t}{\omega^2(1 + \sin^2\varphi)};$$

on porte cette valeur dans l'équation (I), qui donne

$$\frac{d^2 u}{dt^2} - \omega^2 u \sin^2\varphi = 0.$$

L'intégrale générale de cette équation linéaire sans second membre est bien connue; en l'ajoutant à l'intégrale particulière qu'on a trouvée d'abord, on obtient

l'intégrale générale de (I) :

$$q = Ce^{\omega t \sin\varphi} + Be^{-\omega t \sin\varphi} + \frac{g \sin\varphi \sin\omega t}{\omega^2(1+\sin^2\varphi)}.$$

La vitesse de glissement de M le long du tube est

$$\frac{dq}{dt} = \omega \sin\varphi \left[Ce^{\omega t \sin\varphi} - Be^{-\omega t \sin\varphi} + \frac{g \cos\omega t}{\omega^2(1+\sin^2\varphi)} \right].$$

On déterminera C et B à l'aide des valeurs initiales de q et de $\frac{dq}{dt}$, car les équations précédentes deviennent, pour $t = 0$,

$$q_0 = C + B, \quad q'_0 = (C - B)\omega \sin\varphi + \frac{g \sin\varphi}{\omega(1+\sin^2\varphi)}.$$

En général, C n'est pas nul; les termes qui le contiennent finissent par être bien supérieurs aux autres dans l'expression de q et de q', et le mobile finit par s'éloigner indéfiniment du point A; si C est nul, le mouvement tend à devenir oscillatoire. Il est remarquable, dans tous les cas, que ce mouvement ne dépende point de la grandeur de a.

Pendule double.

Je désignerai ainsi le système de deux points pesants A et B attachés en deux points d'un fil flexible, inextensible et sans masse dont une extrémité est fixée en un point O. Je suppose que, les deux portions OA, AB du fil restant toujours tendues, les points A et B aient été écartés de leurs positions d'équilibre et animés de vitesses initiales données, mais de telle sorte qu'ils ne sortent pas du plan vertical qui contient d'abord OA et AB : il s'agit de chercher le mouvement du système.

On connaît les longueurs a et b des droites OA et AB; il suffira d'avoir les angles φ et ψ de ces deux lignes

avec la verticale pour déterminer la position des points A et B. Les inconnues de Lagrange se réduisent à deux, φ et ψ. En prenant pour axe des x l'horizontale menée en O dans le plan où se meut le pendule, pour axe des y la verticale du point O, les coordonnées de A et B sont respectivement

$$x = a\sin\varphi, \qquad y = a\cos\varphi,$$
$$x = a\sin\varphi + b\sin\psi, \quad y = a\cos\varphi + b\cos\psi.$$

Soient m et n les masses des deux points; on trouve la demi-force vive

$$T = \frac{1}{2}ma^2\varphi'^2 + \frac{1}{2}n[a^2\varphi'^2 + b^2\psi'^2 + 2ab\varphi'\psi'\cos(\psi - \varphi)],$$

et le travail de la pesanteur pour un déplacement virtuel du système

$$\delta U = -ma\sin\varphi\delta\varphi - n(a\sin\varphi\delta\varphi + b\sin\psi\delta\psi).$$

Le lecteur formera sans peine les deux équations de Lagrange qui font connaître le mouvement cherché, et qui sont, après quelques réductions,

$$(m+n)a\frac{d^2\varphi}{dt^2} + nb\cos(\psi - \varphi)\frac{d^2\psi}{dt^2}$$
$$- nb\sin(\psi - \varphi)\frac{d\psi^2}{dt^2} + (m+n)g\sin\varphi = 0,$$

$$a\cos(\psi - \varphi)\frac{d^2\varphi}{dt^2} + b\frac{d^2\psi}{dt^2} - a\sin(\psi - \varphi)\frac{d\varphi^2}{dt^2} + g\sin\psi = 0.$$

On a l'intégrale des forces vives, mais on n'aperçoit pas d'autre intégrale rigoureuse; aussi nous bornerons-nous au cas où les angles φ et ψ restent très-petits. Suivant un principe général, les dérivées de ces angles par rapport au temps doivent être des quantités très-petites du même ordre; si donc on néglige les petites quantités

du troisième ordre dans les équations du mouvement, celles-ci se réduisent à la forme linéaire

$$(1)\quad \begin{cases} (m+n)a\dfrac{d^2\varphi}{dt^2}+nb\dfrac{d^2\psi}{dt^2}+(m+n)g\varphi=0, \\ a\dfrac{d^2\varphi}{dt^2}+b\dfrac{d^2\psi}{dt^2}+g\psi=0. \end{cases}$$

La méthode la plus rapide pour intégrer ces équations simultanées consiste à chercher deux intégrales particulières de la forme

$$\varphi=e^{rt},\quad \psi=\lambda e^{rt};$$

en substituant, on voit que les constantes λ et r doivent donner

$$(m+n)ar^2+b\lambda r^2+(m+n)g=0,\quad (a+b\lambda)r^2+g\lambda=0,$$

d'où l'on tire

$$(2)\quad (m+n)(ar^2+g)(br^2+g)=abnr^4,$$

$$\lambda=-\frac{ar^2}{g+br^2}.$$

L'équation (2) donne pour r^2 deux valeurs négatives entre lesquelles sont comprises $-\frac{g}{a}$ et $-\frac{g}{b}$; les quatre racines de l'équation (2) sont donc de la forme $\pm r'\sqrt{-1}$, $\pm r''\sqrt{-1}$; à chacune d'elles correspond un couple d'intégrales particulières du système (1); en ajoutant ces intégrales multipliées par des constantes, on obtiendra les deux intégrales générales

$$\varphi=Ce^{r't\sqrt{-1}}+C'e^{-r't\sqrt{-1}}+De^{r''t\sqrt{-1}}+D'e^{-r''t\sqrt{-1}},$$

$$\psi=\frac{ar'^2}{g-br'^2}\left(Ce^{r't\sqrt{-1}}+C'e^{-r't\sqrt{-1}}\right)+\ldots.$$

On peut donner aux arbitraires des valeurs telles que

les imaginaires disparaissent et qu'il reste

$$(3)\quad \begin{cases} \varphi = G\cos r't + G'\sin r't + H\cos r''t + H'\sin r''t, \\ \psi = \dfrac{ar'^2}{g - br'^2}(G\cos r't + G'\sin r't) \\ \qquad + \dfrac{ar''^2}{g - br''^2}(H\cos r''t + H'\sin r''t). \end{cases}$$

Supposons que pour $t = 0$ on ait $\varphi = \alpha$, $\psi = \beta$, $\varphi' = 0$, $\psi' = 0$; en faisant ces hypothèses dans les intégrales précédentes et leurs dérivées premières prises par rapport au temps, on a des équations de condition d'où l'on tire

$$G' = H' = 0, \quad G + H = \alpha, \quad \frac{ar'^2}{g - br'^2}G + \frac{ar''^2}{g - br''^2}H = \beta.$$

En général, le mouvement des deux portions du fil résulte de deux oscillations simultanées dont la période est différente ; pour que ces deux parties oscillent comme des pendules simples, il faudrait que G ou H fût nul, car les racines r' et r'' ne peuvent devenir égales que si $n = 0$, et alors on n'a qu'un pendule simple. Admettons que H soit nul ; on aura $G = \alpha$, et

$$\frac{ar'^2}{g - br'^2}\alpha = \beta,$$

d'où

$$r'^2 = \frac{g\beta}{a\alpha + b\beta}.$$

Exprimons que cette valeur de r'^2 satisfait à l'équation (2) ; il en résulte

$$(m+n)a\alpha^2 + (m+n)(b-a)\alpha\beta - mb\beta^2 = 0.$$

Cette équation montre qu'on peut réaliser le cas particulier considéré en donnant à l'écart initial β une valeur de même signe que α, mais plus grande en valeur abso-

lue, ou bien de signe contraire et $> \frac{a\alpha}{b}$ en valeur absolue. Dans l'un ou l'autre cas les intégrales (3) deviennent, en tenant compte des valeurs des paramètres qui y entrent,

$$\varphi = \alpha \cos t \sqrt{\frac{g}{b + \frac{a\alpha}{\beta}}}, \quad \psi = \beta \cos t \sqrt{\frac{g}{b + \frac{a\alpha}{\beta}}}.$$

OA et AB exécutent des oscillations concordantes, mais d'amplitudes différentes; la longueur du pendule synchrone est comprise entre b et $b + a$, si α et β sont de même signe; elle est $< b$ si α et β sont de signes contraires.

Si r'' était double de r', condition facile à exprimer, OA et AB auraient un mouvement plus compliqué que celui de la tige d'un pendule simple, mais ce mouvement serait encore périodique et la période serait $\frac{2\pi}{r'}$.

Équations canoniques.

Nous supposerons expressément, dans les questions dont nous allons nous occuper, qu'on puisse écrire l'intégrale des forces vives, ce qui exige, nous l'avons vu, que les équations de liaison entre les coordonnées des points mobiles ne renferment pas le temps explicitement et que le travail virtuel $\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)$ soit la variation exacte d'une fonction U appelée *fonction des forces;* dans ces questions, qui comprennent les principaux problèmes de la Mécanique rationnelle, on peut déduire des équations de Lagrange un système d'équations remarquables, que Poisson a nommées *canoniques,* mais qui ont été pour la première fois étudiées par Hamilton.

Admettons qu'on ait exprimé la demi-force vive T au

moyen des n variables indépendantes $q_1, q_2, \ldots, q_n$ et de leurs dérivées, et posons

$$\frac{\partial T}{\partial q'_1} = p_1, \quad \frac{\partial T}{\partial q'_2} = p_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial T}{\partial q'_n} = p_n.$$

Si de ces équations on tire les valeurs de $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$ pour les substituer dans l'expression de T, la demi-force vive deviendra fonction de $q_1, q_2, \ldots, q_n$ et de $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Nous allons chercher comment se transforment les équations de Lagrange quand au lieu des variables q'_i on introduit $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Nous conserverons la caractéristique ∂ pour désigner les dérivées partielles quand les variables indépendantes seront les q_i et les q'_i, et nous reviendrons à la caractéristique d dans le cas où on prendra pour variables indépendantes les q_i et les p_i. Il s'agit de trouver les relations qui existent entre les deux systèmes de dérivées partielles de la demi-force vive. La différentielle totale de cette fonction peut s'exprimer de deux manières, selon le système de variables indépendantes qu'on envisage :

$$(1) \quad dT = \sum \frac{\partial T}{\partial q_i} dq_i + \sum \frac{\partial T}{\partial q'_i} dq'_i = \sum \frac{\partial T}{\partial q_i} dq_i + \sum p_i dq'_i,$$

$$(2) \qquad dT = \sum \frac{dT}{dq_i} dq_i + \sum \frac{dT}{dp_i} dp_i.$$

D'autre part, nous avons vu que, dans les cas que nous considérons, T est une fonction homogène du second degré des q'_i, et qu'on a par conséquent

$$2T = \sum q'_i \frac{\partial T}{\partial q'_i} = \sum p_i q'_i;$$

prenant les différentielles totales,

$$2dT = \sum p_i dq'_i + \sum q'_i dp_i.$$

Si l'on ajoute les équations (1) et (2), et qu'on en retranche la précédente, il reste

$$\sum\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{dT}{dq_i}\right)dq_i+\sum\left(\frac{dT}{dp_i}-q'_i\right)dp_i=0.$$

Les $2n$ différentielles dq_i et dp_i sont arbitraires; le coefficient de chacune d'elles doit être nul, et l'on a, pour toutes les valeurs de i,

$$\frac{\partial T}{\partial q_i}=-\frac{dT}{dq_i}, \tag{3}$$

$$q'_i=\frac{dq_i}{dt}=\frac{dT}{dp_i}. \tag{4}$$

La fonction U, ne contenant pas les q'_i et par suite les p_i, est indifférente au changement de variable que nous faisons, et l'on a

$$\frac{\partial U}{\partial q_i}=\frac{dU}{dq_i},\quad \frac{dU}{dp_i}=0. \tag{5}$$

En vertu de la première de ces relations, de l'équation (3) et de la définition des p_i, on a identiquement

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}-\frac{\partial U}{\partial q_i}=\frac{dp_i}{dt}+\frac{dT}{dq_i}-\frac{dU}{dq_i}.$$

Nous voyons ainsi comment se transforment les équations de Lagrange; mais introduisons, avec Hamilton, la fonction

$$H=U-T,$$

et remarquons que l'équation (4) donne, eu égard à la seconde relation (5),

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{dT}{dp_i}-\frac{dU}{dp_i}=-\frac{dH}{dp_i};$$

les n équations renfermées dans la précédente et les transformées des équations de Lagrange constituent le système des $2n$ équations canoniques

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{dp_1}{dt} = \dfrac{dH}{dq_1}, & \dfrac{dp_2}{dt} = \dfrac{dH}{dq_2}, & \ldots, & \dfrac{dp_n}{dt} = \dfrac{dH}{dq_n}, \\ \dfrac{dq_1}{dt} = -\dfrac{dH}{dp_1}, & \dfrac{dq_2}{dt} = -\dfrac{dH}{dp_2}, & \ldots, & \dfrac{dq_n}{dt} = -\dfrac{dH}{dp_n}. \end{cases}$$

H est une fonction connue que l'on devra commencer par calculer. Soit

$$(7)\qquad H = \psi(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n).$$

Les $2n$ équations simultanées admettent $2n$ intégrales renfermant autant d'arbitraires qui entreront avec le temps t dans la valeur des inconnues du problème, q_1, $q_2, \ldots, q_n$.

Le système canonique n'a pas encore pu être intégré d'une manière générale, mais il a fourni aux géomètres l'occasion de recherches très-importantes qui ne peuvent trouver place ici ; toutefois, j'exposerai, en me restreignant au cas qui nous intéresse directement, un théorème de Jacobi qui constitue, je crois, l'indication la plus utile pour intégrer les équations canoniques.

Équation aux dérivées partielles de Jacobi.

Soit λ la constante des forces vives, en sorte qu'on ait

$$T - U = - H = \lambda ;$$

prenons la fonction (7) qui donne la valeur de H, remplaçons-y les p_i par $\dfrac{dS}{dq_i}$, et égalons l'expression ainsi

formée à $-\lambda$; nous aurons

$$(8) \qquad \psi\left(q_1, q_2, \ldots, q_n, \frac{dS}{dq_1}, \frac{dS}{dq_2}, \ldots, \frac{dS}{dq_n}\right) + \lambda = 0;$$

c'est une équation aux dérivées partielles qui peut déterminer une inconnue S en fonction de $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Cela posé, voici en quoi consiste le théorème de Jacobi :

Si l'on a trouvé une valeur de S *satisfaisant à l'équation* (8) *et renfermant* $n-1$ *arbitraires autres que celle qu'on peut introduire par simple addition, soit*

$$S_1 = F(q_1, q_2, \ldots, q_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \lambda),$$

on pourra écrire immédiatement les intégrales du système canonique (6) *sous la forme*

$$(9) \qquad \frac{dS_1}{d\alpha_1} = \beta_1, \quad \ldots, \quad \frac{dS_1}{d\alpha_{n-1}} = \beta_{n-1}, \quad \frac{dS_1}{d\lambda} = t + \varepsilon,$$

$$(10) \qquad \frac{dS_1}{dq_1} = p_1, \quad \frac{dS_1}{dq_2} = p_2, \quad \ldots, \quad \frac{dS_1}{dq_n} = p_n,$$

$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}, \varepsilon$ *étant* n *nouvelles arbitraires.*

L'ensemble des équations (9) et (10) renferme bien les $2n$ constantes que doivent contenir les intégrales générales du système canonique; il reste à vérifier que les intégrales proposées conduisent aux équations (6). Différentions les équations (9) par rapport au temps; nous aurons n relations

$$\sum \frac{d^2 S_1}{d\alpha_1 \, dq_i} \frac{dq_i}{dt} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\sum \frac{d^2 S_1}{d\alpha_{n-1} \, dq_i} \frac{dq_i}{dt} = 0,$$

$$\sum \frac{d^2 S_1}{d\lambda \, dq_i} \frac{dq_i}{dt} = 1;$$

intervertissant l'ordre des dérivations,

$$(11)\quad \begin{cases} \sum \frac{d^2 S_1}{dq_i d\alpha_1} \frac{dq_i}{dt} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ \sum \frac{d^2 S_1}{dq_i d\alpha_{n-1}} \frac{dq_i}{dt} = 0, \\ \sum \frac{d^2 S_1}{dq_i d\lambda} \frac{dq_i}{dt} = 1. \end{cases}$$

D'autre part, si l'on substitue dans l'équation (8) la valeur de S_1, on obtient une identité; la dérivée prise par rapport à une des constantes $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \lambda$ sera nulle, ce qui nous donnera n identités,

$$\sum \frac{d\psi}{d\left(\frac{dS_1}{dq_i}\right)} \frac{d^2 S_1}{dq_i d\alpha_1} = 0, \quad \dots, \quad \sum \frac{d\psi}{d\left(\frac{dS_1}{dq_i}\right)} \frac{d^2 S_1}{dq_i d\lambda} + 1 = 0.$$

Mais, si l'on a égard aux équations (10), la fonction ψ redeviendra celle qui entre dans l'équation (7); ses dérivées partielles par rapport à $\frac{dS_1}{dq_i}$ deviendront $\frac{d\psi}{dp_i}$, c'est-à-dire $\frac{dH}{dp_i}$; les n relations précédentes seront

$$\begin{gathered} \sum \frac{d^2 S_1}{dq_i d\alpha_1} \frac{dH}{dp_i} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ \sum \frac{d^2 S_1}{dq_i d\alpha_{n-1}} \frac{dH}{dp_i} = 0, \\ \sum \frac{d^2 S_1}{dq_i d\lambda} \frac{dH}{dp_i} = -1. \end{gathered}$$

Ce système de n équations ne diffère du système (11) que par le changement des $\frac{dq_i}{dt}$ en $-\frac{dH}{dp_i}$; on peut regarder ces deux groupes de quantités comme satisfaisant à un même système d'équations linéaires; elles

doivent être égales deux à deux : c'est dire que le second groupe des équations (6) est vérifié.

Pour obtenir les valeurs de $\frac{dp_1}{dt}$ et des dérivées analogues, telles que l'impose le premier groupe des équations (6), je différentie la première équation (10) :

$$\frac{dp_1}{dt} = \sum \frac{d^2 S_1}{dq_1 dq_i} \frac{dq_i}{dt} = \sum \frac{d^2 S_1}{dq_i dq_1} \frac{dq_i}{dt}.$$

Nous avons déjà vérifié que

$$\frac{dq_i}{dt} = -\frac{dH}{dp_i};$$

donc

$$\frac{dp_1}{dt} = -\sum \frac{dH}{dp_i} \frac{d^2 S_1}{dq_i dq_1}.$$

Mais, si l'on différentie par rapport à q_1 l'identité obtenue en remplaçant S par S_1 dans l'équation (8), il vient

$$\frac{d\psi}{dq_1} + \sum \frac{d\psi}{d\left(\frac{dS_1}{dq_i}\right)} \frac{d^2 S_1}{dq_i dq_1} = 0;$$

en remplaçant encore dans la fonction ψ les $\frac{dS_1}{dq_i}$ par leurs valeurs (10), cette fonction devient H et l'égalité précédente donne

$$\frac{dH}{dq_1} = -\sum \frac{dH}{dp_i} \frac{d^2 S_1}{dq_i dq_1};$$

par conséquent, la valeur de $\frac{dp_1}{dt}$ est bien égale à $\frac{dH}{dq_1}$, et l'on trouverait n égalités analogues.

L'intégration du système canonique est ramenée à la recherche d'une intégrale complète d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre, mais non linéaire ;

on n'a pas de méthode générale pour trouver une telle intégrale, mais on y parvient quelquefois en scindant l'équation (8), comme on le voit dans les deux exemples qui suivent.

Application au mouvement d'un point pesant.

Nous appliquerons d'abord les théories précédentes à une question excessivement simple, mais qui nous permettra de former sans peine toutes les équations que nous avons rencontrées et d'y lire des résultats connus. Il s'agit de déterminer le mouvement d'une petite masse m, soumise uniquement à l'action de la pesanteur. En admettant comme démontré que le point m ne sortira pas du plan vertical qui passe par sa vitesse initiale, la position de ce point sera déterminée par ses distances à deux axes, l'un horizontal, l'autre vertical. Si l'on appelle q_1, q_2 ces distances, on a la demi-force vive

$$T = \frac{1}{2} m(q_1'^2 + q_2'^2).$$

Introduisons les dérivées partielles p_1, p_2 : on aura

$$p_1 = mq_1', \quad p_2 = mq_2', \quad T = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2).$$

On a une fonction des forces $U = mgq_1$, et l'on peut écrire la fonction d'Hamilton

$$(7\ bis) \qquad H = U - T = mgq_1 - \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2).$$

Les équations canoniques sont

$$\frac{dp_1}{dt} = mg, \quad \frac{dp_2}{dt} = 0, \quad \frac{dq_1}{dt} = \frac{p_1}{m}, \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{p_2}{m}.$$

Il est bien facile de trouver et d'interpréter les inté-

grales de ce système; mais voyons celles que fournit la méthode de Jacobi. L'équation en S est

$$mgq_1 - \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{dS}{dq_1}\right)^2 + \left(\frac{dS}{dq_2}\right)^2\right] + \lambda = 0,$$

$$\left(\frac{dS}{dq_1}\right)^2 + \left(\frac{dS}{dq_2}\right)^2 = 2m^2gq_1 + 2m\lambda.$$

Cherchons une intégrale renfermant une arbitraire et de la forme

$$S_1 = f(q_1) + \varphi(q_2);$$

il suffit d'avoir, en désignant par α une constante,

$$f'^2(q_1) = 2m^2g(q_1 + \alpha), \quad \varphi'^2(q_2) = 2m(\lambda - mg\alpha).$$

De simples quadratures font connaître $f(q_1)$ et $\varphi(q_2)$, et l'on trouve

$$S_1 = \frac{2}{3}m\sqrt{2g}(q_1 + \alpha)^{\frac{3}{2}} + q_2\sqrt{2m(\lambda - mg\alpha)}.$$

Les intégrales du mouvement, représentées en général par les équations (9) et (10), seront ici

$$m\sqrt{2g(q_1 + \alpha)} - \frac{m^2gq_2}{\sqrt{2m(\lambda - mg\alpha)}} = \beta,$$

$$\frac{q_2\sqrt{m}}{\sqrt{2(\lambda - mg\alpha)}} = t + \varepsilon,$$

$$m\sqrt{2g(q_1 + \alpha)} = p_1, \quad \sqrt{2m(\lambda - mg\alpha)} = p_2.$$

La première fait connaître la trajectoire, la deuxième la loi du mouvement, et les deux autres donnent les composantes de la vitesse; les constantes α, β, ε et λ se déduisent des circonstances initiales. On peut vérifier que la valeur (7 *bis*) de H se réduit à $-\lambda$, ce qui permet d'avoir directement la valeur de cette constante.

Mouvement d'un point attiré vers deux centres fixes.

Soit à déterminer le mouvement d'un point M attiré vers deux centres fixes F, F_1 avec des intensités qui varient en raison inverse de la distance; on suppose la vitesse initiale dirigée dans le plan qui passe par FF_1 et par la position initiale A du point M.

Le mobile ne sortira pas du plan AFF_1, et sa position serait déterminée à chaque instant par deux coordonnées rectangulaires x, y, l'axe des x étant dirigé suivant FF_1 et l'axe des y étant la perpendiculaire au milieu de FF_1.

Mais on pourra bien plus facilement trouver les intégrales du problème en définissant la position du point M par les longueurs q et q_1 des demi-axes focaux de l'ellipse et de l'hyperbole qui ont pour foyers F et F_1 et qui passent en M; ces deux coniques, on le sait, se coupent orthogonalement, et, si l'on pose $FF_1 = 2c$, on a entre les coordonnées x, y d'une part et q, q_1 de l'autre les relations

$$\frac{x^2}{q^2} + \frac{y^2}{q^2 - c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{q_1^2} - \frac{y^2}{c^2 - q_1^2} = 1,$$

d'où l'on déduit

$$x^2 = \frac{q^2 q_1^2}{c^2}, \quad y^2 = \frac{(q^2 - c^2)(c^2 - q_1^2)}{c^2},$$

$$(1) \qquad ds^2 = dx^2 + dy^2 = \frac{q^2 - q_1^2}{q^2 - c^2}\, dq^2 + \frac{q^2 - q_1^2}{c^2 - q_1^2}\, dq_1^2.$$

En prenant la masse de M égale à l'unité, on a, pour la demi-force vive et ses dérivées,

$$T = \frac{1}{2}\,\frac{q^2 - q_1^2}{q^2 - c^2}\, q'^2 + \frac{1}{2}\,\frac{q^2 - q_1^2}{c^2 - q_1^2}\, q_1'^2,$$

$$\frac{\partial T}{\partial q'} = p = \frac{q^2 - q_1^2}{q^2 - c^2}\, q', \quad \frac{\partial T}{\partial q_1'} = p_1 = \frac{q^2 - q_1^2}{c^2 - q_1^2}\, q_1';$$

on tire des deux dernières équations q' et q'_1, et on les substitue dans la valeur de T, qui devient

$$T = \frac{1}{2}\frac{q^2 - c^2}{q^2 - q_1^2}p^2 + \frac{1}{2}\frac{c^2 - q_1^2}{q^2 - q_1^2}p_1^2.$$

Soient μ, μ_1 les attractions de F et de F_1 à l'unité de distance, r, r_1 les longueurs MF, MF_1 ; le travail correspondant à un déplacement virtuel du point M sera

$$\delta U = \left(\mu\frac{c - x}{r^3} - \mu_1\frac{c + x}{r_1^3}\right)\delta x - \left(\frac{\mu y}{r^3} + \frac{\mu_1 y}{r_1^3}\right)\delta y:$$

le second membre est une différentielle exacte, et, en intégrant, on aura la fonction des forces

$$U = \frac{\mu}{r} + \frac{\mu_1}{r_1}.$$

Les propriétés fondamentales des rayons vecteurs donnent

$$r + r_1 = 2q, \quad r - r_1 = \mp 2q_1,$$

d'où

$$r = q \mp q_1, \quad r_1 = q \pm q_1,$$

$$U = \frac{\mu}{q \mp q_1} + \frac{\mu_1}{q \pm q_1}.$$

On a supposé que F était sur la partie positive de l'axe des x, F_1 sur la partie négative ; dans ce cas, si l'x du point M est positif, on prendra les signes supérieurs, et, s'il est négatif, les signes inférieurs ; mais on peut toujours conserver les signes supérieurs en convenant que, quand l'abscisse sera négative, on prendra aussi pour q_1 une valeur négative, de sorte que cette coordonnée pourra varier entre $-c$ et $+c$. Cela posé, nous avons les deux parties de la fonction d'Hamilton

$$H = U - T = \frac{\mu}{q - q_1} + \frac{\mu_1}{q + q_1} - \frac{1}{2}\frac{q^2 - c^2}{q^2 - q_1^2}p^2 - \frac{1}{2}\frac{c^2 - q_1^2}{q^2 - q_1^2}p_1^2.$$

Nous n'avons pas besoin d'écrire les quatre équations canoniques, mais nous chercherons leurs intégrales à l'aide du théorème de Jacobi; l'équation aux dérivées partielles qu'il faut considérer est

$$\frac{\mu}{q-q_1}+\frac{\mu_1}{q+q_1}-\frac{1}{2}\frac{q^2-c^2}{q^2-q_1^2}\left(\frac{dS}{dq}\right)^2 \\ -\frac{1}{2}\frac{c^2-q_1^2}{q^2-q_1^2}\left(\frac{dS}{dq_1}\right)^2+\lambda=0$$

ou, en chassant les dénominateurs,

$$(q^2-c^2)\left(\frac{dS}{dq}\right)^2+(c^2-q_1^2)\left(\frac{dS}{dq_1}\right)^2 \\ =2\lambda(q^2-q_1^2)+2\mu(q+q_1)+2\mu_1(q-q_1).$$

Nous allons encore chercher une intégrale renfermant une constante et de la forme $S_1=f(q)+\varphi(q_1)$; il suffit d'avoir

$$(q^2-c^2)f'^2(q)=\quad 2\lambda q^2+2(\mu+\mu_1)q-2\alpha,$$
$$(c^2-q_1^2)\varphi'^2(q_1)=-2\lambda q_1^2+2(\mu-\mu_1)q_1+2\alpha.$$

Les fonctions f et φ sont données par de simples quadratures au moyen d'intégrales elliptiques, et l'intégrale complète S_1 peut s'écrire

$$S_1=\int\frac{\sqrt{2\lambda q^2+2(\mu+\mu_1)q-2\alpha}}{\sqrt{q^2-c^2}}\,dq \\ +\int\frac{\sqrt{2\alpha+2(\mu-\mu_1)q_1-2\lambda q_1^2}}{\sqrt{c^2-q_1^2}}\,dq_1.$$

L'époque à laquelle le mobile arrive à une position déterminée est donnée par la formule

$$\frac{dS_1}{d\lambda}=t+\varepsilon.$$

L'équation de la trajectoire, $\frac{dS_1}{d\alpha}=\beta$, se formera en pre-

nant par rapport à α la dérivée des quantités placées sous les signes $\int$ dans la valeur de S_1; mais, pour étudier la trajectoire, il vaut mieux prendre les différentielles des deux membres de l'équation obtenue, ce qui donne, en mettant en évidence les doubles signes des radicaux,

$$\text{(II)} \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\pm dq}{\sqrt{(q^2-c^2)[\lambda q^2+(\mu+\mu_1)q-\alpha]}} \\ &= \frac{\pm dq_1}{\sqrt{(c^2-q_1^2)[\alpha+(\mu-\mu_1)q_1-\lambda q_1^2]}} \end{aligned} \right.$$

Les constantes λ et α se déduisent des circonstances initiales. Je désigne par des lettres surmontées d'un trait les valeurs initiales des quantités que ces lettres représentent en général. L'intégrale des forces vives, $H = -\lambda$, qui est vérifiée dans tous ces problèmes, va nous donner λ:

$$\text{(III)} \qquad \lambda = -\overline{H} = \frac{1}{2}\bar{v}^2 - \frac{\mu}{\bar{r}} - \frac{\mu_1}{\bar{r}_1}.$$

Pour calculer α, considérons la position M' du mobile, infiniment voisine de M et définie par les coordonnées $q+dq$, q_1+dq_1; entre les deux ellipses et les deux hyperboles qui se coupent en M et en M' est compris un rectangle infiniment petit dont les côtés sont donnés par l'expression générale (I) de ds, dans laquelle on ferait tour à tour $dq_1 = 0$ ou $dq = 0$; ces côtés sont

$$dq\sqrt{\frac{q^2-q_1^2}{q^2-c^2}}, \quad dq_1\sqrt{\frac{q^2-q_1^2}{c^2-q_1^2}};$$

leur rapport est égal à la tangente de l'angle ω que la vitesse en M fait avec l'ellipse de demi-axe q qui y passe

$$\tang\omega = \sqrt{\frac{c^2-q_1^2}{q^2-c^2}}\,\frac{dq}{dq_1}.$$

Mais on peut tirer de l'équation (II) le rapport de dq à dq_1, et il vient

$$\tang\omega = \pm\sqrt{\frac{\lambda q^2 + (\mu + \mu_1)q - \alpha}{\alpha + (\mu - \mu_1)q_1 - \lambda q_1^2}}.$$

Il suffit d'appliquer cette formule à l'instant initial pour déterminer α en fonction de $\bar{q}$, $\bar{q}_1$, $\bar{\omega}$ et λ, qui est déjà connu.

Revenons à l'équation (II). On ne doit donner à q et q_1 que des valeurs telles que les quantités soumises aux deux radicaux aient le même signe, et je dis que ce signe est nécessairement le signe $+$. En effet, d'après la nature de l'ellipse et de l'hyperbole, $q^2 - c^2$ et $c^2 - q_1^2$ sont > 0; les deux autres facteurs sous les radicaux ont pour somme

$$\begin{aligned}\lambda(q^2 - q_1^2) + \mu(q + q_1) + \mu_1(q - q_1) \\ = (q^2 - q^2)\left(\lambda + \frac{\mu}{r} + \frac{\mu_1}{r_1}\right) = \frac{1}{2}(q^2 - q_1^2)v^2;\end{aligned}$$

cette somme est positive : donc si les deux facteurs ont le même signe, ils seront positifs. La trajectoire peut affecter un grand nombre de formes suivant les valeurs de q et q_1 qui annulent les radicaux; elle n'a des branches infinies que si λ est positif, ce qui permet de prendre q infini.

Cherchons quelles doivent être les circonstances initiales pour que la trajectoire se réduise à une conique ayant pour foyers F, F_1 et, pour fixer les idées, à une ellipse; il faut que le trinôme $\lambda q^2 + (\mu + \mu_1)q - \alpha$ soit négatif pour toute valeur de q différente de $\bar{q}$, ce qui exige, en se reportant à la théorie élémentaire des trinômes du second degré,

$$\lambda < 0, \quad \mu + \mu_1 = -2\lambda\bar{q}, \quad -\alpha = \lambda\bar{q}^2;$$

la troisième condition fait connaître α ; la deuxième, qui entraîne la première, donne, après avoir divisé par $\bar{q}$, remplacé λ par sa valeur (III) et transposé quelques termes,

$$\bar{v}^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{q} + \frac{2\mu_1}{r_1} - \frac{\mu_1}{p}.$$

Cette valeur de $\bar{v}^2$ est égale à la somme des carrés des vitesses initiales qu'il faut donner au point M pour qu'il décrive l'ellipse proposée en vertu de l'attraction du foyer F seul, ou du foyer F_1 ; ces vitesses initiales satisfont respectivement aux deux conditions

$$\bar{v}^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{q}, \quad \bar{v}^2 = \frac{2\mu_1}{r_1} - \frac{\mu_1}{q};$$

Nous avons un cas particulier d'un théorème dû à Legendre : *On se donne la position initiale d'un mobile et la direction de sa vitesse en ce point, et l'on suppose que le mobile décrive une courbe déterminée : 1° s'il est soumis à une force* F *et possède une vitesse initiale* a ; *2° s'il est soumis à une force* F' *et possède une vitesse initiale* a' ; *3° s'il est soumis à une force* F'' *et possède une vitesse initiale* a'', *etc. ; le mobile, étant soumis à la fois aux forces* F, F', F'', ..., *suivra la trajectoire proposée si le carré de sa vitesse initiale est* $a^2 + a'^2 + a''^2 + \dots$. Ce théorème se démontre sans peine en cherchant quelle serait la réaction exercée par la courbe proposée sur le mobile en le supposant obligé de se mouvoir le long de cette courbe sous les actions simultanées de F, F', ... ; on reconnaît que cette réaction est nulle.

TABLE

DES DÉFINITIONS, DES PROPOSITIONS ET DES FORMULES PRINCIPALES

CONTENUES

DANS LE SECOND VOLUME DU COURS DE MÉCANIQUE.

VINGT-SEPTIÈME LEÇON.

TRANSFORMATION ET COMPOSITION DES COUPLES.

339. TRANSLATION D'UN COUPLE DANS UN PLAN PARALLÈLE AU SIEN. — Le *bras de levier* d'un couple est la perpendiculaire commune menée entre les directions des forces. On nomme *moment* d'un couple le produit de l'une de ses forces par le bras de levier.

340, 341. *Un couple peut être transporté parallèlement à lui-même dans son plan ou dans tout plan parallèle et tourné comme on voudra dans ce plan sans que son action sur le corps auquel il est appliqué soit changée, pourvu qu'on suppose le nouveau bras de levier invariablement fixé au premier.*

342. ÉQUIVALENCE DES COUPLES QUI ONT LE MÊME MOMENT. — *Un couple peut être remplacé par un autre couple, de bras de levier différent, pourvu que leurs moments soient égaux.*

343. Pour connaître le sens d'un couple, il faut supposer fixé le milieu du bras de levier et examiner dans quel sens chaque force tend à faire tourner ce bras de levier dans son plan. Il ne faut pas confondre cette rotation fictive avec celle du corps auquel le couple est supposé appliqué.

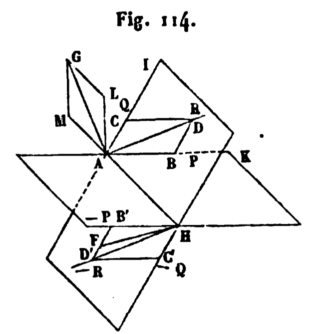
344. COMPOSITION DES COUPLES SITUÉS DANS UN MÊME PLAN OU DANS DES PLANS PARALLÈLES. — *Deux couples situés dans un même plan ou dans des plans parallèles se composent en un seul, situé dans un plan parallèle à celui des couples proposés, et dont le moment est égal à la somme ou à la différence des moments des couples*

composants, suivant qu'ils tendent à faire tourner leur plan dans le même sens ou en sens contraires.

345, 346. *Des couples en nombre quelconque, situés dans un même plan ou dans des plans parallèles, se composent en un seul situé dans un plan parallèle à ceux des couples proposés, et dont le moment est égal à la somme algébrique des moments de ces derniers.*

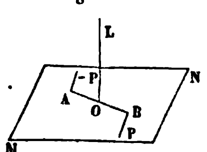
347. COMPOSITION DES COUPLES SITUÉS DANS DES PLANS QUELCONQUES. — *Si l'on mène dans les plans des deux couples donnés deux droites* AB, AC, *perpendiculaires à l'intersection de ces plans et proportionnelles aux moments de ces couples, la diagonale* AD *du parallélogramme* ABCD, *construit sur ces deux droites, représentera en grandeur le moment du couple résultant, dont le plan passera par cette diagonale et par l'intersection* AH.

Fig. 114.



348. AUTRE MANIÈRE DE PRÉSENTER LA COMPOSITION DES COUPLES. — Par un point O pris à volonté sur le bras de levier soit menée une droite OL, perpendiculaire au plan du couple (P, — P), et dont la grandeur représente le moment du couple, cette droite étant dirigée d'un côté de ce plan tel, qu'un observateur placé sur cette perpendiculaire, les pieds sur le plan et l'œil au point L, verrait tourner ce plan dans un sens convenu, par exemple de sa gauche vers sa droite. Nous appellerons cette droite le *moment linéaire* du couple.

Fig. 115.



349. *Le moment linéaire du couple résultant de plusieurs couples situés dans des plans parallèles est égal à la somme algébrique des moments linéaires des couples composants.*

350. *Deux couples situés dans des plans différents se composent en un seul dont le moment linéaire est la diagonale du parallélogramme qui a pour côtés les moments linéaires des deux couples composants.*

351. Les couples se composent comme des forces qui seraient représentées en grandeur et en direction par leurs moments linéaires, et qui passeraient par un même point.

VINGT-HUITIÈME LEÇON.

COMPOSITION ET ÉQUILIBRE DES FORCES APPLIQUÉES A UN SYSTÈME INVARIABLE.

352. Réduction des forces appliquées a un système invariable. — *Toutes les forces appliquées à un corps solide peuvent se réduire à une force unique* R, *résultante des forces transportées parallèlement à elles-mêmes en un point arbitraire* O *et à un couple unique* (S, — S).

353. *Quand un système de forces est en équilibre, les forces transportées parallèlement à elles-mêmes en un point quelconque se font équilibre autour de ce point, et les couples résultant de la translation de ces forces doivent aussi se faire équilibre.* Ces conditions sont d'ailleurs suffisantes.

354. Si le système admet une résultante unique, la force R est parallèle au plan du couple résultant. Cette condition est suffisante.

355. *Un nombre quelconque de forces appliquées à un système invariable peuvent se réduire à deux forces* S *et* T *qui sont, en général, dans des plans différents, et dont l'une passe par un point* O, *entièrement arbitraire.* Cette réduction peut s'opérer d'une infinité de manières.

356. Réciproquement, deux forces T et S, non situées dans le même plan, peuvent toujours se ramener à une force et à un couple.

357. Équilibre d'un système de forces parallèles situées dans un même plan. — En nommant P, P', P'',... les forces données, x, x', x'',... leurs distances à un axe des y qui leur est parallèle, on a

$$P + P' + P'' + \ldots = 0,$$
$$Px + P'x' + P''x'' + \ldots = 0.$$

358. Si les forces données ne se font pas équilibre, elles auront une résultante unique R, appliquée à un point dont x_1 sera l'abscisse :

$$R = P + P' + P'' + \ldots;$$
$$x_1 = \frac{Px + P'x' + P''x'' + \ldots}{P + P' + P'' + \ldots}.$$

359. Si la force R était nulle, le système se réduirait à un couple.

360, 361. Composition et équilibre d'un système de forces situées dans un même plan. — 1° *La somme des moments des forces par rapport à un point quelconque de leur plan doit être nulle; 2° les sommes des composantes, suivant deux axes quelconques, doivent être nulles séparément.*

362, 363. Si les forces données ne se font pas équilibre, elles se réduiront à une force R et à un couple (S, — S) qui auront une résultante unique, si R n'est pas nul. On aura

$$R = P + p' + p'' + \ldots,$$
$$Rr = Pp + P'p' + \ldots.$$

Pour obtenir la direction suivant laquelle agit la résultante unique, soient x_1, y_1 les coordonnées d'un point quelconque de cette droite, et X_1, Y_1 les composantes de la force R parallèles aux axes; en posant

$$G = Xy - Yx + X'y' - Y'x' + \ldots,$$

on aura

$$-X_1 y_1 + Y_1 x_1 + G = 0.$$

364. Équations générales de l'équilibre. — Soit un système quelconque de forces P', P'',... appliquées à des points A (x, y, z), A' (x', y', z'), A'' (x'', y'', z''),... liés entre eux d'une manière invariable. Décomposons la force P en trois autres X, Y, Z parallèles à trois axes rectangulaires. On ramène le système proposé à plusieurs forces dirigées suivant les axes et à un certain nombre de couples (X, — X), (Y, — Y), situés dans les plans coordonnés. En appelant $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$, les résultantes des forces dirigées suivant les axes et L, M, N les moments résultants obtenus en composant les couples situés dans chacun des plans coordonnés, on aura

Fig. 123.

$$\mathcal{X} = X + X' + X'' + \ldots,$$
$$\mathcal{Y} = Y + Y' + Y'' + \ldots.$$
$$\mathcal{Z} = Z + Z' + Z'' + \ldots,$$
$$L = Zy - Yz + Z'y' - Y'z' + \ldots,$$
$$M = Xz - Zx + X'z' - Z'x' + \ldots,$$
$$N = Yx - Xy + Y'x' - X'y' + \ldots.$$

365, 366. Quand il y a équilibre, on a

$$X=0,\quad Y=0,\quad Z=0,$$
$$L=0,\quad M=0,\quad N=0,$$

ou bien, en introduisant les intensités des forces P, P', P",..., et les angles α, β, γ, α', β', γ',..., que leurs directions font avec les axes,

$$P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + \ldots = 0,$$
$$P\cos\beta + P'\cos\beta' + \ldots = 0,$$
$$P\cos\gamma + P'\cos\gamma' + \ldots = 0,$$

et

$$P(y\cos\gamma - z\cos\beta) + P'(y'\cos\gamma' - z'\cos\beta') + \ldots = 0,$$
$$P(z\cos\alpha - x\cos\gamma) + P'(z'\cos\alpha' - x'\cos\gamma') + \ldots = 0,$$
$$P(x\cos\beta - y\cos\alpha) + P'(x'\cos\beta' - y'\cos\alpha') + \ldots = 0.$$

367. On appelle moment d'une force par rapport à un axe le produit de la projection de cette force sur un plan perpendiculaire à l'axe multipliée par la plus courte distance entre cet axe et cette projection. *Si un système de forces appliquées à un corps solide est en équilibre, la somme des moments des forces, par rapport à trois axes rectangulaires menés par un même point, doit être nulle pour chacun de ces axes.*

368. Les six équations

$$X=0,\quad Y=0,\quad Z=0,$$
$$L=0,\quad M=0,\quad N=0,$$

sont vérifiées dans l'état d'équilibre d'un système quelconque de forces. Mais ces conditions ne sont plus suffisantes pour assurer l'équilibre, et il faut y joindre de nouvelles équations qui dépendent du mode de liaison des différentes parties du système.

VINGT-NEUVIÈME LEÇON.

SUITE DE LA COMPOSITION ET DE L'ÉQUILIBRE DE FORCES APPLIQUÉES A UN SYSTÈME DE FORME INVARIABLE.

369. Cas d'une résultante unique. — Quand il y a une résultante unique, on a

$$XL + YM + ZN = 0.$$

Cette équation exprime que les forces se réduisent à une force unique pourvu que X, Y, Z ne soient pas nulles à la fois, sans quoi le système se réduirait à un couple, et il n'y aurait pas de résultante unique.

370. La droite suivant laquelle agit la résultante est représentée par deux des équations suivantes :

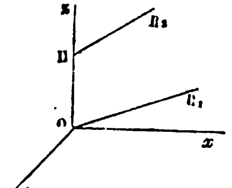
$$Yz - Zy + L = 0,$$
$$Zx - Xz + M = 0,$$
$$Xy - Yx + N = 0.$$

371, 372. Cas d'un point fixe. — La pression qu'éprouve le point fixe est égale à la résultante de toutes les forces transportées parallèlement à elles-mêmes en ce point. Les conditions d'équilibre sont

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0.$$

373. Cas d'un axe fixe. — Quand il y a un axe fixe Oz, ou, ce qui revient au même, deux points O et H, la seule condition d'équilibre est

Fig. 125.



$$N = 0.$$

La somme des moments des forces par rapport à l'axe fixe doit être nulle.

374. Si le corps peut glisser le long de l'axe, on a deux équations d'équilibre

$$Z = 0, \quad N = 0.$$

375, 376. Pour qu'un nombre quelconque de forces appliquées à un corps solide soit en équilibre autour d'un point fixe, il faut et il suffit qu'elles le soient autour de trois axes passant par le point fixe.

377, 378. Équilibre d'un corps qui repose sur un plan fixe. — Si un corps M repose par un de ses points sur un plan, il faut que les forces P, P′, P″,... aient une résultante unique, normale au plan et passant par le point d'appui.

379. On est conduit à une conséquence analogue, quand le corps M repose par différents points sur plusieurs plans ou surfaces fixes.

380. Les équations d'équilibre dans le cas d'un corps pressé contre un plan xOy sont

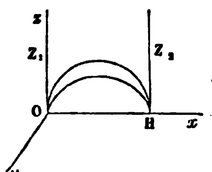
$$X = 0, \quad Y = 0,$$
$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0.$$

On devra y joindre l'inégalité

$$Z < 0.$$

381. Si le corps repose sur le plan xOy par deux points, les équations d'équilibre sont

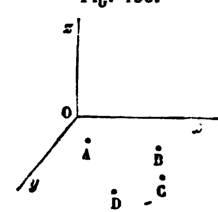
Fig. 129.



$$X = 0,$$
$$Y = 0,$$
$$L = 0,$$
$$N = 0.$$

382. Si le corps repose sur le plan xOy par un nombre quelconque de points d'appui A (x_1, y_1), B (x_2, y_2), C, D, etc., la résistance du plan en ces divers points équivaudra à des forces normales Z_1, Z_2, Z_3,... qui y seraient appliquées; il faut qu'il y ait une résultante unique et tombant dans l'intérieur du polygone ABCDA.

Fig. 130.



Les équations générales se réduisent à

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad N = 0.$$

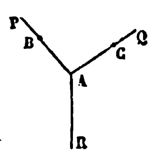
TRENTIÈME LEÇON.

ÉQUILIBRE DES FORCES APPLIQUÉES A DES CORDONS.

383. **Équilibre des forces appliquées a des cordons qui passent par un même point.** — Soient P et Q deux forces qui agissent aux extrémités d'une corde supposée flexible et inextensible. Si ces forces se font équilibre, la corde doit être tendue en ligne droite, et ces forces doivent être égales et contraires. La valeur commune des deux forces est ce qu'on appelle *la tension du fil*.

384. Si trois forces P, Q, R, agissent sur un point A, par l'intermédiaire de trois cordons qui se réunissent en ce point, et si elles se font équilibre, ces trois cordons sont dans un même plan, et chaque force peut être représentée en grandeur par le sinus de l'angle formé par les directions des deux autres.

Fig. 131.

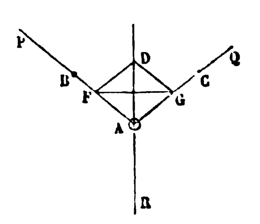


385. Supposons qu'on fixe un point B du cordon AP. La pression

que supporte le point B est égale et contraire à la résultante des forces Q et R. Si l'on fixe à la fois un point B du cordon AP et un point C du cordon AQ, la pression que supporte le point C sera égale et contraire à Q.

386, 387. Cas ou l'une des cordes peut glisser dans un anneau. — Si les deux forces P et Q sont appliquées aux extrémités d'une corde PAQ, qui passe dans un anneau retenu par une troisième force R, $P = Q$ est la condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait équilibre.

Fig. 132.



388. Si l'on désigne par α l'angle BAC, on a

$$R = 2P \cos \frac{1}{2} \alpha.$$

R représente également la pression supportée par le point A, quand on fixe l'anneau.

389. Équilibre du polygone funiculaire. — Soit un polygone funiculaire ABCDEF. Le premier et le dernier cordon, AB et EF, sont sollicités par des forces H et K dirigées nécessairement suivant les prolongements de ces cordons, sans quoi il n'y aurait pas équilibre. Aux différents sommets B, C, D, E sont appliquées des forces quelconques P, P', P'', P''', agissant par l'intermédiaire de cordons qui se réunissent en ces points. Il est inutile de supposer plus de trois cordons réunis au même sommet.

Fig. 133.

390. *Dans l'état d'équilibre, chaque cordon, tel que* CD, *doit être tiré par deux forces égales et contraires qu'on peut supposer appliquées à ses deux extrémités.*

391 à 397. Ce principe conduit aux conditions d'équilibre du polygone funiculaire.

Toutes les forces immédiatement appliquées au polygone funiculaire, transportées parallèlement à elles-mêmes en un point quel-

conque, se font équilibre autour de ce point, et la tension de chaque cordon est la résultante de toutes les forces qui agissent d'un même côté de ce cordon.

Réciproquement, *si les forces sont telles, que, transportées parallèlement à elles-mêmes en un point quelconque, elles s'y fassent équilibre, il y aura toujours une figure d'équilibre.*

398. Cas ou il y a des anneaux. — Si tous les sommets portent des anneaux, les tensions de tous les cordons sont égales, d'où résulte

$$H = K,$$

$$P = 2H\cos\frac{1}{2}B, \quad P' = 2H\cos\frac{1}{2}C, \ldots$$

399. Si l'on se donnait la figure du polygone, on connaîtrait par là en grandeur et en direction les forces qu'il faudrait appliquer à chaque sommet pour le tenir en équilibre.

400, 401. Supposons que les cordes extrêmes AB, EF soient dans un même plan. Pour avoir la tension des cordons extrêmes, il suffit de décomposer suivant leurs directions la résultante de toutes les forces transportées parallèlement à elles-mêmes au point de rencontre de ces cordons.

402. Cas ou il y a plusieurs cordons a un même sommet du polygone. — Il faut, pour l'équilibre, que l'une quelconque des forces qui sollicitent les cordons soit égale et directement contraire à la résultante de toutes les autres. Si l'on fixe un point sur chacun des cordons, excepté sur un seul, les pressions que la force P exerce sur les points fixes, s'il n'y a que trois cordons, non situés dans le même plan, s'obtiendront en décomposant la force P en trois autres agissant suivant les prolongements des cordons. S'il y a plus de trois cordons, le problème devient indéterminé.

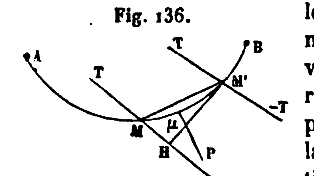
TRENTE ET UNIÈME LEÇON.

ÉQUILIBRE D'UN FIL FLEXIBLE.

403. Direction de la tension dans un fil en équilibre. — Soit AMB un fil flexible, d'une très-petite épaisseur, attaché par ses extrémités à deux points fixes A et B, et dont tous les points sont sollicités par de très-petites forces.

Soit M un point quelconque de ce fil. Les deux parties AM, MB exercent l'une sur l'autre, dans l'état d'équilibre, des actions moléculaires égales et contraires. On admet que toutes les forces qui proviennent de AM agissant sur MB, se réduisent à une force unique T appliquée au point M, et de même que la partie MB exerce sur AM une action qui se réduit à une force égale et contraire à T. La valeur commune de ces deux forces est ce qu'on appelle *la tension du fil* au point M.

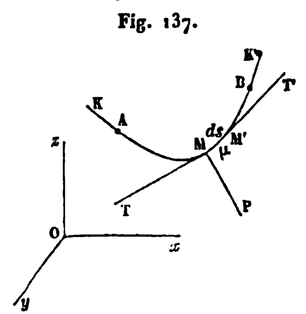
Fig. 136.



404. *La tension s'exerce suivant la tangente au point* M *à la courbe que forme le fil.*

405, 406. ÉQUILIBRE D'UN FIL SOLLICITÉ PAR DE PETITES FORCES. — Soient ε le produit de la section normale par la densité au point M, P la force qui agit en ce point, X, Y, Z ses composantes parallèles à trois axes Ox, Oy, Oz, et T la tension. Les équations de l'équilibre sont :

Fig. 137.



$$(1)\quad \begin{cases} d\left(\mathrm{T}\dfrac{dx}{ds}\right) + \mathrm{X}\varepsilon\, ds = 0, \\ d\left(\mathrm{T}\dfrac{dy}{ds}\right) + \mathrm{Y}\varepsilon\, ds = 0, \\ d\left(\mathrm{T}\dfrac{dz}{ds}\right) + \mathrm{Z}\varepsilon\, ds = 0. \end{cases}$$

407. INTÉGRATION DES ÉQUATIONS (1). — Soient e, f, g; e', f', g' les angles que les tangentes à la courbe aux points A et B font avec les axes : on a

$$\mathrm{K}\cos e + \mathrm{K}'\cos e' + \int_0^l \mathrm{X}\varepsilon\, ds = 0;$$

la somme algébrique des composantes parallèles à l'axe Ox, *de toutes les forces qui agissent sur le fil, est nulle.*

408. On déduit des mêmes équations

$$\mathrm{K}(a\cos f - b\cos e) + \mathrm{K}'(a'\cos f' - b'\cos e') + \int_0^l (\mathrm{Y}x - \mathrm{X}y)\,\varepsilon\, ds = 0;$$

la somme des moments de toutes les forces qui agissent sur le fil, par rapport à Oz, est nulle.

409. Soient α, β, γ les angles que la tangente au point M fait avec les axes et λ, μ, ν les angles que le rayon de courbure ρ fait avec les mêmes axes : les équations (1) peuvent s'écrire

$$dT\cos\alpha + \frac{T\,ds}{\rho}\cos\lambda + X\varepsilon\,ds = 0,$$
$$dT\cos\beta + \frac{T\,ds}{\rho}\cos\mu + Y\varepsilon\,ds = 0,$$
$$dT\cos\gamma + \frac{T\,ds}{\rho}\cos\nu + Z\varepsilon\,ds = 0.$$

Le plan osculateur à la courbe contient la force P.

410. Valeur de la tension. — On a

$$dT = -\varepsilon(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

411. *Quand* $\varepsilon(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$ *est une différentielle exacte, l'accroissement de tension, quand on passe d'un point à un autre, est indépendant de la figure du fil.*

412. Lorsque toutes les forces qui sollicitent le fil lui sont normales, *la force motrice est en raison inverse du rayon de courbure et dirigée suivant le prolongement de ce rayon.*

413. Lorsqu'un fil est tendu sur une surface S par deux forces qui le tirent à ses extrémités m et m', *ce fil trace sur la surface la ligne la plus courte entre deux quelconques de ses points.*

414. Courbe formée par le fil. — Cette courbe est donnée par les équations

$$\frac{dx}{A + \int X\varepsilon\,ds} = \frac{dy}{B + \int Y\varepsilon\,ds} = \frac{dz}{C + \int Z\varepsilon\,ds}.$$

415. On obtient encore les équations de la courbe en éliminant T entre les équations

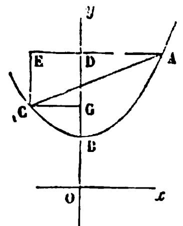
$$\frac{X\,dy - Y\,dx}{ds}\varepsilon = T\left(\frac{dx}{ds}d\frac{dy}{ds} - \frac{dy}{ds}d\frac{dx}{ds}\right),$$
$$\frac{X\,dz - Z\,dx}{ds}\varepsilon = T\left(\frac{dz}{ds}d\frac{dx}{ds} - \frac{dx}{ds}d\frac{dz}{ds}\right),$$
$$dT = -\varepsilon(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

TRENTE-DEUXIÈME LEÇON.

CHAÎNETTE. — COURBE DES PONTS SUSPENDUS.

416. Équation différentielle de la chaînette. — La courbe ABC, formée par un fil pesant et homogène, suspendu à deux points fixes A et C, a reçu le nom de *chaînette*.

Fig. 138.



Cette courbe est contenue dans le plan vertical passant par les points A et C. Prenons ce plan vertical pour plan des xy et traçons deux axes rectangulaires Ox et Oy, le premier horizontal et le second vertical et dirigé de bas en haut.

417. Le fil étant supposé homogène, si ϖ est le poids de l'unité de longueur, on aura

$$d\left(\mathrm{T}\frac{dx}{ds}\right) = 0, \quad d\left(\mathrm{T}\frac{dy}{ds}\right) = \varpi ds.$$

418. Appelons ϖh la tension au point le plus bas de la courbe, tension qui s'exerce horizontalement. On aura

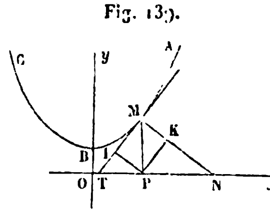
$$\mathrm{T} = \varpi h\frac{ds}{dx}, \quad ds = hd\frac{dy}{dx}.$$

419, 420. Équation de la chaînette en termes finis. — On prend pour axe des y la verticale qui passe par le point B le plus bas de la courbe et pour origine un point tel que $OB = h$:

$$y = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}}\right).$$

421, 422. Propriétés de la chaînette. — La chaînette est symétrique par rapport à l'axe des y. La projection MK de l'ordonnée de la courbe sur la normale MN est constante et égale à h. La projection MI de l'ordonnée sur la tangente MT est égale à l'arc BM, compté à partir du point le plus bas de la courbe. La longueur désignée par h, l'arc MB et l'ordonnée y forment un triangle rectangle dont l'ordonnée est l'hypoténuse.

Fig. 139.



423. La courbe, lieu des points I tels que MI = arc BM, est une développante de la chaînette. La droite IP est tangente à cette courbe au point I, et la longueur IP de cette tangente comprise entre le point I et l'axe des x est constante et égale à h.

424. *Le rayon de courbure de la chaînette est égal à la normale* MN, *mais dirigé en sens contraire.*

425, 426. De la tension en un point de la chaînette.

$$T = \varpi y.$$

La tension de la chaînette en chaque point est proportionnelle à l'ordonnée de ce point.

427 à 431. Construction de la chaînette. — Menons la verticale CE et les horizontales AE et CG qui rencontrent l'axe des y en D et G (*fig.* 138). Posons

$$AE = a, \quad CE = b, \quad ABC = l,$$
$$AD = k, \quad DE = k', \quad OB = h, \quad BD = f.$$

On a pour déterminer les inconnues h, k, k', f les équations suivantes :

$$\sqrt{l^2 - b^2} = h\left(e^{\frac{a}{2h}} - e^{-\frac{a}{2h}}\right),$$
$$l + b = h\left(1 - e^{-\frac{a}{h}}\right)e^{\frac{k}{h}},$$
$$k' = a - k,$$
$$h + f = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{k}{h}} + e^{-\frac{k}{h}}\right).$$

432. Remarque sur le centre de gravité de la chaînette. — De toutes les courbes d'une longueur donnée, tracées sur un plan entre deux points donnés, la chaînette est celle dont le centre de gravité est le plus bas.

433 à 438. Courbe des ponts suspendus. — La courbe formée par la chaîne est une parabole verticale. En appelant T la tension au point x, y, z, ϖ la force totale qui sollicite une portion de la chaîne dont la projection horizontale est égale à l'unité de longueur, ϖh la tension au point le plus bas, on a

$$T = \varpi\sqrt{h^2 + x^2}.$$

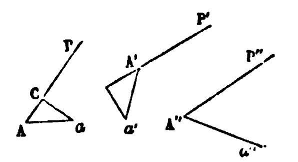
TRENTE-TROISIÈME LEÇON.

PRINCIPE DES VITESSES VIRTUELLES.

439. Définition de la vitesse virtuelle. — Soient A, A′, A″, . . ., des points matériels quelconques soumis à de certaines conditions. Le système étant transporté dans une position infiniment voisine qui satisfasse à toutes les conditions données, on appelle *vitesse virtuelle* ou déplacement virtuel de l'un quelconque de ces points la droite infiniment petite qui joint sa première position à la seconde.

440. Définition du moment virtuel. — On appelle *moment virtuel de la force* P *le produit de la valeur absolue de cette force par la projection p du déplacement virtuel de son point d'application.*

Fig. 142.



441. On a, si T est la composante de la force P suivant le déplacement Aa,

$$Pp = T \times Aa.$$

Ainsi *le moment virtuel est égal au produit du déplacement virtuel multiplié par la composate de la force suivant la direction du déplacement.*

Le *moment virtuel* d'une force et la *quantité de travail élémentaire* ont la même expression; mais la première quantité ne suppose aucun mouvement du système dû aux forces qui le sollicitent actuellement.

442. Énoncé du principe des vitesses virtuelles. — *Si des forces en nombre quelconque se font équilibre sur un système de points matériels assujettis à des conditions données, la somme des moments virtuels est nulle pour tout déplacement virtuel compatible avec les conditions données*, et réciproquement, *il y aura équilibre si la somme des moments virtuels est nulle pour tous les mouvements possibles du système.*

443. Équilibre d'un point matériel. — Si un nombre quelconque de forces est appliqué à un même point A : *le moment virtuel de la résultante est égal à la somme des moments virtuels des composantes.*

Fig. 143.

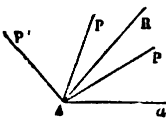
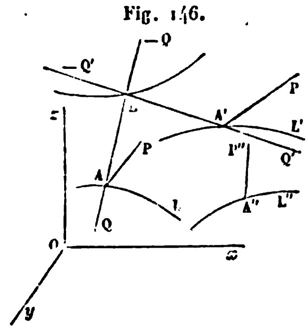


Fig. 146.



TRENTE-QUATRIÈME LEÇON.

SUITE DU PRINCIPE DES VITESSES VIRTUELLES.

457. Autre forme de l'équation des vitesses virtuelles. — Soient X, Y, Z les composantes parallèles aux axes de la force P; δx, δy, δz les variations des coordonnées du point A pour un déplacement virtuel compatible avec l'état du système; le moment virtuel de la force P est

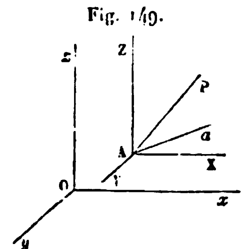


Fig. 149.

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z;$$

et l'équation des vitesses virtuelles devient

$$\sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0.$$

458, 459. Conditions d'équilibre d'un système. Les liaisons qui existent entre les divers points du système étant exprimées par les équations

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0, \ldots,$$

on aura

$$\frac{dL}{dx}\delta x + \frac{dL}{dy}\delta y + \frac{dL}{dz}\delta z + \frac{dL}{dx'}\delta x' + \ldots = 0,$$

$$\frac{dM}{dx}\delta x + \frac{dM}{dy}\delta y + \frac{dM}{dz}\delta z + \frac{dM}{dx'}\delta x' + \ldots = 0,$$

$$\frac{dN}{dx}\delta x + \frac{dN}{dy}\delta y + \frac{dN}{dz}\delta z + \frac{dN}{dx'}\delta x' + \ldots = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ces équations au nombre de i contiennent $3n$ variations δx, δy, $\delta z, \ldots$; il y en a $3n - i$ qui sont arbitraires, et les autres, au nombre de i, dépendent de celles-là. Si on porte les valeurs des dernières dans l'équation

$$\sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0,$$

celle-ci contiendra seulement $3n - i$ termes multipliés chacun par l'une des $3n - i$ variations arbitraires, dont il faudra égaler à zéro les $3n - i$ coefficients. On aura ainsi $3n - i$ équations qui, jointes aux équations (1), donneront $3n$ équations nécessaires et suffisantes pour l'équilibre.

460. L'élimination de i variations au moyen du système (2) peut se faire par la méthode des multiplicateurs. Nous aurons les $3n$

équations suivantes :

$$X + \lambda \frac{dL}{dx} + \mu \frac{dM}{dx} + \nu \frac{dN}{dx} + \ldots = 0,$$
$$Y + \lambda \frac{dL}{dy} + \mu \frac{dM}{dy} + \nu \frac{dN}{dy} + \ldots = 0,$$
$$Z + \lambda \frac{dL}{dz} + \mu \frac{dM}{dz} + \nu \frac{dN}{dz} + \ldots = 0,$$
$$X' + \lambda \frac{dL}{dx'} + \mu \frac{dM}{dx'} + \nu \frac{dN}{dx'} + \ldots = 0.$$
....

461, 462. Réciproquement, si ces équations ont lieu, les forces se font équilibre, quand on y regarde x, y, z comme seules variables.

Les conditions $L = 0$, $M = 0$, $N = 0, \ldots$, peuvent être supprimées pourvu que l'on applique au point A les forces

$$\lambda \frac{dL}{dx}, \quad \mu \frac{dM}{dx}, \quad \nu \frac{dN}{dx}, \ldots,$$
$$\lambda \frac{dL}{dy}, \quad \mu \frac{dM}{dy}, \quad \nu \frac{dN}{dy}, \ldots;$$
$$\lambda \frac{dL}{dz}, \quad \mu \frac{dM}{dz}, \quad \nu \frac{dN}{dz}, \ldots;$$

au point A' les forces

$$\lambda \frac{dL}{dx'}, \quad \mu \frac{dM}{dx'}, \quad \nu \frac{dN}{dx'}, \ldots,$$
$$\lambda \frac{dL}{dy'}, \quad \mu \frac{dM}{dy'}, \quad \nu \frac{dN}{dy'}, \ldots$$
$$\lambda \frac{dL}{dz'}, \quad \mu \frac{dM}{dz'}, \quad \nu \frac{dN}{dz'}; \ldots.$$

et ainsi de suite.

463, 464. Sur les divers mouvements virtuels d'un système. — Un mouvement virtuel quelconque se compose de $3n - i$ mouvements virtuels particuliers et distincts.

465. En général, soient $L = 0$, $M = 0, \ldots$ les équations de condition. On prendra $3n - i$ quantités φ, ψ, $\theta, \ldots$ fonctions de x, y, z, $x', \ldots$, et dont les variations seront toutes arbitraires. L'équation des vitesses virtuelles deviendra

$$\Phi \delta\varphi + \Psi \delta\psi + \Theta \delta\theta + \ldots = 0;$$

on aura

$$\Phi = 0, \quad \Psi = 0, \quad \Theta = 0, \ldots.$$

TRENTE-CINQUIÈME LEÇON.

APPLICATIONS DU PRINCIPE DES VITESSES VIRTUELLES.

466. Équilibre d'un solide invariable. — Les conditions d'équilibre d'un système solide, formé de n points matériels liés entre eux d'une manière invariable, sont au nombre de six.

467. On obtient les trois premières équations d'équilibre, en donnant au corps trois mouvements de translation parallèles aux axes.

468. On obtient les trois autres équations d'équilibre en faisant tourner le corps successivement autour des trois axes, ce qui donne

$$\sum(\mathrm{Y}x - \mathrm{X}y) = 0,$$

$$\sum(\mathrm{Z}y - \mathrm{Y}z) = 0,$$

$$\sum(\mathrm{X}z - \mathrm{Z}x) = 0.$$

469. On peut déduire du principe des vitesses virtuelles les équations des moments sous leur seconde forme

$$\sum \mathrm{Q}q = 0.$$

470. Autre manière d'obtenir les conditions d'équilibre d'un système solide. — L'équation générale

$$\sum(\mathrm{X}\delta x + \mathrm{Y}\delta y + \mathrm{Z}\delta z) = 0$$

peut être mise sous la forme

$$\delta\alpha\sum\mathrm{X} + \delta\mathcal{C}\sum\mathrm{Y} + \delta\gamma\sum\mathrm{Z} + \delta\omega\sum(\mathrm{Y}x - \mathrm{X}y) + \delta\varphi\sum(\mathrm{Z}y - \mathrm{Y}z) + \delta\psi\sum(\mathrm{X}z - \mathrm{Z}x) = 0.$$

Les variations $\delta\alpha$, $\delta\mathcal{C}$,..., étant arbitraires, cette équation ne peut avoir lieu que si les coefficients de ces variations sont nuls; on retrouve ainsi les conditions exprimées plus haut (467, 468).

471. Équilibre d'un système solide gêné par un obstacle. — Si le système renferme un point fixe, il y aura seulement trois équations d'équilibre entre les forces.

472. S'il y a deux points fixes, ou, ce qui revient au même, un axe fixe, il n'y aura qu'une seule équation d'équilibre.

473 à 477. ÉQUILIBRE DU POLYGONE FUNICULAIRE.

478. SUR UNE PROPRIÉTÉ DE L'ÉQUILIBRE. — Lorsque le premier membre de l'équation

$$\sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0$$

est la variation exacte d'une fonction $f(x, y, z\ldots)$ de $x, y, z, x', y', z', \ldots$, considérées, soit comme des variables indépendantes, soit comme des variables liées entre elles par les équations $L = 0$, $M = 0$; alors pour la position d'équilibre, et seulement pour celle-là, la valeur correspondante de la fonction $f(x, y, z, \ldots)$ est un maximum ou un minimum, si toutefois cette fonction est susceptible d'un maximum ou d'un minimum. L'équilibre est toujours stable quand le maximum existe.

479. L'expression $\sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)$ est une variation exacte quand les forces motrices $R, R', R'', \ldots$ sont dirigées vers des centres fixes et fonctions des distances de leurs points d'application aux centres.

480. Si les forces $R, R', R'', \ldots$ supposées attractives ont pour expressions

$$R = \frac{\mu}{r^2}, \quad R' = \frac{\mu}{r'^2}, \quad R'' = \frac{\mu}{r''^2}, \ldots,$$

la fonction

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} + \ldots$$

est un maximum ou un minimum quand il y a équilibre.

481. Le premier membre de l'équation générale des vitesses virtuelles est encore une différentielle exacte, quand les forces considérées proviennent des actions mutuelles des points du système, et qu'elles sont simplement fonctions des distances mutuelles des points qui agissent les uns sur les autres.

482. Dans l'équilibre d'un système de points pesants, sollicités uniquement par leurs poids, le centre de gravité est le plus haut ou le plus bas possible.

TRENTE-SIXIÈME LEÇON.

PRINCIPE DE D'ALEMBERT.

483 à 485. Démonstration du principe de d'Alembert. — *Les forces motrices d'un système font à chaque instant équilibre à des forces égales et contraires aux forces qui produiraient son mouvement effectif, si tous ses points devenaient libres.*

486. Remarques sur le principe de d'Alembert. — On peut présenter le principe de d'Alembert sous une autre forme, utile dans quelques cas. Chaque force étant décomposée en deux, l'une nommée *force effective* et qui produirait le mouvement du point, s'il était entièrement libre, et l'autre qu'on nomme *force perdue*, on peut dire qu'à chaque instant les forces perdues se font équilibre.

487. On pourrait remplacer d'une infinité de manières les forces données par d'autres susceptibles d'imprimer le même mouvement au système, non plus libre, mais assujetti aux conditions données,

488. Équation générale du mouvement d'un système. — Soit P la force appliquée au point M, dont la masse est m. Nommons X, Y, Z ses composantes parallèles à trois axes rectangulaires; on a

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} \sum \Bigg[\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y \\ + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z \Bigg] = 0. \end{aligned} \right.$$

489 à 492. Conséquences de l'équation générale. — Les conditions

$$(2)\qquad L = 0,\quad M = 0,\quad N = 0,\ldots,$$

devant être satisfaites par le système, on aura

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dx}\delta x + \frac{dL}{dy}\delta y + \frac{dL}{dz}\delta z + \frac{dL}{dx'}\delta x' + \ldots = 0, \\ \frac{dM}{dx}\delta x + \frac{dM}{dy}\delta y + \frac{dM}{dz}\delta z + \frac{dM}{dx'}\delta x' + \ldots = 0, \\ \frac{dN}{dx}\delta x + \frac{dN}{dy}\delta y + \frac{dN}{dz}\delta z + \frac{dN}{dx'}\delta x' + \ldots = 0. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Si n est le nombre de points du système, il y aura $3n - i$ varia-

tions arbitraires, et i variations fonctions de celles-là déterminées par les i équations précédentes. On portera les valeurs de ces i variations dans l'équation (1), et égalant à o les coefficients des $3n-i$ variations restantes, on aura $3n-i$ équations différentielles entre le temps, les forces et les coordonnées des points du système. En y joignant les i relations (2), on aura $3n$ équatious pour déterminer les $3n$ variables $x, y, z, x', y', z', \ldots$ en fonction du temps t. Il restera à intégrer ces équations. On peut aussi employer la méthode des multiplicateurs.

TRENTE-SEPTIÈME LEÇON.

EXTENSION ET APPLICATIONS DU PRINCIPE DE D'ALEMBERT.

493, 494. Des forces instantanées ou percussions. — On appelle ainsi les forces qui agissent pendant un temps très-court avec une grande intensité.

495 à 497. Extension du principe de d'Alembert aux forces de percussion. — Le principe de d'Alembert s'applique aux forces de percussion, en remplaçant ces forces par les quantités de mouvement qu'elles sont capables de produire. Considérons le système depuis le temps t_0 jusqu'au temps $t_0+\theta$, pendant lequel la percussion agit. On aura

$$\sum\left[\left(\int_{t_0}^{t_0+\theta} X\,dt + m\frac{dx_0}{dt} - m\frac{dx}{dt}\right)\delta x + \left(\int_{t_0}^{t_0+\theta} Y\,dt + m\frac{dy_0}{dt} - m\frac{dy}{dt}\right)\delta y + \left(\int_{t_0}^{t_0+\theta} Z\,dt + m\frac{dz_0}{dt} - m\frac{dz}{dt}\right)\delta z\right] = 0,$$

les lettres affectées de l'indice o désignant les valeurs relatives à l'époque t_0, et les lettres sans indice les valeurs relatives à l'époque $t_0+\theta$.

Cette équation exprime qu'*il y a équilibre entre les quantités de mouvement que les percussions communiqueraient aux différents points s'ils étaient libres, les quantités de mouvement qu'ils possèdent au moment où les percussions commencent à agir et celles qu'ils ont après leur action, ces dernières étant prises en sens contraires*. On néglige pendant le temps θ les forces ordinaires, telles que la pesanteur, qui n'ont pas une intensité très-grande.

Lorsque le système part du repos, *il y a équilibre entre les quantités de mouvement que les forces donneraient aux divers points du système s'ils étaient libres et celles qui ont lieu effectivement, et avec lesquelles ce système commence à se mouvoir, au bont du temps θ, ces dernières étant prises en sens contraire.*

498. MARCHE A SUIVRE POUR APPLIQUER LE PRINCIPE DE D'ALEMBERT DANS LE CAS DES PERCUSSIONS. — Pour appliquer le principe de d'Alembert, étendu au cas des percussions, il faut suivre la marche indiquée au n° 490.

499 à 503. MOUVEMENT DE DEUX CORPS LIÉS PAR UN FIL ET PLACÉS SUR DEUX PLANS INCLINÉS.

TRENTE-HUITIÈME LEÇON.

SUITE DES APPLICATIONS DU PRINCIPE DE D'ALEMBERT.

504 à 506. MOUVEMENT DE CORPS LIÉS PAR DES CORDONS.

507 à 510. MOUVEMENT D'UNE CHAINE SUR DEUX PLANS INCLINÉS.

511. MOUVEMENT DE DEUX POINTS ASSUJETTIS A DEMEURER SUR DEUX COURBES DONNÉES ET DONT LA DISTANCE EST INVARIABLE.

TRENTE-NEUVIÈME LEÇON.

MOMENTS D'INERTIE.

512. DÉFINITIONS. — On appelle *moment d'inertie d'un point matériel* par rapport à un axe le produit de la masse de ce point par le carré de sa distance à l'axe.

513. Le moment d'inertie d'un système de points matériels dont la forme est invariable, par rapport à un axe, est la somme des moments d'inertie de tous ces points par rapport à cet axe.

514. Les points matériels qui composent un corps n'y sont pas répandus d'une manière continue : on sait, au contraire, qu'ils sont séparés entre eux par des espaces vides qu'on appelle des *pores*. Cependant on peut, dans chaque cas, obtenir le moment d'inertie, en supposant la masse distribuée d'une manière continue dans le corps.

515. **Moments d'inertie d'un parallélipipède rectangle.** — En appelant M la masse du corps, et a, b, c les longueurs de ses arêtes, les moments d'inertie du parallélipipède par rapport aux axes Ox, Oy, Oz sont

$$\frac{M}{3}(b^2+c^2), \quad \frac{M}{3}(a^2+c^2), \quad \frac{M}{3}(a^2+b^2).$$

Le plus grand correspond à la plus petite arête et le plus petit à la plus grande.

516 à 518. **Ellipsoïde homogène.** — Soit

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

l'équation d'un ellipsoïde rapporté à ses diamètres principaux. M étant la masse de l'ellipsoïde et A, B, C désignant ses moments d'inertie par rapport aux axes Ox, Oy, Oz, on aura

$$A=\frac{M}{5}(b^2+c^2), \quad B=\frac{M}{5}(a^2+c^2), \quad C=\frac{M}{5}(a^2+b^2).$$

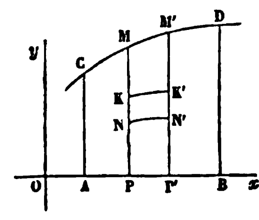
519. $\frac{8\pi\rho r^5}{15}$ est le moment d'inertie d'une sphère par rapport à un diamètre quelconque.

$$\frac{8\pi\rho}{15}(b^5-a^5)$$

est le moment d'inertie, relativement à un diamètre quelconque, d'une couche sphérique dont les rayons intérieur et extérieur sont a et b, et dans laquelle la densité ρ, supposée la même pour tous les points situés à une même distance du centre, est variable avec cette distance.

520. **Solides de révolution.** — Soient CD la courbe méridienne et Ox l'axe de révolution. Le moment d'inertie du volume engendré par la révolution de l'aire ACDB sera

Fig. 158.



$$\frac{1}{2}\pi\rho\int_a^b y^4\,dx,$$

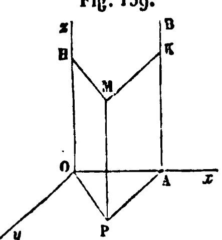
en désignant par a et b les abscisses OA et OB des extrémités de la courbe CD.

521. Le moment d'inertie du segment sphérique est

$$\frac{1}{2}\pi\rho b^3\left(\frac{4r^2}{3}+\frac{b^2}{5}-rb\right).$$

522. **Relation entre les moments d'inertie par rapport a deux axes parallèles.** — Soit O le centre de gravité, a égale à la plus courte distance OA des deux droites Oz et AB; m égale à la masse du point M; $MH = r$, $MK = R$. On a

Fig. 159.



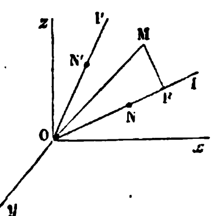
$$\sum mR^2 = \sum mr^2 + Ma^2.$$

Le moment d'inertie d'un système de points par rapport à un axe quelconque est égal à celui de ce système par rapport à un axe parallèle à celui-ci mené par le centre de gravité, augmenté du produit de la masse du corps par le carré de la distance des deux axes.

Le moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe qui passe par son centre de gravité, est moindre que pour tout autre axe parallèle à celui-ci; ce moment est le même pour tous les axes parallèles et également éloignés du centre de gravité, et il augmente à mesure que l'axe s'éloigne de ce point.

523. **Relation entre les moments d'inertie par rapport a différents axes qui passent par le même point.** — Soit OI un axe quelconque. Abaissons MH perpendiculaire sur OI. Soient α, β, γ les angles que OI fait avec Ox, Oy, Oz, μ le moment d'inertie de tout le système par rapport à l'axe OI.

Fig. 160.



Posons

$$A = \sum m(y^2+z^2), \quad D = \sum myz,$$
$$B = \sum m(x^2+z^2), \quad E = \sum mxz,$$
$$C = \sum m(x^2+y^2), \quad F = \sum mxy,$$

on a

$$\mu = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma - 2D\cos\beta\cos\gamma - 2E\cos\alpha\cos\gamma - 2F\cos\alpha\cos\beta.$$

QUARANTIÈME LEÇON.

SUITE DES MOMENTS D'INERTIE. — ROTATION AUTOUR D'UN AXE.

524. Ellipsoïde central. — Sur la droite OI (*fig.* 160) prenons une longueur $ON = \frac{1}{\sqrt{\mu}}$. Si l'on a fait la même construction pour toutes les droites menées par le point O, le lieu des points N a pour équation

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 - 2DYZ - 2EXZ - 2FXY = 0.$$

C'est un ellipsoïde ayant le centre pour origine.

525. Axes principaux. — Quand les axes coordonnés sont dirigés suivant les axes principaux de l'ellipsoïde, on a

$$\sum myz = 0, \quad \sum mxz = 0, \quad \sum mxy = 0.$$

Ces trois axes sont appelés les *axes principaux d'inertie* du système, et les moments d'inertie correspondants sont dits *moments principaux*.

526, 527. Le système des axes principaux est unique, à moins que l'ellipsoïde ne soit de révolution. Dans ce cas, l'axe de révolution et deux diamètres perpendiculaires entre eux et à cet axe forment un système d'axes principaux. Si l'ellipsoïde devient une sphère, trois diamètres quelconques perpendiculaires entre eux sont des axes principaux, et les moments d'inertie par rapport à ces axes sont égaux. Le moment d'inertie le plus grand correspond au plus petit axe de l'ellipsoïde, et le plus petit correspond au plus grand.

528. On peut prendre des axes coordonnés tels, que deux des rectangles disparaissent dans l'équation de l'ellipsoïde et qu'elle prenne la forme

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 - 2FXY = 1.$$

L'axe des z est alors l'un des axes principaux du corps relatifs au point O.

529. Relation entre les axes principaux relatifs a différents points. — *Les axes principaux relatifs à un point quelconque d'un corps sont parallèles aux axes principaux relatifs au centre de gravité de ce corps lorsque la droite qui joint le premier point au second est un axe principal relatif au second.*

530, 531. Points pour lesquels les moments principaux d'inertie d'un corps sont égaux. — Quand l'ellipsoïde relatif au point O, centre de gravité du corps, est de révolution autour de son petit axe, il existe sur cet axe deux points symétriques par rapport au point O et situés à nne distance de ce point égale à $\sqrt{\frac{A-B}{M}}$, qui répondent à la question.

532. Prenons pour exemple l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

L'ellipsoïde doit être de révolution autour de son petit axe. Il y aura deux points répondant à la question, situés sur le plus petit axe à des distances du point O égales à $\pm\sqrt{\frac{b^2-a^2}{5}}$.

533. Mouvement de rotation d'un système solide autour d'un axe fixe. — La vitesse des points situés à une distance de l'axe égale à l'unité est ce qu'on appelle la *vitesse angulaire* ou de rotation du système. Nous la désignerons par ω. La vitesse $\frac{ds}{dt}$ d'un point quelconque à une distance r de l'axe est représentée par $r\omega$.

534. Un mouvement de rotation est dit *uniforme* quand la vitesse de rotation est constante. Ce mouvement a lieu lorsque les points du système ne sont sollicités par aucune force motrice ou par des forces motrices qui se font équilibre autour de l'axe fixe.

QUARANTE ET UNIÈME LEÇON.

MOUVEMENT DE ROTATION AUTOUR D'UN AXE (SUITE).

535. Cas où le corps est mis en mouvement par des percussions. — Décomposons chaque force instantanée P en deux : Z, parallèle à l'axe Oz; Q, située dans un plan perpendiculaire à cet axe. Soit v la vitesse que cette dernière composante serait capable d'imprimer au point m s'il était libre; ω la vitesse de rotation du système; q la plus courte distance de l'axe et de la force Q ; on aura

$$\omega=\frac{\sum mvq}{\sum mr^2}.$$

536, 537. Si toutes les vitesses v, v', v'',..., sont égales et parallèles; désignons par μ la somme des masses des points qui reçoivent directement cette vitesse commune v. Appelons f la distance du centre de gravité de la masse μ à un plan passant par l'axe et parallèle à la direction des vitesses. On a

$$\omega = \frac{\mu v f}{\sum mr^2}.$$

Cette formule convient à un corps solide C mobile autour d'un axe fixe Oz, choqué par un autre corps C_1 qui après le choc reste attaché en C_2 au premier et dont tous les points sont animés de vitesses égales et parallèles.

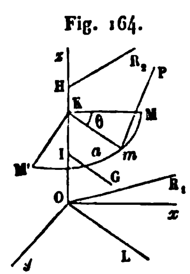
538, 539. Si le corps est choqué simultanément par plusieurs masses μ, μ', μ'',..., animées de vitesses différentes et qui lui demeurent attachées après tous ces chocs, on aura

$$\omega = \frac{\sum \mu v f}{\sum mr^2}.$$

540. Si le système, au lieu d'éprouver des percussions simultanées, reçoit une suite de chocs se succédant à des époques quelconques, la vitesse angulaire sera toujours donnée par la formule précédente.

541 à 543. Calcul des percussions exercées sur l'axe fixe. — Supposons que le corps soit mis en mouvement par une force instantanée qui imprimerait une vitesse V à une certaine masse μ au centre de gravité de laquelle elle serait appliquée. Cette force instantanée ou percussion a pour mesure la quantité de mouvement $V\mu$.

Fig. 164.



Soient X, Y, Z les composantes de la quantité de mouvement μV, et X_1, Y_1, Z_1 celles de la résistance du point O; X_2, Y_2, Z_2 celles de la résistance du point H; enfin $m\frac{dx}{dt}$, $m\frac{dy}{dt}$, $m\frac{dz}{dt}$ les composantes de la quantité de mouvement effective pour le point m : soit $OH = h$. On aura, x_1 et y_1 désignant les coordonnées

du centre de gravité du corps entier,

$$X + \omega M y_1 + X_1 + X_2 = 0,$$
$$Y - \omega M x_1 + Y_1 + Y_2 = 0,$$
$$Z + Z_1 + Z_2 = 0;$$

$$Y_2 h - Z\beta - \omega \sum mxz = 0,$$

$$-X_2 h + Z\alpha - \omega \sum myz = 0,$$

$$X\beta - Y\alpha + \omega \sum mr^2 = 0.$$

Ces équations déterminent X_2 et Y_2, X_1 et Y_1 et la somme $Z_1 + Z_2$, sans déterminer séparément Z_1 et Z_2.

544 à 546. Conditions pour que l'axe n'éprouve aucune percussion. — Centre de percussion. — 1° La direction de la percussion doit être perpendiculaire au plan qui passe par l'axe fixe et par le centre de gravité du corps.

2° Ce plan doit être un des axes principaux pour le point où il rencontre le plan qui lui est perpendiculaire et qui contient la force instantanée.

3° Enfin la distance de cette force à l'axe doit être égale à $a + \frac{k^2}{a}$, a étant la distance du centre de gravité du corps à l'axe et Mk^2 le moment d'inertie du corps relativement à un axe mené par ce centre de gravité parallèlement à l'axe fixe.

547. On appelle *centre de percussion* le point auquel la percussion doit être appliquée dans le plan passant par l'axe et le centre de gravité pour qu'il n'y ait pas d'effort exercé sur l'axe fixe : la distance du centre de percussion à l'axe fixe est $a + \frac{k^2}{a}$.

Si l'axe passait par le centre de gravité, il éprouverait toujours une percussion.

548. Réciproquement, si le corps est en mouvement autour de l'axe, on pourra l'arrêter brusquement sans qu'il existe aucune percussion contre l'axe en appliquant au centre de percussion une force instantanée égale à $\omega M a$, perpendiculaire au plan mené par l'axe et par le centre de gravité du corps.

549. Condition pour qu'il n'y ait de percussion qu'en un point de l'axe. — Si ce point est le point H, et si $Z = 0$, en posant

$$D = \sum myz, \quad E = \sum mxz,$$

l'équation de condition est

$$DY + EX = \omega M a.$$

Si Oz est un axe principal d'inertie pour le point O, la percussion est appliquée au point O.

QUARANTE-DEUXIÈME LEÇON.

ROTATION D'UN CORPS AUTOUR D'UN AXE (SUITE).

550. ROTATION D'UN CORPS SOLLICITÉ PAR DES FORCES QUELCONQUES. — Soient X, Y, Z les composantes de la force motrice P du point $m(x, y, z)$, on a

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sum (Yx - Xy)}{\sum mr^2}.$$

551 à 553. PRESSIONS SUR L'AXE. — On applique à deux points quelconques O et H, pris sur l'axe, deux forces $R_1(X_1, Y_1, Z_1)$ et $R_2(X_2, Y_2, Z_2)$, égales et contraires aux pressions exercées sur ces deux points à chaque instant du mouvement. On aura, en posant $OH = h$, en désignant par (x_1, y_1, z_1) le centre de gravité du système et par M sa masse,

$$\sum X + \frac{d\omega}{dt} My_1 + \omega^2 Mx_1 + X_1 + X_2 = 0,$$

$$\sum Y - \frac{d\omega}{dt} Mx_1 + \omega^2 My_1 + Y_1 + Y_2 = 0,$$

$$\sum Z + Z_1 + Z_2 = 0,$$

$$\sum (Zy - Yz) + \frac{d\omega}{dt} \sum mxz - \omega^2 \sum myz - Y_2 h = 0,$$

$$\sum (Xz - Zx) + \frac{d\omega}{dt} \sum myz + \omega^2 \sum mxz + X_2 h = 0,$$

$$\sum (Yx - Xy) - \frac{d\omega}{dt} \sum mr^2 = 0.$$

554. CAS OU IL N'Y A PAS DE FORCES MOTRICES. — Les résistances R_1 et R_2 se réduisent à deux forces perpendiculaires à l'axe, et font équilibre aux forces centrifuges de tous les points du corps qui agissent sur l'axe perpendiculairement à sa direction. La force tangentielle est nulle pour chaque point. Les résistances sont proportionnelles au carré de la vitesse constante ω.

555. *Si un corps retenu par un seul point fixe commence à tourner autour d'un des axes principaux relatifs à ce point, il continuera à tourner uniformément autour de cet axe comme s'il était fixe.*

La pression sur le point O est dirigée dans le plan qui passe par l'axe et par le centre de gravité.

556. Pour que le point O ne supporte aucune pression, il faut et il suffit que le centre de gravité soit sur l'axe de rotation, et alors le mouvement ayant commencé autour de cet axe, supposé fixe, continuera uniformément autour du même axe lorsqu'on le rendra entièrement libre.

557, 558. Cas où les forces motrices se réduisent a un couple. — Les conséquences précédentes subsistent quand les forces motrices se réduisent à un couple situé dans un plan perpendiculaire à l'axe.

559. Un corps retenu par un point fixe O et sollicité par un couple ne tend pas à tourner autour d'une perpendiculaire Oz au plan de ce couple, à moins que cette perpendiculaire ne soit l'un des axes principaux relatifs au point O.

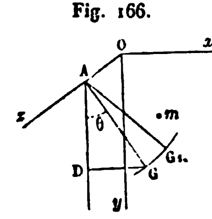
560 à 563. Mouvement du treuil.

QUARANTE-TROISIÈME LEÇON.

PENDULE COMPOSÉ.

565. Pendule composé. — Équation du mouvement. — On nomme *pendule composé* un corps qui peut tourner autour d'un axe fixe horizontal.

Fig. 166.



Prenons l'axe fixe Oz pour axe des z; pour axe des x une horizontale Ox perpendiculaire à Oz, et pour axe des y une verticale Oy dirigée dans le sens de la pesanteur. M étant la masse totale du corps et G le centre de gravité, abaissons GA perpendiculaire sur Oz, menons la verticale AD et abaissons sur cette droite la perpendiculaire GD. Soit G_1 la position initiale de G, Mk^2 le moment d'inertie par rapport à un axe passant par le point G et parallèle à Oz. Posons $GA = a$, $DAG = \theta$, $DAG_1 = \alpha$; on a

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{ga}{a^2 + k^2} \sin\theta = 0,$$

et l'on trouve

$$\frac{d\theta^2}{dt^2} = \Omega^2 + \frac{2ga}{a^2+k^2}(\cos\theta - \cos\alpha),$$

Ω étant la vitesse angulaire initiale.

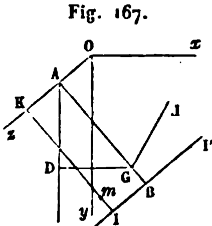
566. Pendule composé ramené au pendule simple. — Supposons la longueur l déterminée par l'équation

$$l = a + \frac{k^2}{a}.$$

Alors le pendule composé ou plutôt la droite AG et le pendule simple de longueur l auront le même mouvement angulaire, pourvu que les valeurs initiales de $\frac{d\theta}{dt}$ soient les mêmes.

567. Axe d'oscillation. — *Si dans le plan passant par l'axe et par le centre de gravité du pendule on mène une droite* IBI' *parallèle à cet axe et à une distance de celui-ci égale à* I, *chaque point de cette droite se mouvra comme s'il ne faisait pas partie du corps et qu'il fût simplement lié à l'axe par une droite rigide et sans masse.*

Fig. 167.



La droite IBI' est nommée l'*axe d'oscillation* du corps, correspondant à l'axe de suspension Oz. Le point B de cette droite, situé sur la droite AG perpendiculaire à l'axe de rotation, se nomme *centre d'oscillation*. On l'obtient en prolongeant AG d'une longueur égale à $\frac{k^2}{a}$.

568. *Les axes d'oscillation et de suspension sont réciproques*, c'est-à-dire que si l'on faisait osciller le corps autour de II', l'axe do suspension primitif Oz deviendrait l'axe d'oscillation.

569. Étant donné l'axe de suspension d'un corps, on peut trouver, par l'expérience, l'axe d'oscillation correspondant.

570. *Il y a une infinité d'axes autour desquels les petites oscillations sont de même durée.*

571. Axe de la plus courte oscillation. — L'axe de suspension est perpendiculaire à l'axe du plus petit moment d'inertie A relatif au centre de gravité. On a

$$l = 2\sqrt{\frac{A}{M}}.$$

QUARANTE-QUATRIÈME LEÇON.

PENDULE CONIQUE.

572, 573. PENDULE CONIQUE. — ÉQUATIONS DU MOUVEMENT. — Un point matériel m est assujetti à se mouvoir sur la surface d'une sphère dont le centre est au point O, et dont le rayon est l. En désignant par N la résistance de la surface, et l'axe des z étant pris dans le sens de la pesanteur, les équations du mouvement sont

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{Nx}{l}=0,\quad \frac{d^2y}{dt^2}+\frac{Ny}{l}=0,\quad \frac{d^2z}{dt^2}+\frac{Nz}{l}-g=0,$$

574 à 576. CAS OU LE POINT PESANT RESTE DANS UN PLAN HORIZONTAL. — Le point décrit un cercle, intersection de ce plan et de la surface sphérique.

La vitesse v est constante et le mouvement circulaire est uniforme.

$$\frac{xd^2x+yd^2y}{dt^2}+\frac{dx^2+dy^2}{dt^2}=0.$$

On a

$$v^2=\frac{gr^2}{k},\quad N=\frac{gl}{k}.$$

La durée de la révolution est égale à $2\pi\sqrt{\frac{k}{g}}$.

577 à 580. INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT. — On a

$$v^2=2g(z-z_0+h_0),$$

$$dt=\frac{\pm\, ldz}{\sqrt{2g(l^2-z^2)(z-z_0+h_0)-C^2}}.$$

ε étant l'angle que fait la direction de la vitesse v avec la perpendiculaire au plan mOz, on a

$$C^2=r_0^2v_0^2\cos^2\varepsilon_0=2gh_0r_0^2\cos^2\varepsilon_0=2gh_0(l^2-z_0^2)\cos^2\varepsilon_0,$$

$$dt=\frac{\pm\, ldz}{\sqrt{2g}\sqrt{(l^2-z^2)(z-z_0+h_0)-(l^2-z_0^2)h_0\cos^2\varepsilon_0}}.$$

581. MAXIMUM ET MINIMUM DE LA VALEUR DE z. — L'équation

$$(l^2-z^2)(z-z_0+h_0)-(l^2-z_0^2)h_0\cos^2\varepsilon_0=0$$

a trois racines réelles : une première a comprise entre l et z_0, une seconde b comprise entre z_0 et $z-h$, et une troisième négative $-c$

QUARANTE-CINQUIÈME LEÇON.

QUARANTE-SIXIÈME LEÇON.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DU MOUVEMENT. — MOUVEMENT DU CENTRE DE GRAVITÉ.

597. Remarques sur les systèmes de points qui peuvent se mouvoir comme des corps solides. — Considérons un système de points matériels m, m', m'',..., sollicités respectivement par des forces P, P′, P″,..., dont les composantes parallèles aux axes sont X, Y, Z; X′, Y′, Z′;.... Si les liaisons sont telles, que les points puissent se déplacer sans que leurs distances changent, on aura

$$\sum m\frac{d^2x}{dt^2}=\sum X,\quad \sum m\frac{d^2y}{dt^2}=\sum Y,\quad \sum m\frac{d^2z}{dt^2}=\sum Z.$$

598, 599. Pour que le système puisse se déplacer comme un corps solide, c'est-à-dire sans que les distances de ses points varient, il faut et il suffit que chaque équation de condition se réduise à une relation entre les distances de ses différents points.

600, 601. Mouvement du centre de gravité. — *Le centre de gravité de tout système libre se meut comme si les masses de tous les points matériels y étaient réunies et que les forces motrices y fussent transportées parallèlement à elles-mêmes.*

602. Vitesse initiale du centre de gravité d'un système mis en mouvement par des forces instantanées. — Cette vitesse est celle que prendrait un point ayant la masse M, placé au centre de gravité et qui serait sollicité par toutes les forces instantanées du système transportées parallèlement à elles-mêmes en ce point.

603, 604. Conservation du mouvement du centre de gravité. — Quand toutes les forces motrices transportées parallèlement à elles-mêmes en un point quelconque s'y font équilibre, le mouvement du centre de gravité est rectiligne et uniforme.

605. Si l'on considère les quantités de mouvement de toutes les molécules comme des forces et qu'on les transporte parallèlement à elles-mêmes en un même point, elles donnent une résultante de grandeur et de direction constante. Le centre de gravité se meut suivant une ligne droite parallèle à cette résultante et avec une vitesse égale à cette résultante divisée par la masse totale du système.

QUARANTE-SEPTIÈME LEÇON.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DU MOUVEMENT RELATIVES AUX AIRES.

606. Relations entre les quantités de mouvement d'un système. — Dans un ensemble de points matériels qui peuvent se déplacer comme un système solide, on a

$$\sum m\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)=\sum(\mathrm{Y}x-\mathrm{X}y),$$
$$\sum m\left(z\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2z}{dt^2}\right)=\sum(\mathrm{X}z-\mathrm{Z}x),$$
$$\sum m\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\right)=\sum(\mathrm{Z}y-\mathrm{Y}z).$$

Ces équations subsistent s'il y a dans le système un point fixe, pourvu qu'il soit pris pour origine des coordonnées.

607. Lorsqu'en supposant le système solidifié, les forces qui le sollicitent se font équilibre, ou bien encore lorsqu'elles se réduisent à une force unique passant par l'origine des coordonnées, la somme des moments des quantités de mouvement des masses du système par rapport à une ligne droite quelconque est constante.

608. Si l'on considère comme des forces les quantités de mouvement qui animent les différents points du système, qu'on les compose comme si elles étaient appliquées à un corps solide, on trouvera toujours la même résultante et le même couple résultant par rapport à une même origine. Le moment de ce couple résultant est $k=\sqrt{c^2+c'^2+c''^2}$, et son plan, perpendiculaire à la droite qui fait avec les axes des angles ayant pour cosinus $\frac{c''}{k}$, $\frac{c'}{k}$, $\frac{c}{k}$, a pour équation

$$c''x+c'y+cz=0,$$

c, c', c'' étant les sommes des quantités de mouvement par rapport aux axes des z, y, x.

609. Principe des aires. — *Quand les forces motrices appliquées à un système se font équilibre en supposant le système solidifié, ou bien quand toutes ces forces ont une résultante unique passant par l'origine des coordonnées, la somme des aires décrites par les projections du rayon vecteur sur chacun des plans coordonnés multipliées respectivement par les masses des points correspondants est proportionnelle au temps.* C'est ce qu'on appelle le *principe de la conservation des aires.*

610. Cette loi a lieu en particulier quand les forces motrices du système se réduisent à des actions mutuelles entre ses différents points ou à des forces constamment dirigées vers un même point fixe, pourvu qu'on prenne celui-ci pour l'origine des coordonnées.

611, 612. Du principe des aires dans le mouvement relatif. — Prenons pour origine un point mobile avec le système O_1. Désignons par x_1, y_1, z_1 ses coordonnées par rapport à un système fixe Ox, Oy, Oz. Soit m un point ayant pour coordonnées x, y, z dans l'ancien système et ξ, η, ζ dans le nouveau composé de trois axes O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1 parallèles aux anciens et mobiles avec le point O_1. On aura

$$\sum m\left(\xi\frac{d^2\eta}{dt^2}-\eta\frac{d^2\xi}{dt^2}\right)=\sum(Y\xi-X\eta),$$

$$\sum m\left(\zeta\frac{d^2\xi}{dt^2}-\xi\frac{d^2\zeta}{dt^2}\right)=\sum(X\zeta-Z\xi),$$

$$\sum m\left(\eta\frac{d^2\zeta}{dt^2}-\zeta\frac{d^2\eta}{dt^2}\right)=\sum(Z\eta-Y\zeta),$$

si O_1 est le centre de gravité, ou si l'on prend pour origine mobile un point qui ait dans l'espace un mouvement rectiligne et uniforme, enfin si la force accélératrice du point O_1 est constamment dirigée vers le centre de gravité du système.

613. Si l'origine des coordonnées mobiles est choisie de l'une de ces trois manières, on aura, par rapport aux axes dont l'origine est mobile, des propriétés semblables à celles qu'on a trouvées pour des axes fixes.

614. Plan du maximum des aires. — Dans un système de points en mouvement pour lequel le principe des aires a lieu, en prenant pour origine un point fixe ou mobile suivant les conditions établies précédemment, *il existe un plan fixe tel, que la somme des aires décrites pendant un temps quelconque par les projections des rayons vecteurs des points mobiles sur ce plan, multipliées par leurs masses, est plus grande que pour tout autre plan de projection.* Ce plan est toujours le même, quel que soit le temps écoulé. On l'appelle *plan du maximum des aires* ou *plan invariable.* Son équation est

$$c''x+c'y+cz=0$$

et la somme $\sum m\omega$ relative à un autre plan de projection se déduit de celle qui se rapporte au plan π, en la multipliant par le cosinus de l'angle des deux plans.

Ce plan est le même que celui du couple résultant des quantités de mouvement du système solidifié (602).

QUARANTE-HUITIÈME LEÇON.

DES FORCES VIVES DANS LE MOUVEMENT D'UN SYSTÈME.

615 à 617. PRINCIPE DES FORCES VIVES. — *Dans tout système dont les liaisons sont indépendantes du temps, l'accroissement de la somme des forces vives de tous les points, pendant un temps quelconque, est égal au double de la somme des travaux de toutes les forces pendant le même temps.*

618. CONSÉQUENCES DU PRINCIPE DES FORCES VIVES. — *Dans un système, assujetti à des conditions quelconques, mais qui ne dépendent pas explicitement du temps, s'il n'y a pas de forces motrices ou si les forces motrices se font continuellement équilibre, la somme des forces vives reste constante.*

Ce principe est connu sous le nom de *principe de la conservation des forces vives.*

619. Si la fonction $\sum(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz)$ est la différentielle exacte d'une fonction f des variables x, y, z, x',..., considérées comme indépendantes ou comme liées entre elles par les équations $\mathrm{L} = 0$, $\mathrm{M} = 0$,..., *lorsque le système passe d'une position à une autre, l'accroissement de la somme des forces vives ne dépend que des coordonnées des points dans ces deux positions.*

620. Si les points mobiles occupent la même position à deux époques différentes t et t_0, la somme des forces vives aura la même valeur à ces deux époques, pourvu que, les coordonnées des points reprenant les mêmes valeurs, la fonction $f(x, y, z, x',...)$ reprenne aussi la même valeur.

621. L'expression $\sum(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz)$ est une différentielle exacte quand les forces motrices sont constamment dirigées vers des centres fixes, et qu'elles sont fonctions des distances de leurs points d'application aux centres. Cela arrive aussi quand les forces proviennent d'attractions ou de répulsions mutuelles entre les points du système, actions dont les intensités sont fonctions des distances des points entre lesquels elles s'exercent.

622. L'expression $\sum (X dx + Y dy + Z dz)$ n'est pas une différentielle exacte dans le cas où les points du système éprouvent des frottements ou la résistance d'un milieu.

623. Des forces vives dans un système a liaisons complètes. — Quand un système de n points est à liaisons complètes, l'équation des forces vives suffit pour déterminer le mouvement de chaque point. Exemples : pendule composé, mouvement d'un corps solide autour d'un axe.

625. Des forces vives dans le mouvement relatif. — *Dans un système quelconque, lors même qu'il ne serait pas entièrement libre dans l'espace, la somme des forces vives des points dans leur mouvement absolu est égale, à chaque instant, à la même somme considérée dans le mouvement relatif autour du centre de gravité, augmentée du produit de la masse totale du système multipliée par le carré de la vitesse du centre de gravité.*

626. Dans le mouvement relatif d'un système absolument libre, autour de son centre de gravité, la différentielle de la somme des forces vives des points du système est égale au double de la somme des quantités de travail apparent des forces motrices.

QUARANTE-NEUVIÈME LEÇON.

DU CHOC DES CORPS.

627. Du choc direct de deux corps sphériques. — Considérons deux sphères, dont les centres se meuvent sur une même droite Ox, dans le même sens ou en sens contraires, et dont tous les points décrivent des parallèles à cette droite.

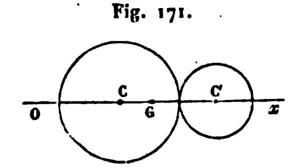
628. Si les deux corps sont *mous*, c'est-à-dire dépourvus d'élasticité, après s'être comprimés jusqu'à un certain degré, ils cessent d'agir l'un sur l'autre à l'instant où les vitesses sont devenues égales, et ils continuent à se mouvoir en restant juxtaposés avec une vitesse commune et conservant la forme que la compression leur a donnée.

629. S'ils sont élastiques, ils tendent, au moment où la compression cesse, à reprendre leur forme primitive aussitôt que la vitesse est devenue la même, et de là naissent de nouvelles pressions qui tendent à séparer les deux corps. Si ces pressions sont égales en

intensité à celles qui ont lieu dans la première partie du choc et que les deux corps quand ils se séparent soient dans le même état qu'au moment où le choc a commencé, on dit qu'ils sont *parfaitement élastiques.*

630. Mouvement des centres de gravité. — Soient $OC = x$, $OC' = x'$; R la valeur des deux pressions égales et contraires appliquées aux centres des deux sphères et qui résultent des actions mutuelles de leurs molécules, m et m' les masses des deux sphères. On aura

Fig. 171.



$$m\frac{dx}{dt} + m'\frac{dx'}{dt} = mv + m'v'.$$

Cette équation exprime que la somme des quantités de mouvement reste constante pendant toute la durée du choc.

631. Choc de deux corps dépourvus d'élasticité. — Désignons par u la vitesse commune avec laquelle ces deux corps réunis en un seul se mouvront après le choc. On aura

$$u = \frac{mv + m'v'}{m + m'}.$$

Si avant le choc les deux corps allaient dans le même sens, après le choc le sens du mouvement commun sera le même. S'ils allaient en sens contraire, la vitesse commune après le choc sera celle de la sphère qui avait la plus grande quantité de mouvement. En particulier, si les deux corps, allant à la rencontre l'un de l'autre, avaient des quantités de mouvement égales, le choc les réduirait au repos.

632. Équation des forces vives. — On a, pendant toute la durée du choc,

$$m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + m'\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2 = mv^2 + m'v'^2 + 2\int R\,dr.$$

Cette équation exprime que la somme des forces vives à une époque quelconque est égale à cette somme prise au commencement du choc, plus le double de l'intégrale de $R\,dr$, prise à partir de la même époque.

633, 634. Choc de deux corps parfaitement élastiques. — On a

$$m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + m'\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2 = mv^2 + m'v'^2.$$

Vitesses des deux centres de gravité après le choc :

$$V = \frac{(m - m')v + 2m'v'}{m + m'},$$

$$V' = \frac{2mv + (m' - m)v'}{m + m'}.$$

635. Soit u la vitesse commune aux deux centres de gravité, au moment où la compression est la plus grande. On a

$$V = 2u - v, \quad V' = 2u - v'.$$

La vitesse de chaque corps au milieu du choc est la moyenne arithmétique entre sa vitesse avant le choc et sa vitesse après le choc.

La vitesse relative avec laquelle le centre de gravité C s'éloigne de C' après le choc est égale à celle avec laquelle il s'en approchait à l'instant où le choc a eu lieu.

636. Examen de quelques cas particuliers. — Si le corps C' est en repos au moment où C vient le rencontrer, la vitesse après le choc est

$$u = \frac{mv}{m + m'}.$$

637 Si les corps sont parfaitement élastiques,

$$V = \frac{(m - m')v}{m + m'}, \quad V' = \frac{2mv}{m + m'}.$$

Si m' est infiniment grande par rapport à m, le corps choqué demeure en repos, tandis que l'autre est réfléchi en sens contraire avec une vitesse égale à celle avec laquelle il est venu rencontrer le premier.

638. Quand les deux masses m et m' sont égales, si les deux corps sont mous,

$$u = \frac{v + v'}{2}.$$

Si les deux corps sont parfaitement élastiques, ils ne feront qu'échanger leur vitesse.

Si l'un des corps était en repos, l'autre restera immobile après le choc et lui transmettra sa vitesse.

639. Théorème de Carnot. — La somme des forces vives ne change pas par l'effet du choc quand les corps sont parfaitement élastiques. Mais lorsqu'ils sont mous, elle diminue et la différence

est égale à la somme des forces vives dues aux vitesses acquises ou perdues par les deux corps :

$$mv^2 + m'v'^2 - (m + m')u^2 = m(v - u)^2 + m'(u - v')^2.$$

On peut encore mettre cette perte de force vive sous la forme $\frac{mm'}{m + m'}(v - v')^2$.

640. Mouvement du centre de gravité commun. — La vitesse du centre de gravité commun reste constante avant, pendant et après le choc.

641. Principe de la moindre action. — Dans le mouvement d'un système de corps pour lequel le principe des forces vives a lieu, si l'on multiplie la vitesse de chaque point du système par sa masse et par l'élément de sa trajectoire, et qu'on intègre la somme de ces produits depuis une position donnée du système jusqu'à une autre position aussi donnée, la valeur de cette intégrale $\int \sum mvds$ est généralement un minimum.

Quand les points mobiles ne sont soumis à aucune force, on a

$$\int_{t_0}^{t} mv^2 dt = c(t - t_0),$$

Le temps du trajet est un minimum.

CINQUANTIÈME LEÇON.

PROPRIÉTÉS DU MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE; APPLICATIONS.

642. La position d'un corps solide est déterminée par celle de trois droites O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1 qui lui sont liées invariablement.

643. Tout mouvement infiniment petit d'un solide dont les divers points décrivent des trajectoires situées dans des plans parallèles peut être regardé comme une rotation autour d'un axe instantané perpendiculaire aux plans précédents.

644. Le mouvement continu du même solide lui serait donné si on le liait à un cylindre roulant sans glisser sur un cylindre fixe.

645. Les vitesses des points d'une figure plane qui se meut dans son plan sont, à un instant donné, perpendiculaires aux droites qui

joignent les points au centre instantané et proportionnelles à ces droites.

646-647. Les vitesses angulaires de deux manivelles réunies par une bielle sont inversement proportionnelles aux distances des centres de rotation à la bielle.

648. Quand on suppose que le point O_1 du solide coïncide toujours avec l'origine des axes fixes, les coordonnées d'un même point par rapport aux deux systèmes d'axes sont liées par les relations

$$x = ax_1 + by_1 + cz_1,$$
$$y = a'x_1 + b'y_1 + c'z_1,$$
$$z = a''x_1 + b''y_1 + c''z_1.$$

Si l'on pose

$$p = c\frac{db}{dt} + c'\frac{db'}{dt} + c''\frac{db''}{dt}, \quad q = a\frac{dc}{dt} + \ldots, \quad r = b\frac{da}{dt} + \ldots,$$

les projections de la vitesse d'un point sur les axes mobiles sont

$$qz_1 - ry_1, \quad rx_1 - pz_1, \quad py_1 - qx_1.$$

649-650. Le mouvement élémentaire du solide est une rotation dont l'axe passe par le point fixe; le mouvement continu s'obtient en liant le solide à un cône qui roule sur un cône fixe.

651. Quand les axes mobiles coïncident avec les axes fixes, on a

$$p = \frac{db''}{dt} = -\frac{dc'}{dt}, \quad q = \frac{dc}{dt} = -\frac{da''}{dt}, \quad r = \frac{da'}{dt} = -\frac{db}{dt}.$$

652. Si Ox_1, y_1, z_1 sont des axes principaux d'inertie, la force vive du solide est

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2.$$

653-654. Les sommes des moments des quantités de mouvement par rapport aux axes mobiles sont Ap, Bq, Cr et par rapport aux axes fixes

$$\sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = Apa + Bqb + Crc\ldots.$$

655. Joint universel.

656. Plusieurs rotations simultanées autour d'axes concourants ou parallèles donnent à un solide le même mouvement qu'une rotation unique dont les éléments s'obtiennent comme ceux de la résultante de plusieurs forces.

657. Les cosinus $a, b, c, \ldots$ peuvent s'exprimer en fonction de l'angle θ des plans xOy et x_1Oy_1, et des angles ψ et φ que l'intersection de ces plans fait avec Ox et Ox_1.

658. $$p = \sin\varphi \sin\theta \frac{d\psi}{dt} + \cos\varphi \frac{d\theta}{dt},$$
$$q = \cos\varphi \sin\theta \frac{d\psi}{dt} - \sin\varphi \frac{d\theta}{dt},$$
$$r = \cos\theta \frac{d\psi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt}.$$

659. **Le mouvement élémentaire le plus général d'un solide libre est un mouvement hélicoïdal.**

CINQUANTE ET UNIÈME LEÇON.

ROTATION D'UN CORPS SOLIDE AUTOUR D'UN POINT FIXE (SUITE). — MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE LIBRE.

660, 661. Équations du mouvement. — Faisant coïncider les axes fixes avec les axes principaux du corps Ox_1, Oy_1, Oz_1, pris dans la position qu'ils occupent au bout du temps t, on a

$$A\frac{dp}{dt} + (C - B)qr = L_1,$$
$$B\frac{dq}{dt} + (A - C)pr = M_1,$$
$$C\frac{dr}{dt} + (B - A)pq = N_1,$$

formules d'Euler : L_1, M_1, N_1, moments des forces motrices par rapport aux axes principaux du corps à l'époque t.

662 à 664. Cas où il n'y a pas de forces motrices.

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h.$$

Cette équation exprime que la force vive est constante.

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = G^2,$$

$$dt = \frac{\pm C\sqrt{AB}\,dr}{\sqrt{[G^2 - Bh + (B - C)Cr^2][Ah - G^2 + (C - A)Cr^2]}},$$

$$dt = \frac{ABC\omega\,d\omega}{\sqrt{(B+C)h - G^2 - BC\omega^2}\sqrt{(A+C)h - G^2 - AC\omega^2}\sqrt{(A+B)h - G^2 - AB\omega^2}}.$$

665. Plan invariable. — Le couple résultant des quantités de mouvement a un moment constant.

666, 667. La perpendiculaire au plan du couple résultant des

quantités de mouvement est fixe dans l'espace :

$$\omega \cos(\mathrm{IO}, \mathrm{G}) = \frac{\mathrm{A}p^2 + \mathrm{B}q^2 + \mathrm{C}r^2}{\mathrm{G}} = \frac{h}{\mathrm{G}},$$

quantité constante qui représente la composante de la vitesse angulaire autour de l'axe fixe du couple résultant des quantités de mouvement.

668. Le plan du couple résultant G étant pris pour plan des xy, on aura

$$\sin\theta \sin\varphi = \frac{\mathrm{A}p}{\mathrm{G}}, \quad \sin\theta\cos\varphi = \frac{\mathrm{B}q}{\mathrm{G}}, \quad \cos\theta = \frac{\mathrm{C}r}{\mathrm{G}},$$

$$d\psi = -\frac{h - \mathrm{C}r^2}{\mathrm{G}^2 - \mathrm{C}^2 r^2}\,\mathrm{G}\,dt.$$

669. La *vitesse angulaire* est proportionnelle au demi-diamètre qui va du centre au pôle instantané de rotation.

670. Mouvement de l'ellipsoïde central. — Le plan tangent à l'ellipsoïde central au pôle de rotation est fixe dans l'espace. C'est un plan parallèle à celui des quantités de mouvement.

L'ellipsoïde, dont le centre est fixe, roule sans glisser sur ce plan fixe et la vitesse angulaire de rotation est proportionnelle au rayon qui va du centre au pôle instantané sur la surface de l'ellipsoïde.

La courbe décrite sur la surface de l'ellipsoïde par le pôle instantané de rotation est appelée *poloïde*.

671. Lieu des axes instantanés dans le corps. — Il a pour équation

$$\mathrm{A}(\mathrm{G}^2 - \mathrm{A}h)x'^2 + \mathrm{B}(\mathrm{G}^2 - \mathrm{B}h)y'^2 + \mathrm{C}(\mathrm{G}^2 - \mathrm{C}h)z'^2 = 0.$$

672, 673. Lieu des axes du couple résultant. — On a

$$\frac{\mathrm{G}^2 - \mathrm{A}h}{\mathrm{A}}x''^2 + \frac{\mathrm{G}^2 - \mathrm{B}h}{\mathrm{B}}y''^2 + \frac{\mathrm{G}^2 - \mathrm{C}h}{\mathrm{C}}z''^2 = 0:$$

équation du cône décrit dans le corps par l'axe fixe OG.

674. Les axes principaux relatifs au point O sont les seuls qui puissent rester immobiles avec un mouvement de rotation uniforme.

675 à 678. Mouvement d'un corps solide entièrement libre. — Le mouvement d'un corps solide libre, sollicité par des forces données, sera connu quand on pourra déterminer le mouvement absolu d'un de ses points et le mouvement relatif de tout autre point du corps autour de celui-là. On pourra choisir à volonté le

point dont on considère le mouvement de translation. Mais, dans l'application, il est avantageux de prendre le centre de gravité.

Sous l'action des forces motrices le mouvement de rotation autour du centre de gravité est le même que si ce point était fixe.

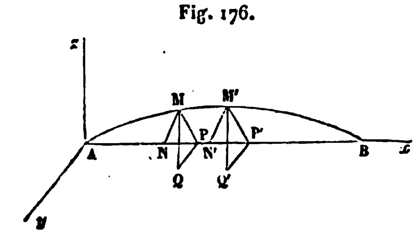
679, 680. MOUVEMENT D'UN ELLIPSOÏDE.

CINQUANTE-DEUXIÈME LEÇON.

MOUVEMENT D'UNE CORDE VIBRANTE.

681. ÉQUATIONS DU MOUVEMENT. — Soit ε le produit de la section normale de la corde par sa densité au point M, dans la position AMB, p le poids de la corde, l sa longueur primitive AB, T la tension au point M, ϖ le poids tenseur : si l'on néglige les forces motrices, on a

Fig. 176.



$$d.\left[\mathrm{T}\,\frac{d(x+u)}{ds}\right] = \frac{p}{gl}\,\frac{d^2u}{dt^2}\,dx,$$

$$d\left(\mathrm{T}\,\frac{dy}{ds}\right) = \frac{p}{gl}\,\frac{d^2y}{dt^2}\,dx,$$

$$d\left(\mathrm{T}\,\frac{dz}{ds}\right) = \frac{p}{gl}\,\frac{d^2z}{dt^2}\,dx.$$

x est l'abscisse primitive, $z+u$ l'abscisse pendant ce mouvement.

682 à 685. CAS DES PETITES VIBRATIONS. — q étant un coefficient constant pour la même corde, on a

$$\mathrm{T}-\varpi = q\,\frac{du}{dx},$$

et, en posant $\frac{glq}{p} = \alpha^2$, $\frac{gl\varpi}{p} = a^2$,

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \alpha^2\,\frac{d^2u}{dx^2},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = a^2\,\frac{d^2y}{dx^2},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = a^2\,\frac{d^2z}{dx^2}.$$

Les mouvements des points de la corde parallèlement aux axes seront indépendants et coexisteront sans s'influencer mutuellement.

686 à 688. VIBRATIONS TRANSVERSALES. — L'équation

$$\frac{d^2y}{dt^2} = a^2 \frac{d^2y}{dx^2}$$

a pour intégrale générale

$$y = \varphi(x + at) + \psi(x - at).$$

Soit pour $t = 0$,

$$y = f(x), \quad \frac{dy}{dx} = f_1(x),$$

$$\varphi'(x) - \psi'(x) = \frac{f_1(x)}{a}.$$

Posant, pour abréger,

$$\frac{1}{a}\int f_1(x)\,dx = F(x),$$

on a

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}[f(x) + F(x) + C],$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2}[f(x) - F(x) - C].$$

La fonction $\varphi(\zeta)$ est périodique et a pour période $2l$. Comme on connaît cette fonction pour toutes les valeurs de la variable comprises entre zéro et $2l$, elle sera connue pour toutes les valeurs de ζ positives ou négatives.

689, 690. L'autre fonction ψ est périodique, comme la première, et sa période est aussi $2l$.

La corde fait une suite de vibrations toutes égales et isochrones dont la durée est $\frac{2l}{a}$.

691. La résistance de l'air et la communication d'une partie du mouvement de la corde à ses deux points extrêmes A et B diminuent graduellement l'amplitude des vibrations et finissent par les anéantir, sans toutefois altérer sensiblement leur isochronisme.

692. Si l'on désigne par T la durée d'une vibration de la corde et par n le nombre des vibrations dans l'unité de temps, on a

$$T = \frac{2l}{a}, \quad n = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g\varpi}{pl}}.$$

Pour une même corde, le nombre n est proportionnel à la racine carrée de la tension ϖ; pour des cordes d'une même matière et d'une même épaisseur, les nombres de vibrations sont en raison inverse des longueurs. Enfin pour des cordes de même longueur et également tendues, n est en raison inverse des racines carrées de leurs poids. L'expérience a confirmé ces lois.

693. Nœuds de vibration. — Il y a des cas où la corde, en raison de son état initial, se partage, pour ainsi dire, spontanément en un certain nombre de parties égales vibrant à l'unisson et dont les points de séparation, appelés *nœuds*, restent immobiles pendant la durée du mouvement. Alors le son s'élève proportionnellement au nombre de ces parties.

La corde ayant, sans vitesse initiale, la forme de la courbe $y = C \sin \frac{m\pi x}{l}$, si on l'abandonne à elle-même, elle effectuera une suite indéfinie de vibrations isochrones.

694. Le nombre de vibrations effectuées dans l'unité de temps sera $m\frac{a}{2l}$, c'est-à-dire m fois celui qui correspond au son le plus grave de la corde, déterminé par la théorie générale.

695. Dans ce cas la corde se partage spontanément en m parties égales qui vibrent comme si elles étaient séparées, de sorte qu'il y aura $m - 1$ nœuds de vibrations.

696, 697. Vibrations longitudinales. — Si l'on désigne par n' le nombre des vibrations longitudinales effectuées dans l'unité de temps, on a

$$n' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{gq}{pl}}, \quad \frac{n}{n'} = \sqrt{\frac{\varpi}{q}}.$$

De deux sons les plus graves rendus par une même corde, celui qui correspond aux vibrations longitudinales est de beaucoup le plus aigu.

CINQUANTE-TROISIÈME LEÇON.

ÉQUILIBRE D'UNE MASSE FLUIDE.

698. Notions préliminaires. — L'hydrostatique a pour objet les lois de l'équilibre des fluides. Un fluide doit être considéré comme un assemblage, en apparence continu, de molécules matérielles qui cèdent au moindre effort tendant à les séparer les unes des autres.

L'hypothèse d'une mobilité parfaite pourrait conduire à des résultats peu conformes à l'expérience dans le cas d'un fluide en mouvement : mais si l'on excepte quelques liquides où la viscosité est considérable, les lois de l'équilibre auxquelles nous parviendrons en supposant les molécules parfaitement mobiles et sans aucune cohésion, s'appliqueront sans erreur sensible aux fluides naturels.

699. On distingue deux sortes de fluides, les liquides et les gaz ou fluides aériformes.

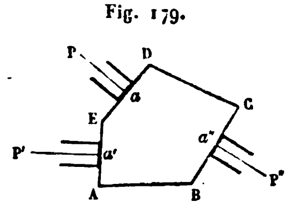
700. Pression d'un liquide sur une paroi. — La pression au point M est la limite du rapport de la pression exercée sur l'élément ω qui comprend le point M à l'aire ω, quand cette aire ω tend vers zéro en comprenant toujours le point M.

701. Égalité de pression en tous sens. — On admet comme un résultat de l'expérience ou comme une conséquence de la distribution uniforme des molécules des fluides, que la direction de la pression est toujours perpendiculaire à l'élément de surface ω sur lequel elle s'exerce.

Si, en un point quelconque de l'intérieur, on suppose une paroi plane solide, il y aura sur chaque élément de cette surface une pression toujours perpendiculaire à son plan. Il y a égalité de pression en tous sens pour un même point, c'est-à-dire que si l'on considère une surface infiniment petite ω passant par un point M pris à volonté dans le fluide, la pression exercée par le fluide sur chaque face de l'élément ω sera toujours la même, quelle que soit la position que l'on donne à l'élément ω, en le faisant tourner autour du point M.

702. Équilibre d'un fluide incompressible. — Supposons un liquide incompressible contenu dans un vase polyédrique ABCDE. Plusieurs parois sont percées d'ouvertures a, a', a'',..., sur lesquelles sont ajoutés de petits cylindres ayant leurs arêtes perpendiculaires à ces parois. Si l'on imagine des pistons qui peuvent se mouvoir dans l'intérieur de ces cylindres, les forces P, P', P",... nécessaires pour les maintenir, quand il y a équilibre, sont égales aux pressions exercées par le liquide contre leurs bases.

Fig. 179.



Concevons que l'on fasse mouvoir simultanément tous les pistons ; soient h, h', h'',..., les espaces qu'ils parcourent, ces espaces étant regardés comme positifs ou négatifs, selon que les pistons entrent

dans le vase ou en sortent. On a

$$Ph + P'h' + P''h'' + \ldots = 0,$$

ce qui est l'équation des vitesses virtuelles dans cet exemple particulier.

703. Équilibre d'une masse fluide quelconque. — Soient ρ la densité du fluide au point m et P la force motrice rapportée à l'unité de masse, qui sollicite la molécule m de ce parallélipipède infiniment petit; X, Y, Z les composantes de la force P; p la pression rapportée à l'unité de surface qui s'exerce au point m et qui est la même tout autour de ce point. On a

Fig. 180.

$$\frac{dp}{dx} = \rho X, \quad \frac{dp}{dy} = \rho Y, \quad \frac{dp}{dz} = \rho Z,$$

$$dp = \rho(X dx + Y dy + Z dz),$$

et

$$\frac{d(\rho X)}{dy} = \frac{d(\rho Y)}{dx}, \quad \frac{d(\rho X)}{dz} = \frac{d(\rho Z)}{dx}, \quad \frac{d(\rho Y)}{dz} = \frac{d(\rho Z)}{dy},$$

$$p = f(x, y, z) + C.$$

C est une constante qui sera déterminée quand on connaîtra la pression p_0 en un point particulier (x_0, y_0, z_0).

704. S'il n'y a pas de force qui sollicite les molécules intérieures, la pression sera constante dans toute la masse du fluide, de sorte qu'une pression extérieure exercée sur une partie du fluide adjacente à une paroi du vase doit se transmettre avec la même intensité sur des éléments de surface équivalents dans toute la masse et sur toutes les parois.

705. On appelle *surface de niveau* une surface dont tous les points éprouvent la même pression. Elles sont toutes comprises dans l'équation

$$f(x, y, z) = a.$$

Une couche de niveau est la masse du fluide comprise entre deux surfaces de niveau. Deux surfaces de niveau ne peuvent pas se couper.

706. La force motrice est normale à la surface du niveau en chacun de ses points.

707. Si la pression est nulle ou constante en tous les points de la surface libre d'un fluide, celle-ci est une surface de niveau.

708. Si $Xdy + Ydy + Zdz$ est la différentielle exacte d'une fonction $\varphi(x, y, z)$, en tous les points d'une surface de niveau la densité est constante.

709. Dans les fluides élastiques, si la température est constante dans toute l'étendue de la masse, on a

$$p = Ce^{\frac{\varphi}{k}}, \quad \rho = \frac{C}{k}e^{\frac{\varphi}{k}}.$$

Si la température n'est pas la même dans toute la masse, on aura

$$p = Ce^{\int \frac{d\varphi}{k}}, \quad \rho = \frac{p}{k} = \frac{C}{k}e^{\int \frac{d\varphi}{k}}.$$

Dans l'atmosphère qui enveloppe la terre, il ne peut y avoir équilibre, si la température n'est pas la même à la même distance du centre, et les surfaces de niveau doivent être des sphères ayant leur centre au centre de la terre.

CINQUANTE-QUATRIÈME LEÇON.

ÉQUILIBRE DES FLUIDES ET DES CORPS PLONGÉS DANS LES FLUIDES.

710. Figure permanente d'un fluide autour d'un axe. — Un fluide pesant, contenu dans un vase de forme quelconque, tourne d'un mouvement uniforme autour d'un axe vertical Oz. Soient ω la vitesse angulaire et p la pression, en donnant à p des valeurs constantes, on aura différentes surfaces de niveau. Leur équation

$$z = C - \frac{p}{g\rho} + \frac{\omega^2}{2g}(x^2 + y^2)$$

représente un paraboloïde de révolution.

711. On déterminera la constante C en exprimant que le volume du liquide est donné. Supposons que le liquide soit contenu dans un vase cylindrique ayant pour base sur le plan xOy le cercle dont le rayon est a, que b soit la hauteur de la partie du cylindre occupée par le liquide avant le mouvement, et que la surface libre supporte la pression atmosphérique constante représentée par ϖ. On aura

$$C = b + \frac{\varpi}{g\rho} - \frac{\omega^2 a^2}{4g}.$$

712. PRESSION D'UN LIQUIDE SUR LE FOND DU VASE QUI LE RENFERME. — Si b est l'aire de la base supposée horizontale et h la hauteur du liquide, la pression totale P que supporte cette base est

$$P = g\rho bh.$$

713. Supposons qu'on ait deux liquides contenus dans le même vase et qu'ils ne se mélangent pas.

Leur surface de séparation sera nécessairement un plan horizontal. Soient b la base, h la hauteur, et ρ la densité de la première couche reposant sur le fond du vase; b', h', ρ' les quantités analogues relatives à la seconde couche. La pression exercée sur le fond du vase sera $g(\rho'h'+\rho h)b$, c'est-à-dire égale au poids d'une colonne cylindrique, dont la base serait b, qui contiendrait une hauteur h du liquide inférieur et une hauteur h' du liquide supérieur.

Théorème analogue pour un nombre quelconque de liquides contenus dans un même vase et pour un liquide dont la densité varierait d'une manière continue avec la hauteur.

714. VASES COMMUNIQUANTS. — Les hauteurs auxquelles deux liquides s'élèvent dans deux vases communiquants sont en raison inverse de leurs densités.

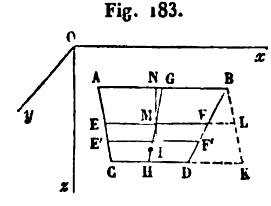
Si l'on ajoutait un nombre quelconque de liquides dans les deux vases, il faudrait que la somme des produits de leurs densités par les hauteurs de leurs tranches fût la même de part et d'autre.

715. PRESSION D'UN LIQUIDE SUR UNE PAROI PLANE. — La pression totale est égale au poids d'un cylindre de liquide qui aurait une base égale à la surface de la paroi et une hauteur égale à la distance du centre de gravité de cette paroi au niveau supérieur du liquide.

Le point d'application de la résultante des pressions exercées sur la surface AB est appelé *centre de pression*.

716 à 718. Supposons que la paroi immergée ait la forme d'un trapèze dont les côtés parallèles AB, CD soient horizontaux. Le centre de pression est sur la droite GH qui joint les milieux de ces deux côtés. En nommant u_1 la distance du centre de pression I à AB, h la hauteur du trapèze, α l'angle que le plan du trapèze fait avec un plan horizontal, c la distance de AB à la surface du liquide, en posant AB $= a$, CD $= b$, EF $= v$, MN $= u$, on a

Fig. 183.



$$u_1 = \frac{2hc(a+2b)+h^2(a+3ab)\sin\alpha}{6c(a+b)+2h(a+2b)\sin\alpha}.$$

Quand le trapèze est horizontal, le centre de pression coïncide avec le centre de gravité.

719 à 723. Principe d'Archimède. — *Quand un corps pesant est plongé dans un liquide, les pressions exercées sur sa surface ont une résultante unique, égale au poids du liquide déplacé et appliquée au centre de gravité de cette partie du fluide, supposée solidifiée.*

Le principe d'Archimède subsiste quand le corps n'est plongé qu'en partie dans le fluide, ou quand la densité ρ n'est pas la même à toutes les profondeurs.

724. Quand on pèse un corps dans un fluide, si P est le poids du corps et P′ celui d'un égal volume de liquide, D et ρ les densités vraie et apparente, on a

$$P = \frac{DP'}{D-\rho}.$$

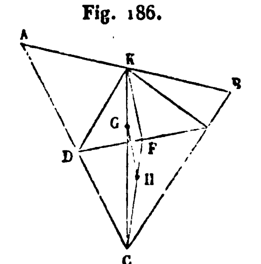
725. Le principe d'Archimède subsiste dans le cas où l'on considère un fluide contenu dans un vase. Si l'on fait une ouverture à l'une des parois latérales, le vase sera mis en mouvement en sens contraire de l'écoulement du liquide. C'est là le principe des différentes machines dites *à réaction*.

CINQUANTE-CINQUIÈME LEÇON.

CORPS FLOTTANTS. — MESURE DES HAUTEURS PAR LE BAROMÈTRE.

726 à 728. Équilibre des corps flottants. — Une section ABC perpendiculaire aux arêtes étant faite dans le prisme, DE étant le niveau du liquide, soient

Fig. 186.



$$\frac{CDE}{ABC} = r,$$

r étant le rapport de la densité du prisme à celle du liquide,

$$CA = a, \quad CB = b, \quad AB = c,$$
$$CK = h, \quad CD = x, \quad CE = y,$$

on a

$$xy = rab.$$

Si l'on nomme α et β les angles ACK et BCK, on a

$$x^2 - 2hx\cos\alpha = y^2 - 2hy\cos\beta,$$

$$x^4 - 2h\cos\alpha . x^3 + 2rhab\cos\beta . x - r^2a^2b^2 = 0.$$

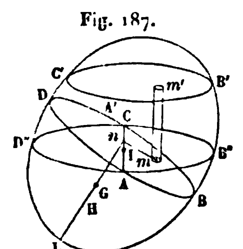
Il y a au plus trois positions d'équilibre pour lesquelles le sommet seul est plongé dans le liquide.

Le problème précédent revient à mener par un point donné K une normale à une hyperbole ayant pour asymptotes CA et CB.

729. Le cas où deux sommets A et B du triangle sont immergés, se ramène au cas où un seul plonge dans le liquide.

730. STABILITÉ D'UN CORPS FLOTTANT. — Un corps solide étant plongé dans un liquide, soit G le centre de gravité de ce corps, et H celui de la partie immergée. Supposons que l'on écarte un peu le corps de sa position d'équilibre et que tous ses points reçoivent de petites vitesses. Soit A'B'C'D' la section faite dans le corps par le nouveau plan de flottaison, le premier étant venu en ABCD.

Fig. 187.



Par le centre de gravité I de la section ABCD menons un plan AB''CD'', parallèle au plan horizontal A'B'C'D' et qui coupe ABCD suivant la droite AIC. Posons θ égal à l'angle des deux plans ABCD, AB''CD'', ζ égal à la distance du point I au plan A'B'C'D', ρ égal à la densité du fluide, u égal à la vitesse de la molécule dm, V égal au volume de la partie immergée quand le corps est en équilibre; GH $= a$; ε égal à un infiniment petit du troisième ordre au moins. On a

$$\sum u^2\, dm = c - g\rho b\zeta^2 - g\rho(\mu \mp \mathrm{V}a)\theta^2 + \varepsilon.$$

La constante c peut être supposée aussi petite qu'on voudra.

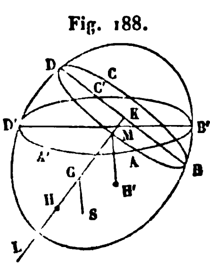
731. Si le centre de gravité G du corps est au-dessous de celui du fluide déplacé H, l'équilibre est toujours stable.

732. Quand le point G est au-dessus du point H, si μ ou le moment d'inertie de l'aire ABCD par rapport à la droite AIC reste plus grand que Va à toute époque, l'équilibre sera stable. Il faut et il suffit que Va soit moindre que le plus petit moment d'inertie de la section ABCD, par rapport à toutes les droites qu'on peut y mener par le point I. Si μ devenait moindre que Va, on ne peut rien affirmer relativement à la stabilité de l'équilibre.

733. DU MÉTACENTRE. — Soit S un corps solide flottant. Lorsqu'il est en équilibre, son centre de gravité G et celui H du volume du liquide déplacé sont sur une même perpendiculaire au plan de flot-

taison ABCD. Supposons que ce corps soit symétrique par rapport à un plan vertical BLD, lequel contient alors la droite KGH. Imaginons qu'on dérange un peu ce solide de sa position d'équilibre, tout en maintenant vertical le plan BDG. Ce plan contiendra toujours le centre de gravité de la masse fluide déplacée. Le centre de gravité du fluide déplacé A'B'C'D'L est un certain point H'. Le point M où la verticale H'M rencontre la droite KGH est ce qu'on appelle le *métacentre*.

Fig. 188.



Si le métacentre reste toujours au-dessus du point G, sur la droite HGK, l'équilibre est stable.

Si, au contraire, le métacentre est constamment au-dessous du centre de gravité, l'équilibre du corps sera instable.

Enfin, si le métacentre peut être, tantôt au-dessus, tantôt au-dessous du centre de gravité, la considération seule du métacentre ne fait plus rien connaître relativement à la stabilité de l'équilibre du corps flottant.

734. De la mesure des hauteurs par le baromètre. — Soient ϖ la force élastique de l'air, et D sa densité à la température zéro; p la pression, ρ la densité de l'air à la température θ; en désignant par α le coefficient de dilatation 0,00366 pour chaque degré d'accroissement de la température, et faisant $\frac{\varpi}{D} = k$, on aura

$$p = k\rho(1 + \alpha\theta).$$

La densité de l'air mélangé de vapeur, quand la température s'élève, la pression ϖ restant la même, doit diminuer un peu plus que ne l'indiquerait la formule précédente. Pour avoir égard à cette circonstance, on augmente le coefficient α, et l'on prend $\alpha = 0,004$.

735. En désignant par z la hauteur d'un point quelconque de l'atmosphère au-dessus de la surface terrestre, $M = 0,4342946$: on a

$$\log\frac{\varpi}{p} = \frac{Mg}{k(1+\alpha\theta)}\,\frac{z}{1+\frac{z}{r}}.$$

736. Soit h la hauteur de la colonne barométrique pour la station dont la hauteur verticale est z, et soit T la température du mercure, qui peut être différente de celle de l'air ambiant. Soient

h_0 et T_0 la hauteur et la température du mercure à la station inférieure, r le rayon terrestre, on a

$$\frac{\varpi}{p} = \left(1+\frac{z}{r}\right)^2 \frac{h_0}{H},$$

en posant, pour abréger,

$$H = h\left(1+\frac{T_0 - T}{5550}\right).$$

H est dite la *hauteur corrigée ;* c'est celle qu'aurait la colonne barométrique si la température du mercure à la station supérieure était la même qu'à la station inférieure.

737, 738. Si l'on désigne par λ la latitude de la station, et par G la pesanteur à Paris, dont la latitude est de $48°50'14''$, on a

$$G = 9,80896$$

et

$$z = \frac{a(1+0,004\theta)}{1-0,002588\cos 2\lambda}\left(1+\frac{z}{r}\right)\left[\log\frac{h_0}{H} + 2\log\left(1+\frac{z}{r}\right)\right],$$

en posant

$$a = \frac{k}{MG}\left[1 - 0,002588\cos 2\,(48°50'14'')\right].$$

On calcule le nombre a par l'équation même où l'on substitue à la place de z une ou plusieurs hauteurs mesurées par les procédés trigonométriques. On a trouvé ainsi

$$a = 18336.$$

Lorsque z n'est pas très-grande, on néglige entièrement $\frac{z}{r}$ dans la formule ; mais alors il faut augmenter le nombre a. M. Ramond a conclu d'un grand nombre d'observations faites dans le midi de la France, $a = 18393$, et il a adopté pour les latitudes peu différentes de 45° la formule très-simple

$$z = 18393\,(1+0,004\theta)\log\frac{h_0}{H}.$$

CINQUANTE-SIXIÈME LEÇON.

MOUVEMENT DES FLUIDES.

739. Équations générales du mouvement. — Les équations d'équilibre des fluides sont fondées sur la propriété qu'ils ont de transmettre également en tous sens les pressions appliquées à leur

surface, et sur celle d'exercer sur chaque élément de surface autour d'un point quelconque de leur masse, en vertu des actions moléculaires, une pression égale en tous sens et normale à l'élément de surface qui le supporte. Cette dernière propriété n'a pas toujours lieu quand le fluide est en mouvement; mais on peut l'admettre quand le mouvement n'est pas très-rapide.

Soient x, y, z les coordonnées d'un point m; μ la masse de la molécule fluide qui se trouve au point m après le temps t; X, Y, Z les composantes, rapportées à l'unité de masse, de la force qui agit sur la molécule μ; u, v, w les composantes de la vitesse du point, p sa pression et ρ sa densité.

740. Équations formées par le principe de d'Alembert :

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = X - \frac{du}{dt} - u\frac{du}{dx} - v\frac{du}{dy} - w\frac{du}{dz},$$
$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy} = Y - \frac{dv}{dt} - u\frac{dv}{dx} - v\frac{dv}{dy} - w\frac{dv}{dz},$$
$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} = Z - \frac{dw}{dt} - u\frac{dw}{dx} - v\frac{dw}{dy} - w\frac{dw}{dz}.$$

741. Équation de continuité :

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{d\rho u}{dx} + \frac{d\rho v}{dy} + \frac{d\rho w}{dz} = 0.$$

742. Si la densité du fluide est constante, l'équation précédente devient

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0.$$

743. Si le fluide est incompressible, mais non homogène, l'équation de continuité revient aux deux suivantes :

$$\frac{d\rho}{dt} + u\frac{d\rho}{dx} + v\frac{d\rho}{dy} + w\frac{d\rho}{dz} = 0,$$
$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0.$$

744. Dans le cas d'un fluide élastique et compressible, on aura encore la relation $p = k\rho$, le coefficient k ne dépendant que de la température de la masse gazeuse.

745. On suppose que les molécules en contact avec une paroi fixe ou mobile y restent indéfiniment et que les molécules qui appartiennent à la surface libre ne cessent jamais d'en faire partie.

Soit $f(t, x, y, z) = 0$ l'équation d'une surface sur laquelle un point du fluide doit toujours demeurer. On a

$$\frac{df}{dt} + u\frac{df}{dx} + v\frac{df}{dy} + w\frac{df}{dz} = 0.$$

Si la paroi est fixe,

$$\frac{df}{dx}u + \frac{df}{dy}v + \frac{df}{dz}w = 0.$$

La vitesse du point est à chaque instant dirigée suivant une tangente à la surface.

La surface libre du liquide étant soumise à une pression ϖ qui est la même pour tous les points, mais qui peut varier avec le temps, on aura

$$\frac{dp}{dt} + u\frac{dp}{dx} + v\frac{dp}{dy} + w\frac{dp}{dz} = \frac{d\varpi}{dt}.$$

746. Si l'on veut obtenir le mouvement d'une molécule particulière, ses coordonnées x, y, z cesseront d'être des variables indépendantes. Pour les connaître, il faudra intégrer les équations simultanées

$$\frac{dx}{dt} = u,\quad \frac{dy}{dt} = v,\quad \frac{dz}{dt} = w.$$

747. Lorsque u, v, w sont telles, que l'on ait

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz = d\varphi,$$
$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = dV,$$

on a

$$\frac{dp}{\rho} = dV - d\frac{d\varphi}{dt} - \frac{1}{2}d\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right].$$

Les différentielles sont prises par rapport à x, y, z sans faire varier t.

Si le fluide est homogène, on a

$$\int\frac{dp}{\rho} = P,$$

$$V - P = \frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right].$$

Il faut y joindre l'équation

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{d\left(\rho\frac{d\varphi}{dx}\right)}{dx} + \frac{d\left(\rho\frac{d\varphi}{dy}\right)}{dy} + \frac{d\left(\rho\frac{d\varphi}{dz}\right)}{dz} = 0.$$

qui devient, pour un fluide incompressible,

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}=0.$$

748 à 754. Mouvement d'un fluide dans une hypothèse particulière.

755. Mouvement permanent d'un liquide. — En un point quelconque la pression est toujours la même et la vitesse de chaque molécule qui passe par ce point est constante en grandeur et en direction; des molécules qui à des époques différentes occupent une même position parcourent la même trajectoire d'une manière identique. On a

$$dp=\rho(\mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy+\mathrm{Z}dz)-\frac{\rho}{2}d v^2.$$

v est la vitesse de la molécule μ à l'époque t où elle passe au point m, et dp est l'accroissement de la pression quand on passe du point m au point où arrive cette melécule après le temps dt.

756. Pour un liquide pesant dont le niveau est entretenu à une hauteur constante et qui s'écoule hors du vase qui le contient par un orifice pratiqué à sa partie inférieure, on a, en prenant l'axe des z vertical et dirigé dans le sens de la pesanteur,

$$p-p_0=g\rho(z-z_0)-\frac{1}{2}\rho(v^2-v_0^2),$$

p_0 et v_0 étant la pression et la vitesse au premier point, p et v au second.

757. Supposons que la surface supérieure du liquide soit plane et soumise en tous ses points à une pression égale et constante P_0. En désignant par P la pression extérieure qui s'exerce à l'orifice, on aura

$$v^2-v_0^2=2g(h+k),$$

en posant $\mathrm{P}_0-\mathrm{P}=g\rho k$.

Soit ω l'aire de l'orifice et Ω l'aire de la section du vase par le plau du niveau supérieur : on a

$$v=\sqrt{\frac{2g(h+k)}{1-\frac{\omega^2}{\Omega^2}}}.$$

758. Si le rapport $\frac{\omega}{\Omega}$ est très-petit, et si la pression est sensible-

ment la même à la partie supérieure du liquide et à l'orifice, on a

$$v = \sqrt{2gh},$$

en négligeant k.

CINQUANTE-SEPTIÈME LEÇON.

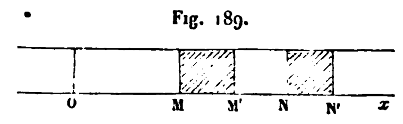
VIBRATIONS DES GAZ DANS LES TUYAUX CYLINDRIQUES.

759. ÉQUATION DU MOUVEMENT. — Dans l'état naturel d'équilibre d'un gaz, sa force élastique ϖ est égale à gmh, g étant la pesanteur, m la densité du mercure et h la hauteur de la colonne de mercure qui fait équilibre à la pressien de ce gaz.

Nous supposons que les molécules du fluide en repos qui sont dans un même plan perpendiculaire aux arêtes du tuyau, se déplacent d'un mouvement commun parallèlement aux arêtes.

Nous désignerons par u le déplacement MN des molécules qui étaient d'abord dans le plan M; par p la force élastique ou la pression du gaz en N rapportée à l'unité de surface, par ρ la densité du gaz.

Fig. 189.



Le mouvement d'une tranche, s'il n'y a pas de force étrangère, sera donné par l'équation

$$\frac{d^2u}{dt^2} = a^2\frac{d^2u}{dx^2},$$

en posant

$$a^2 = \frac{\varpi}{\rho}.$$

760. CAS DU TUYAU INDÉFINI DANS LES DEUX SENS. — L'équation du mouvement est

$$u = \varphi(x + at) + \psi(x - at).$$

En supposant pour $t = 0$,

$$\frac{du}{dx} = f(x) \quad \text{et} \quad \frac{du}{dt} = f_1(x),$$

on aura

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2}\left[f(x) + \frac{1}{a}f_1(x)\right],$$

$$\psi'(x) = \frac{1}{2}\left[f(x) - \frac{1}{a}f_1(x)\right],$$

761. Supposons que la partie primitivement ébranlée s'étende de $x = 0$ à $x = l$ seulement. Cette portion, qu'on appelle *onde*, est constituée d'une manière invariable qui ne dépend que de la fonction ψ'. Elle s'éloigne indéfiniment de OL avec une vitesse constante a; il ne faut pas confondre ce déplacement de l'onde avec le mouvement d'une molécule qui ne dure que pendant le temps $\frac{l}{a}$.

Fig. 190.

D' C' O L C D

762. Le mouvement se propage aussi vers les x négatives par une onde C'D' dont la nature dépend de la fonction φ' et qui se transporte à gauche du point O avec une vitesse uniforme égale à a.

Une même molécule est en mouvement pendant un intervalle de temps égal à $\frac{l}{a}$, depuis $t > \frac{-x}{a}$ jusqu'à $t < \frac{l-x}{a}$.

763. Le mouvement se propagerait par une seule de ces deux ondes, si l'ébranlement initial était tel, qu'on eût, dans la partie OL, $\varphi'(x) = 0$ ou $\psi'(x) = 0$, ce qui, d'après les formules (4), revient à supposer la relation

$$\frac{du}{dt} = -a\frac{du}{dx} \quad \text{ou} \quad \frac{du}{dt} = a\frac{du}{dx} \quad \text{pour} \quad t = 0.$$

764. Si l'ébranlement initial avait lieu dans plusieurs parties du tuyau séparées par des intervalles en repos, il suffirait de supposer les fonctions $\varphi'(x)$ et $\psi'(x)$ nulles dans ces intervalles pour rentrer dans le cas qui précède d'un ébranlement limité; chaque partie ébranlée doit donner naissance à deux ondes qui s'en vont à droite et à gauche avec la vitesse uniforme a.

765, 766. Tuyau fermé a une extrémité et indéfini dans un sens. — Si l'ébranlement initial est renfermé dans un espace limité KL entre les abscisses k et $k + l$, il donnera naissance à deux ondes animées des vitesses a et $-a$: il y aura deux ondes symétriques de celles-ci, s'écartant à droite et à gauche de l'intervalle K'L' symétrique de KL.

Fig. 191.

L' K' O L K

Celles qui s'éloignent de l'origine O n'éprouveront aucune altération. Quant aux deux autres, elles arriveront en même temps en O, et, continuant leur route, elles se composeront en se pénétrant;

puis ces deux ondes, après s'être traversées et séparées, continueront leur marche sans altération.

L'effet produit est le même que si les diverses tranches de l'onde, qui s'approche du plan fixe O, se repliaient sur elles-mêmes en conservant la même densité et prenant une vitesse égale en sens contraire. C'est en cela que consiste la réflexion du mouvement sur un plan fixe.

767. Tuyau indéfini dans un sens et ouvert dans un milieu gazeux de densité constante. — On admet que la force élastique du gaz à l'ouverture O du tuyau est la même que celle du gaz extérieur en repos.

Si l'ébranlement initial n'a lieu que dans une étendue limitée, il y aura dans le tuyau réel une onde s'éloignant indéfiniment de l'origine, et dans le tuyau prolongé indéfiniment, deux autres ondes marchant vers l'origine, se pénétrant et se traversant sans s'altérer, de sorte que dans le tuyau réel à un instant quelconque se trouvera l'onde qui se dirigeait d'abord vers l'origine et qui s'y réfléchit ensuite de manière à former une nouvelle onde dirigée en sens contraire; les vitesses dans les différentes sections sont les mêmes et de même sens que quand l'onde s'approchait de l'origine, tandis que le dilatation change de signe.

C'est en cela que consiste la réflexion du mouvement sur un milieu de densité constante.

768, 769. Tuyau fermé a ses deux extrémités. — L'ébranlement initial donne naissance à deux ondes qui marchent en sens inverse et vont successivement se réfléchir aux deux extrémités.

Après avoir subi deux réflexions et parcouru des chemins égaux à deux fois la longueur du tuyau, elles viennent, au bout d'un intervalle de temps égal à $\frac{2l}{a}$, reproduire, en se composant, l'état initial; et cet effet se répétera de nouveau indéfiniment.

770. Tuyau limité ouvert a ses deux extrémités. — L'état du tuyau est encore périodique et redevient le même après chaque intervalle de temps égal à $\frac{2l}{a}$.

771. Tuyau limité ouvert a une extrémité et fermé a l'autre. — L'état du tuyau ne redevient le même qu'après un intervalle de temps égal à $\frac{4l}{a}$.

FIN.

ÉNONCÉS DE PROBLÈMES.

STATIQUE (IIe Partie).

1. Un solide étant soumis à l'action de forces données, trouver le lieu des points tels qu'en y transportant les forces parallèlement à elles-mêmes on donne naissance à un couple dont l'axe soit dirigé suivant la résultante des forces; ce lieu s'appelle *axe central*. SG.

2. Quand trois forces se font équilibre, elles sont dans un même plan; quand quatre forces se font équilibre, elles sont sur un hyperboloïde. SG.

3. Étant donnés deux systèmes de forces équivalents $P, P', P'', \ldots$ et $Q, Q', Q'', \ldots$, la somme des tétraèdres qui ont pour arêtes opposées les droites représentant les forces du premier système combinées deux à deux est égale à la somme analogue que fournit le second système; il faut toutefois regarder comme négatifs les volumes de certains tétraèdres quand les forces qui en forment les arêtes opposées ont un moment négatif l'une par rapport à l'autre. SG.

4. Quatre droites admettent en général deux transversales communes, et cinq droites n'en admettent pas; soient toutefois cinq droites a, b, c, d, e rencontrant une droite t; b, c, d, e auront une seconde transversale commune a' autre que t; de même c, d, e, a en auront une seconde b', et ainsi des trois autres systèmes de quatre droites : démontrer que a', b', c', d', e' ont une transversale commune. SG.

5. Une tige pesante et homogène s'appuie par ses extrémités contre un plan horizontal et contre un plan vertical parfaitement polis; elle est perpendiculaire à l'intersection des deux plans fixes et reliée à cette intersection par un fil partant de l'un de ses points, qu'on donne, et situé dans le plan vertical de la tige : tension du fil quand il y a équilibre. PJ.

6. Une tige pesante et homogène passe entre deux chevilles à des hauteurs différentes et s'appuie par son extrémité inférieure sur un plan horizontal : calculer les pressions exercées sur les chevilles et sur le plan. PJ.

7. Une porte peut tourner autour de deux gonds A, B, situés sur une droite non verticale : calculer la force qui doit agir normalement à la porte pour qu'elle fasse un angle donné avec le plan vertical qui passe par AB. PJ.

8. Une tige pesante peut tourner autour d'une charnière placée à son extrémité inférieure et s'appuie à l'autre extrémité contre une verticale : déterminer les pressions supportées par cette verticale et par la charnière. PJ.

9. On remplace un système de forces par un autre équivalent formé des forces P, Q, R. ..., qu'on peut choisir d'une infinité de manières; soient pp', qq', ... les droites qui représentent les forces P, Q, R, ... : la droite qui joint le centre des moyennes distances de p, q, ... au centre des moyennes distances de p', q', ... est parallèle à un plan fixe, pourvu que le nombre des forces P, Q, ... soit constant. PJ.

10. A chaque élément d'une surface fermée, $d\sigma$, on applique une force normale égale à $d\sigma$, ou à $\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}\right)d\sigma$; on a $\frac{1}{RR_1}d\sigma$, R et R_1 étant les rayons de courbure principaux de la surface sur l'élément $d\sigma$: montrer que dans les trois cas toutes les forces se font équilibre. PJ.

11. Position d'équilibre d'une droite pesante et homogène qui repose sur deux plans inclinés polis. SG.

12. Positions d'équilibre d'une planche elliptique, d'épaisseur constante, située dans un plan vertical et reposant sur deux chevilles à la même hauteur. SG.

13. Déterminer quatre forces agissant aux sommets d'un tétraèdre perpendiculairement aux faces opposées, de manière qu'elles se fassent équilibre. SG.

14. Déterminer les positions d'équilibre de deux poids égaux assujettis à rester sur une parabole dont l'axe est vertical et se repoussant avec une intensité inversement proportionnelle à leur distance. SG.

15. Entre deux plans inclinés on place deux sphères homogènes de manière qu'elles s'appuient l'une contre l'autre et que chacune touche un des plans: déterminer les conditions d'équilibre. PJ.

16. Deux fils flexibles partent d'un même point : l'un soutient une sphère pesante, l'autre un petit poids qui pend au-dessous de la sphère sans la toucher : figure d'équilibre. PJ.

17. Dans un cylindre mince, ouvert aux deux bouts, reposant par une de ses bases sur un plan horizontal, on introduit deux sphères égales dont le diamètre surpasse le rayon du cylindre : quel doit être au moins le poids du cylindre pour qu'il ne soit pas renversé? PJ.

18. Une enveloppe sphérique mince repose sur un plan incliné et contient à son intérieur un très petit poids qui est attiré vers un point du plan incliné avec une force proportionnelle à la distance : positions d'équilibre de la sphère et du point intérieur. SG.

19. Une tige pesante est mobile autour de son extrémité A et soutenue à l'autre extrémité par un fil sans masse qui passe sur une poulie située verticalement au-dessus de A, puis sur une seconde poulie C, pour se terminer par un anneau qui soutient une chaîne pesante; celle-ci, parfaitement flexible, a sa seconde extrémité fixée au-dessous de C : figure d'équilibre. SG.

20. D'un point partent trois fils de même longueur portant trois sphères dont les poids et les volumes sont égaux; sur ces trois sphères on en place une quatrième, et l'on demande les figures d'équilibre possibles en supposant les centres des trois premières dans un même plan horizontal. SG.

21. Un segment de paraboloïde de révolution est placé en équilibre sur deux plans également inclinés à l'horizon : quelle peut être la hauteur maximum du segment pour qu'en le supposant divisé en deux parties par le plan vertical de l'intersection des deux plans fixes les moitiés ne se séparent pas? SG.

22. Une tige pesante et homogène s'appuie par une extrémité sur un plan horizontal dépoli, tandis que l'autre extrémité est soutenue par un fil qui passe sur une petite poulie et se termine par un poids : position du système quand la barre est près de glisser. PJ.

23. Une barre pesante repose sur une cheville dépolie et est sollicitée à son extrémité inférieure par une force de grandeur et de

direction données : position de la tige quand elle est près de glisser. PJ.

24. Une échelle s'appuie sur un plan horizontal et sur un mur vertical dont les coefficients de frottement sont connus ; elle est perpendiculaire à l'intersection des deux plans : dans quelle position est-elle près de glisser ? PJ.

25. Une planche rectangulaire située dans un plan vertical repose sur un plan dépoli perpendiculaire au premier et dont on augmente graduellement l'inclinaison : déterminer dans quelles conditions la planche se mettra à glisser ou à basculer autour de son sommet inférieur. PJ.

26. Une barre pesante est parfaitement libre de se mouvoir autour d'une de ses extrémités, qui est fixe ; l'autre bout appuie contre un mur vertical dépoli : position où la barre est près de glisser. PJ. SG.

27. Une barre homogène AB peut tourner autour de son milieu C et porte un poids à son extrémité A ; une barre pesante mobile autour d'une de ses extrémités O appuie sur l'extrémité B de la première, où se produit un frottement ; la droite CO est verticale et égale à CA : quelle est l'inclinaison de AB quand le glissement est près de se produire ? SG.

28. Une tige pesante et homogène AB repose en A sur une horizontale fixe OX et touche une courbe située dans le plan vertical qui contient OX ; le coefficient de frottement est le même sur OX et sur la courbe : déterminer la nature de celle-ci de telle sorte que, dans toutes les positions que peut prendre AB, elle soit sur le point de glisser. SG.

29. Déterminer le coefficient du frottement du fer sur lui-même et sur le sol de manière qu'en disposant quatre boulets égaux en forme de pile triangulaire ils soient en équilibre, mais tout près de glisser. SG.

30. Deux roues égales dont les axes sont réunis par une barre homogène et pesante sont situées dans le même plan vertical et reposent sur une droite inclinée dépolie ; l'une des roues est libre de rouler, mais l'autre est enrayée : calculer l'inclinaison du rail d'appui quand le chariot est près de glisser. PJ.

31. Figure d'équilibre d'un polygone plan dont les côtés sont articulés à charnières et pressés normalement, chacun en son milieu,

par une force proportionnelle à sa longueur et comprise dans le plan du polygone. PJ. SG.

32. On donne un quadrilatère articulé dont les côtés ne sont pas pesants ; les sommets opposés sont réunis par deux fils : quel est le rapport des tensions des deux fils pour une figure d'équilibre donnée? PJ.

33. Appliquer la théorie du polygone funiculaire à la figure d'équilibre de quatre barres pesantes, homogènes et égales, formant une ligne brisée ABCDE dans un plan vertical ; les extrémités A et E sont articulées en deux points fixes d'une même horizontale et les barres successives sont articulées entre elles ; il n'y a pas de frottement. SG.

34. Déterminer la forme d'un fil pesant, parfaitement flexible et inextensible, dont les deux bouts sont fixes, et où la densité en chaque point est inversement proportionnelle à la racine carrée de l'arc compris entre ce point et le point le plus bas. PJ.

35. Un fil pesant prend la forme d'une demi-circonférence : comment varie la densité sur ce fil? PJ.

36. Un fil homogène et pesant repose sur deux chevilles horizontales placées à la même hauteur ; les deux bouts, qui pendent librement de chaque côté, sont égaux : quelle est la longueur minimum du fil compatible avec l'équilibre, et quelle est alors la pression supportée par les chevilles? PJ.

37. Un fil homogène non pesant est sollicité en chacun de ses points par une force répulsive, émanant d'une droite fixe à laquelle elle est perpendiculaire, et proportionnelle à la distance du point repoussé à la droite ; les extrémités du fil sont fixées en des points donnés, et l'on demande la figure d'équilibre. Cas où le fil s'écarte peu de l'axe répulsif. SG.

38. Relation générale entre la forme d'équilibre d'un fil pesant et la loi de la densité suivant ce fil. SG.

39. Calculer en chaque point l'épaisseur d'un câble de fer dont le poids spécifique est 7,7 et dont les extrémités sont fixées sur une même horizontale à 100 mètres l'une de l'autre ; chaque élément du câble doit supporter, outre son poids, une charge proportionnelle à sa projection horizontale, et égale à 300 kilogrammes pour une projection d'un mètre : on veut que la flèche de l'arc formé par le câble soit de 10 mètres et que la tension en chaque

point du câble soit de 11 kilogrammes par millimètre carré de section. SG.

40. Courbe d'équilibre d'un fil pesant et homogène posé sur la surface concave d'un cône droit à axe vertical dont le sommet est en bas; tension en chaque point. SG.

41. Figure d'équilibre d'un fil non pesant dont chaque élément est sollicité par une force normale, proportionnelle à la distance de l'élément à une horizontale donnée. SG.

42. Figure d'équilibre d'un fil non pesant dont les extrémités sont fixes, et dont chaque élément est attiré vers un point fixe par une force réciproque au carré de la distance. PJ.

43. Un fil inextensible et sans poids passe sur une courbe dépolie située dans un plan vertical et se termine à ses deux extrémités par deux poids : quelle relation doit-il y avoir entre ces poids et la courbure totale de l'arc embrassé par le fil pour que le glissement se produise ? PJ.

44. Un fil élastique pesant, homogène à l'état naturel, repose sur une cycloïde dont l'axe est vertical ; une extrémité est attachée au sommet de la cycloïde, et l'autre arrive au point le plus bas : calculer la longueur naturelle du fil et sa tension quand il s'est allongé le long de la cycloïde. SG.

45. Figure d'équilibre d'un fil élastique, pesant, homogène à l'état naturel, et dont les extrémités sont fixes. PJ.

46. Déterminer à l'aide du principe des vitesses virtuelles la position d'équilibre d'un point pesant posé sur un plan incliné et attiré vers un centre fixe proportionnellement à la distance ; pression sur le plan. SG.

47. Position d'équilibre d'une tige pesante reposant sur une cheville horizontale et appuyant par son extrémité inférieure contre un mur vertical ; charge des appuis. SG.

48. Positions d'équilibre de trois points assujettis à rester sur un cercle horizontal poli et exerçant les uns sur les autres des répulsions proportionnelles à leurs distances. SG.

49. Trois points A, B, C peuvent se mouvoir dans un plan, de manière toutefois que les angles du triangle ABC restent constants : déterminer les conditions d'équilibre de trois forces constantes appliquées aux trois points. PJ.

50. Une barre mobile dans un plan vertical autour de son extrémité inférieure porte à l'autre bout un poids et est soutenue par un ressort dont la force varie en raison inverse de la pente de la barre : figure d'équilibre. PJ.

51. Une barre pesante et homogène peut se déplacer tout en restant tangente à une courbe située dans un plan vertical, et vient buter contre un mur vertical ; quelle doit être la nature de la courbe pour que la barre soit en équilibre dans toutes ses positions sans qu'il y ait de frottements ? PJ.

52. Une barre pesante peut tourner dans un plan vertical autour de son extrémité inférieure, tandis que l'autre extrémité est soutenue par un fil qui passe sur une petite poulie et se termine par un poids assujetti à glisser sur une courbe : déterminer la nature de la courbe de manière qu'il y ait équilibre quelle que soit la position du poids. PJ.

53. Une pile triangulaire de boulets sphériques parfaitement polis a sa base retenue entre trois murs verticaux formant un prisme équilatéral : calculer la pression supportée par chacun de ces murs. SG.

54. Position d'équilibre d'un poids attiré proportionnellement à la distance vers deux points fixes A, B qui sont à la même hauteur et obligé de rester à une distance constante du milieu de AB ; distinguer si l'équilibre est stable ou instable. SG.

55. Un point non pesant est en équilibre au centre d'un octaèdre régulier dont les sommets l'attirent proportionnellement à la $n^{ième}$ puissance de la distance : quelles sont les valeurs de n pour lesquelles l'équilibre est stable ? SG.

56. Un fil de masse négligeable passe dans un anneau et a ses extrémités attachées en deux points pris sur un côté d'une planche carrée à égale distance du milieu de ce côté : déterminer les positions de la lame qui correspondent à l'équilibre et rechercher si celui-ci est stable ou instable. PJ.

DYNAMIQUE (IIe Partie).

57. Mouvement d'un point pesant placé dans un tube rectiligne qui tourne uniformément autour d'une verticale qu'il rencontre. PJ.

58. Mouvement d'un point pesant assujetti à rester sur un plan qui tourne uniformément autour d'une de ses horizontales. PJ.

59. Un point matériel est enfermé dans un tube circulaire horizontal dont le centre est fixe, mais dont le rayon augmente proportionnellement au temps : le point ayant été mis en mouvement dans le tube, déterminer sa trajectoire et la pression qu'il exerce. SG.

60. Deux poids égaux A et B s'attirent proportionnellement à la distance et sont assujettis à rester, A sur un plan incliné P, B sur une verticale D ; il n'y a pas de frottement : déterminer le mouvement. Cas particulier : le sinus de l'angle de P avec l'horizon est $\frac{3}{4}$; les positions initiales de A et de B conviennent à l'équilibre, mais on leur donne des vitesses initiales telles, que la vitesse de B est égale à la vitesse de A estimée, soit suivant une horizontale, soit suivant une ligne de plus grande pente de P. SG.

61. Trois points assujettis à rester dans un plan s'attirent suivant la loi newtonienne : trouver tous les cas où le mouvement de deux des points autour du troisième est identique à celui d'un point attiré vers un centre fixe suivant la loi de Newton. PJ.

62. Un cylindre auquel est attaché un corps pesant, symétrique par rapport à un plan perpendiculaire à l'axe du cylindre, peut rouler sans glisser sur les deux parties d'un plan horizontal séparées par un intervalle destiné à laisser passer le corps attaché au cylindre ; mouvement de ce système. PJ.

63. Mouvement d'une tige pesante assujettie à glisser sur deux droites fixes dans un plan vertical ; pression sur les deux guides. PJ.

64. Mouvement d'une chaîne pesante, mince, mais non homogène, enfermée dans un tube dont la forme est celle d'une cycloïde située dans un plan vertical avec sa base horizontale et son sommet en bas. PJ. SG.

65. Un fil est enroulé sur un cylindre mobile autour d'un axe

horizontal et porte à ses extrémités deux points auxquels on imprime une certaine vitesse tout en laissant les fils verticaux : déterminer le mouvement du système en supposant que l'air oppose aux poids une résistance proportionnelle au carré de leur vitesse. SG.

66. Un fil inextensible et sans masse repose sur deux petites poulies A et B situées à la même hauteur et porte à ses extrémités deux poids égaux à P; au milieu de AB on pose sur le fil un poids Q et on l'abandonne sans vitesse initiale : déterminer le mouvement du système. Cas où Q est beaucoup plus petit que P. SG.

67. Une planche très mince de forme quelconque repose sur un cylindre horizontal sur lequel elle ne peut que rouler sans glisser : loi de ses oscillations quand elle est écartée de sa position d'équilibre. SG.

68. Une portion d'une chaîne homogène est pelotonnée, tandis que l'autre portion forme une ligne droite sur un plan horizontal et se termine par une masse; on imprime à celle-ci une certaine vitesse suivant la direction de la portion de chaîne qui est déroulée, et l'on demande le mouvement du système en supposant que la chaîne se déroule sans effort. SG.

69. Une tige de masse négligeable porte à ses extrémités A et B deux poids égaux; A est libre, et B assujetti à rester sur une droite inclinée et polie : mouvement du système en supposant que AB reste toujours dans le même plan vertical; tension de AB et pression qu'elle exerce sur son guide. SG.

70. Sur un plan horizontal poli repose un parallélépipède rectangle; dans sa section verticale médiane on a creusé un canal de forme connue dans lequel peut glisser une petite bille; le prisme est d'abord immobile et la bille abandonnée sans vitesse : mouvement du système. Cas où la forme du tube et celle d'une cycloïde convexe vers le bas, et où la bille part du point de rebroussement de la cycloïde. SG.

71. On donne un système de points ayant pour masse m, m_1, $m_2, \ldots$, sollicités par des forces F, F_1, $F_2, \ldots$ et assujettis à des liaisons quelconques; un second système est semblable au premier quant à la disposition de ses points et des liaisons, et le rapport de similitude est α; les masses de ce système sont βm, $\beta m_1, \ldots$ et elles sont soumises aux forces $\gamma F, \gamma F_1, \ldots$ parallèles à F, $F_1, \ldots$ aux points homologues : démontrer que les points dans les deux sys-

tèmes décriront des courbes semblables et que le rapport des temps employés à décrire des arcs homologues sera égal à $\sqrt{\frac{x^5}{7}}$. PJ.

72. Une série de sphères parfaitement élastiques ont leurs centres en ligne droite; on donne les masses des sphères extrêmes, et l'on demande de déterminer les masses des sphères intermédiaires de sorte qu'en donnant à la première sphère une vitesse connue la vitesse transmise à la dernière soit maximum. PJ.

73. Deux sphères animées de vitesses u, u' suivant la même droite se choquent et prennent les vitesses v, v' : on dit que leurs coefficients d'élasticité sont e, e' si l'on a $v'-v = ee'(u-u')$: calculer v et v', ainsi que la perte de force vive produite par le choc. PJ.

74. Trois points s'attirent suivant la loi newtonienne : chercher si l'on peut leur donner des positions et des vitesses initiales telles qu'ils soient toujours en ligne droite; déterminer leurs trajectoires dans ce cas. SG.

75. On donne un plan horizontal et un plan vertical parfaitement polis sur lesquels s'appuie une barre homogène, perpendiculaire à leur intersection et maintenue d'abord en repos. Un animal peut se mouvoir le long de la perche, qui lui fournit une réaction longitudinale pour accélérer au besoin son mouvement : déterminer la loi de ce mouvement de telle sorte que si l'on cesse de maintenir la perche elle reste néanmoins en repos. SG.

76. Une tige homogène de masse μ peut tourner autour de son milieu O dans un plan horizontal ; sur cette tige peut glisser un anneau de masse m attiré vers O proportionnellement à la distance : mouvement du système et réactions. Cas où $\mu = 3m$ et où l'anneau se trouve d'abord à un bout de la tige, avec une vitesse de glissement égale à zéro. SG.

77. Un point est lié à deux autres par deux fils inextensibles et sans masse qui passent dans un même anneau très petit ; les trois points restent sur un plan horizontal poli ; on leur donne des vitesses connues et l'on demande la loi de leurs mouvements ultérieurs. PJ.

78. Un point M est assujetti à rester sur un cône droit dont l'axe est vertical et la pointe dirigée vers le haut ; M est attaché à un fil sans masse qui passe dans un très petit trou au sommet du cône,

va s'enrouler sur une poulie et se termine par un poids M'. Déterminer le mouvement du système en supposant que M' soit d'abord immobile et M animé d'une vitesse horizontale. SG.

79. Mouvement d'une droite homogène et pesante assujettie à rester sur un hyperboloïde de révolution dont l'axe est vertical et qui ne donne lieu à aucun frottement. SG.

80. Mouvement d'une barre pesante et homogène dont une extrémité reste sur un plan horizontal et l'autre sur une droite verticale; la vitesse initiale de la seconde extrémité est nulle : réactions; discussion. SG.

81. Deux masses m, m', posées sur un plan horizontal, sont reliées par un fil sans masse qui passe dans un très petit anneau sur le plan donné; cet anneau attire m en raison inverse du carré de la distance; on imprime des vitesses connues aux deux masses, et l'on demande le mouvement qui en résulte. SG.

82. Loi des petites oscillations d'une balance légèrement écartée de sa position d'équilibre, en supposant les plateaux réduits à de simples fils sans masse attachés aux extrémités du fléau. PJ.

83. Un fil élastique de masse négligeable est tendu verticalement entre deux points fixes et porte deux petites masses qui partageraient le fil en trois segments égaux s'il n'était pas allongé; on écarte les masses de leurs positions d'équilibre tout en laissant le fil vertical: loi des oscillations du système. PJ.

84. Une barre pesante et homogène suspendue par un fil à un point fixe est écartée de sa position d'équilibre: déterminer son mouvement en supposant qu'elle reste dans un même plan vertical. PJ.

85. Mouvement d'un cylindre droit non homogène placé sur un plan horizontal poli, en supposant la vitesse de chaque point du cylindre toujours perpendiculaire aux arêtes. SG.

86. Pertes de travail occasionnées dans les machines par les résistances passives; frottements dans les engrenages cylindriques et coniques, dans la vis à filets carrés, dans la vis sans fin; pertes de travail dues à la raideur des cordes. PJ.

87. Un tube circulaire assujetti à rester dans un plan vertical ne peut que rouler sans glisser sur une horizontale fixe et contient dans son intérieur une petite bille : mouvement du système, en le

supposant abandonné à lui-même sans que ses points aient de vitesse initiale. SG.

88. Un fil inextensible et sans masse, attaché en un point fixe, porte deux poids à des hauteurs différentes : déterminer le mouvement du système, en supposant qu'il reste dans le même plan vertical. SG. PJ.

89. Étudier dans un plan le mouvement d'un point matériel non pesant attiré vers deux centres fixes avec des intensités inversement proportionnelles au carré de la distance. SG.

90. Application des équations de Lagrange et d'Hamilton à plusieurs des problèmes précédents. SG.

91. Moment d'inertie d'un arc de cercle homogène par rapport à son axe, à une perpendiculaire à son plan menée par le centre. SG.

92. Moment d'inertie de l'aire d'une ellipse par rapport aux deux axes, à la normale au plan menée par le centre. SG.

93. Moment d'inertie d'un ellipsoïde homogène par rapport aux axes, à une diagonale du parallélépipède rectangle circonscrit. SG.

94. Moment d'inertie de l'aire d'un triangle par rapport à une médiane, à un côté, à la normale au plan menée par un sommet. SG.

95. Moment d'inertie d'un tore par rapport à l'axe, à un diamètre équatorial. S. G.

96. Moment d'inertie d'une lentille biconvexe, dont les deux calottes ont même rayon, par rapport à l'axe, à un diamètre de l'équateur. PJ.

97. Condition pour qu'une droite soit axe principal d'inertie en l'un de ses points; application à une des arêtes d'un tétraèdre homogène. SG.

98. Les plans conjugués d'une droite par rapport aux ellipsoïdes centraux relatifs aux divers points de cette droite passent tous par une droite fixe. PJ.

99. Lieu des droites menées par un point donné d'un solide connu et qui sont principales en l'un de leurs points. PJ.

100. Lieu des points d'un solide donné où les axes principaux sont parallèles à ceux d'un point connu. PJ.

101. Connaissant la grandeur et la direction des rayons principaux de gyration relatifs au centre de gravité d'un solide, calculer le moment d'inertie autour des diverses droites qui passent par un point : les axes principaux en ce point sont les normales de trois surfaces du second degré homofocales à un ellipsoïde déterminé. Lieu des points où deux moments principaux sont égaux, où l'un des moments principaux a une valeur donnée. SG.

102. Un parallélépipède homogène et pesant est fixé par les deux extrémités d'une de ses arêtes, qui est verticale : quelle vitesse de rotation faudrait-il lui imprimer pour que la charge de l'appui inférieur fût nulle? SG.

103. Un pendule est formé d'une sphère homogène suspendue à l'aide d'une tige rigide de masse négligeable : en quel point de cette tige faudrait-il fixer le centre d'une autre sphère donnée pour diminuer le plus possible la durée des oscillations? PJ.

104. Une tige pesante, homogène et rigide oscille autour d'une de ses extrémités dans un plan vertical : chercher en quel point de cette tige la force qui tend à la courber exerce le plus grand effort. PJ.

105. Avec quelle vitesse une voiture peut-elle tourner sur un plan incliné sans qu'elle cesse de s'appuyer sur ses quatre roues? PJ.

106. Lieu des droites passant par un point donné dans un solide et autour desquelles ce solide oscillerait dans un temps déterminé. PJ.

107. Un cylindre de volume et d'épaisseur donnés oscille autour d'une parallèle à ses génératrices : quelle forme doit-on donner à sa base pour rendre minimum la longueur du pendule simple synchrone? Déterminer au même point de vue la méridienne d'une surface de révolution de volume donné oscillant autour d'une droite qui coupe son axe à angle droit. SG.

108. Une planche rectangulaire homogène est fixée par les deux extrémités d'une de ses arêtes, laquelle fait un angle avec la verticale : mouvement de la planche quand on l'écarte de sa position d'équilibre; charges supportées par les gonds. SG.

109. Oscillations d'une aiguille aimantée autour d'un axe horizontal passant au centre de gravité; influence du frottement qui s'exerce sur l'axe dans le cas où l'aiguille oscille dans le plan du méridien magnétique. SG.

110. Considérons un solide tournant autour d'un point fixe sans être sollicité par des forces extérieures; on propose de démontrer les théorèmes suivants :

1° La somme des carrés des projections des trois axes de l'ellipsoïde central relatif au point fixe, sur le plan du couple résultant des quantités de mouvement, est constante.

2° Le plan tangent à l'ellipsoïde à l'extrémité de l'axe instantané intercepte sur les axes de l'ellipsoïde des longueurs telles, que la somme des inverses de leurs carrés ou de ces carrés multipliés par les moments d'inertie autour des droites considérées est constante. SG.

111. En revenant au problème précédent, trouver les courbes directrices des cônes lieux des axes instantanés de rotation dans l'espace ou relativement au solide. SG.

112. Mouvement d'un solide de révolution pesant fixé en l'un des points de son axe de figure. SG. PJ.

113. Mouvement d'une toupie dont la pointe repose sur un plan horizontal parfaitement poli. PJ.

114. Un petit anneau homogène, parfaitement mobile, a son centre au centre d'un très grand anneau fixe dont les molécules attirent celles du premier en raison inverse du carré de la distance ; on laisse immobile le centre du petit anneau, mais on donne à ce solide un mouvement connu autour de ce point : dire comment il se mouvra sous l'influence du grand anneau. SG.

115. Mouvement d'un solide pesant libre dans l'espace et dont les molécules sont attirées vers un point fixe proportionnellement à la distance. SG.

116. Mouvement d'une sphère homogène lancée sur un plan horizontal dépoli. PJ.

117. Une tige homogène est soutenue à ses extrémités par deux fils verticaux d'égale longueur et attachés tous deux à une horizontale fixe : mouvement de la barre quand on l'écarte légèrement de sa position d'équilibre, tout en la laissant horizontale. PJ.

118. Mouvement d'un cylindre pesant et homogène abandonné sans vitesse sur un plan incliné de manière que ses arêtes restent horizontales : on tient compte du frottement et de la résistance au roulement. SG.

119. On lance une sphère homogène le long d'un plan incliné dans une direction perpendiculaire à l'horizontale du plan, en même temps qu'on lui imprime une rotation de même sens que si la sphère roulait sans glisser, mais plus rapide : déterminer le mouvement en tenant compte du frottement de glissement. PJ.

120. Un cylindre homogène est couché sur un plan horizontal assez rugueux pour ne permettre que le roulement; on fait tourner uniformément le plan autour de la droite suivant laquelle il était d'abord touché par le cylindre, et l'on demande le mouvement de celui-ci. PJ.

121. Une sphère homogène repose sur un plan horizontal sur lequel elle ne peut que rouler; ses molécules sont attirées vers un point du plan proportionnellement à la distance : mouvement de la sphère quand on néglige la résistance au roulement. SG.

122. Mouvement d'une sphère sur un plan horizontal qui tourne uniformément autour d'une verticale : la sphère ne peut que rouler, et l'on néglige la résistance au roulement. SG.

123. Une sphère dont le centre est fixe est animée d'une grande vitesse de rotation autour d'un diamètre qui peut tourner dans un plan horizontal : mouvement que prend la sphère sous l'influence de la rotation de la Terre. SG.

124. Mouvement d'un solide pesant sur un plan incliné poli, en tenant compte de la rotation de la Terre. PJ.

125. Les liaisons d'un système en mouvement viennent à être modifiées pendant un temps très court; la perte de force vive est égale à la somme des produits des masses par le carré des vitesses perdues, c'est-à-dire des vitesses qu'il faut composer avec les vitesses après le choc pour avoir les vitesses avant le choc. PJ.

126. Déterminer la percussion qu'il faudrait appliquer à un cube libre et en repos pour le faire tourner d'abord autour d'une arête. SG.

127. Une barre OA est articulée en O à un point fixe et en A à une barre égale AB; le système peut se mouvoir sans frottement sur un plan horizontal : déterminer le mouvement résultant d'une percussion appliquée perpendiculairement à AB en un de ses points; on suppose OA et AB primitivement en ligne droite. SG.

128. Une barre homogène est en mouvement sur un plan horizontal poli; le centre instantané est en un point de la barre quand

elle vient à rencontrer un obstacle fixe : déterminer la grandeur du choc et le mouvement ultérieur. SG.

129. Une planche elliptique dont le plan est vertical est soutenue en ses deux foyers par deux chevilles ; on en retire brusquement une, et l'on demande la charge supportée par l'autre immédiatement après. SG.

130. Une ellipse roule sans glisser sur une droite fixe : lieu décrit par un des foyers ; enveloppe de la directrice correspondante. SG.

131. Dans un solide animé d'un mouvement quelconque, déterminer à un instant donné le lieu des points où l'accélération est tout entière tangentielle, centripète ou d'une grandeur déterminée. SG.

HYDROSTATIQUE ET HYDRODYNAMIQUE.

132. La pression moyenne exercée par un liquide pesant sur une surface courbe est mesurée par la hauteur du liquide au-dessus du centre de gravité de la surface. PJ.

133. Une cavité hémisphérique fermée par une paroi plane coïncidant avec sa base est exactement pleine d'eau : comment faut-il l'orienter pour que la pression moyenne y soit maximum ou minimum ? PJ.

134. Une porte d'écluse est formée d'un rectangle dont un côté AB est vertical et d'un quart de cercle dont un des rayons extrêmes est AB ; la porte peut tourner autour de AB comme axe : déterminer la largeur du rectangle de manière que, l'eau atteignant d'un côté le niveau supérieur de l'écluse et de l'autre côté le niveau inférieur, on puisse faire tourner la porte sans effort. PJ.

135. Parmi tous les vases de révolution autour d'un axe vertical, de hauteur et de capacité données, quel est celui qui éprouve la plus grande pression horizontale de la part du liquide qui les remplit ? PJ.

136. Déterminer le centre de pression pour une paroi circulaire plane dont le contour affleure le niveau du liquide, et pour l'aire elliptique comprise entre deux demi-diamètres conjugués dont l'un est à la surface libre. PJ.

137. Un cylindre fermé à ses deux extrémités par des surfaces planes est plein de gaz comprimé ; on le suppose formé par la réunion : 1° des deux moitiés que déterminerait un plan mené perpendiculairement à l'axe par son milieu ; 2° des deux moitiés déterminées par un plan mené suivant l'axe : l'épaisseur étant constante, dans laquelle des deux hypothèses les deux parties ont-elles plus de chance de se séparer? PJ.

138. Équilibre d'un prisme droit homogène, à base carrée, flottant sur un liquide avec ses arêtes horizontales. PJ.

139. On considère une série de plans détachant d'un solide donné des segments dont le volume est constant; le lieu des centres de gravité de ces segments s'appelle *surface de carène;* le plan tangent en un point de cette surface est parallèle au plan qui a déterminé le segment correspondant à ce point : démontrer ce théorème et en conclure que, pour l'équilibre d'un corps flottant, il suffit qu'une normale menée de son centre de gravité à la surface de carène soit verticale. PJ.

140. Appliquer le résultat précédent à l'équilibre d'un prisme triangulaire droit dont une base est immergée et la base opposée hors de l'eau. PJ.

141. Théorie du baromètre à balance du P. Secchi. PJ.

142. Un parallélépipède rectangle est en équilibre sur un liquide, une des faces étant horizontale ; on déplace le prisme de façon que deux côtés opposés de cette face restent horizontaux : condition de stabilité de l'équilibre primitif. PJ.

143. Condition de stabilité de l'équilibre d'un prisme droit à base de triangle isoscèle, et flottant sur l'eau de manière que la face latérale répondant à la base du triangle isoscèle soit horizontale et hors de l'eau : petites oscillations quand on écarte le prisme de cette position, tout en laissant les arêtes latérales horizontales. PJ.

144. On suppose que dans l'atmosphère la pression soit proportionnelle à la puissance $\frac{m+1}{m}$ de la densité, et l'on demande d'en déduire la hauteur de l'atmosphère, étant données la pression et la densité à la surface de la Terre. PJ.

145. Un vase cylindrique contenant de l'eau tourne uniformément autour de son axe, qui est vertical; sur l'eau flotte un cy-

lindre de bois dont l'axe coïncide avec celui du vase et qui tourne avec la même vitesse angulaire : figure du système, supposé en équilibre relativement au vase. PJ.

146. Une masse fluide et homogène dont les molécules s'attirent suivant la loi de Newton et qui est animée d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe peut être en équilibre quand sa surface est un ellipsoïde de révolution aplati : déterminer l'aplatissement en fonction de la vitesse angulaire ; application à la Terre supposée primitivement fluide et homogène. PJ.

147. Un vase a la forme d'un demi-ellipsoïde dont l'ouverture est horizontale et coïncide avec une section principale : on demande de le couper par un second plan horizontal de manière qu'en maintenant le vase plein d'eau jusqu'aux bords la vitesse du liquide qui s'écoule ou le volume fourni dans un temps donné soit maximum. PJ.

148. Calculer le volume de liquide qui s'écoule dans un temps donné par un orifice circulaire de dimensions finies pratiqué dans la paroi verticale d'un vase où le niveau est maintenu constant. PJ.

149. Quand on suppose que les vitesses des molécules liquides qui s'écoulent par un orifice est la même aux divers points d'une tranche normale au canal suivi par le liquide, on diminue la somme des forces vives, pourvu, bien entendu, qu'on ne change pas la dépense réelle de liquide pour un temps donné. PJ.

150. Deux réservoirs à ciel ouvert où le niveau est constant, mais différent pour les deux, sont mis en communication par un tuyau de longueur et de rayon connus, sans coudes : volume de l'eau qui s'écoule en un temps donné. PJ.

151. Déterminer une surface de révolution à axe vertical telle, que si, après l'avoir remplie de liquide, on laisse celui-ci s'écouler par un petit orifice, le niveau supérieur baisse uniformément. PJ.

152. Loi des oscillations d'un liquide pesant contenu dans un siphon dont les deux branches sont verticales et réunies par un tube horizontal de diamètre égal à celui des branches. PJ.

153. On connaît la hauteur et la grande base d'un tronc de cône immergé dans un fluide qui se meut dans la direction de l'axe déterminer la petite base de manière que la résultante des pressions

éprouvées par cette base et par la surface convexe du tronc soit minimum. PJ.

154. Déterminer une surface de révolution telle que la résultante des pressions exercées entre deux parallèles donnés par un liquide qui se meut dans le sens de l'axe soit un minimum. PJ.

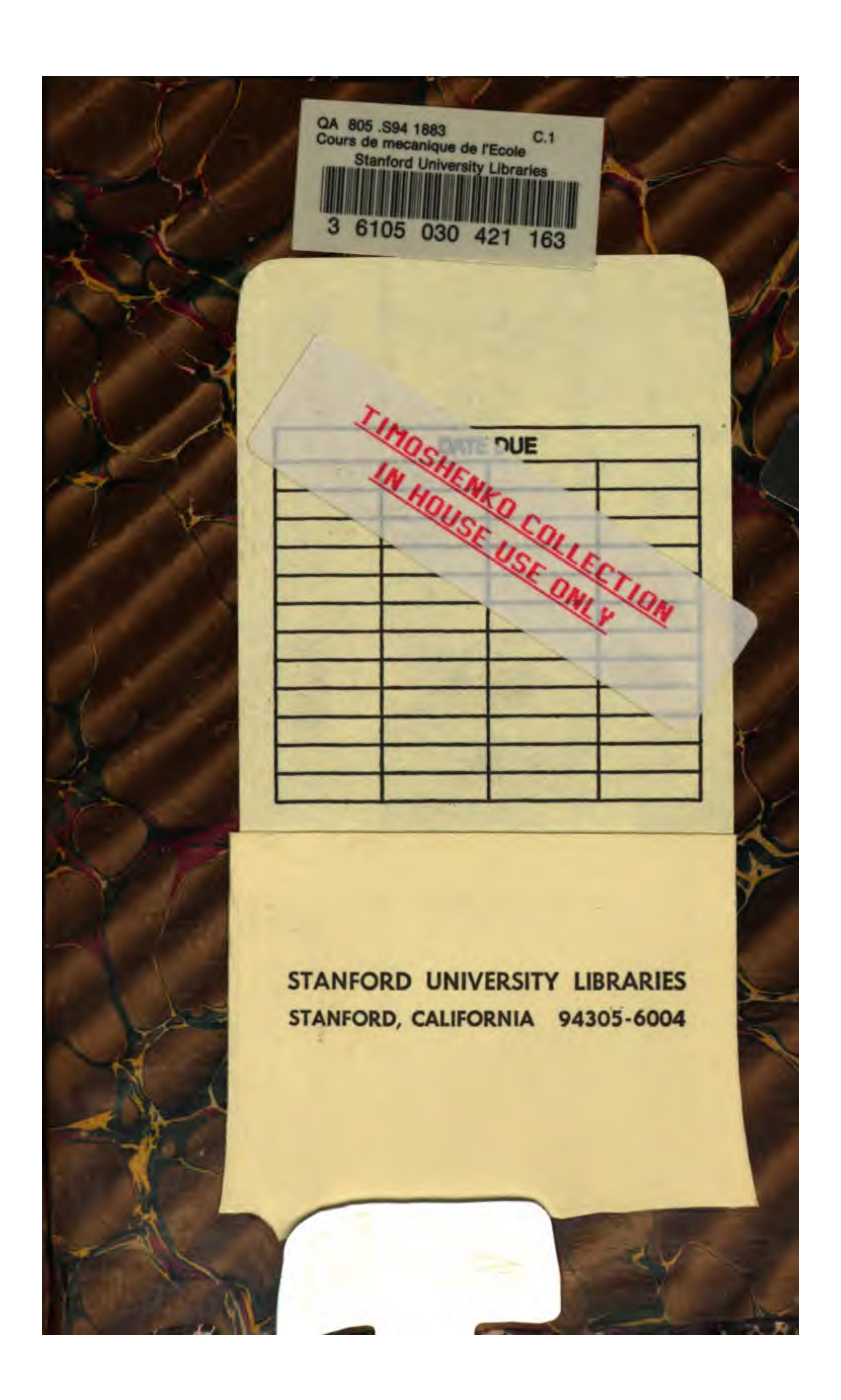
155. Déterminer la forme et le mouvement d'une bulle d'air qui s'élève à travers un liquide pesant. PJ.

156. Un cylindre droit pesant repose par sa base sur un plan horizontal sur lequel il ne peut glisser : déterminer la vitesse avec laquelle un courant d'air parallèle au plan doit frapper le cylindre pour le renverser. PJ.

157. Le vent se meut avec une vitesse connue dans le sens de l'arbre d'un moulin à vent ; les ailes sont engendrées par une droite de longueur constante qui rencontre normalement l'axe de l'aile perpendiculaire à l'arbre ; déterminer la forme des ailes et leur vitesse angulaire de manière que le travail effectué par le vent dans un temps donné soit maximum. PJ.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES AUGUSTINS, 55.





QA 805 .S94 1883 C.1
Cours de mecanique de l'Ecole
Stanford University Libraries
3 6105 030 421 163
DATE DUE
TIMOSHENKO COLLECTION
IN HOUSE USE ONLY
STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
STANFORD, CALIFORNIA 94305-6004

